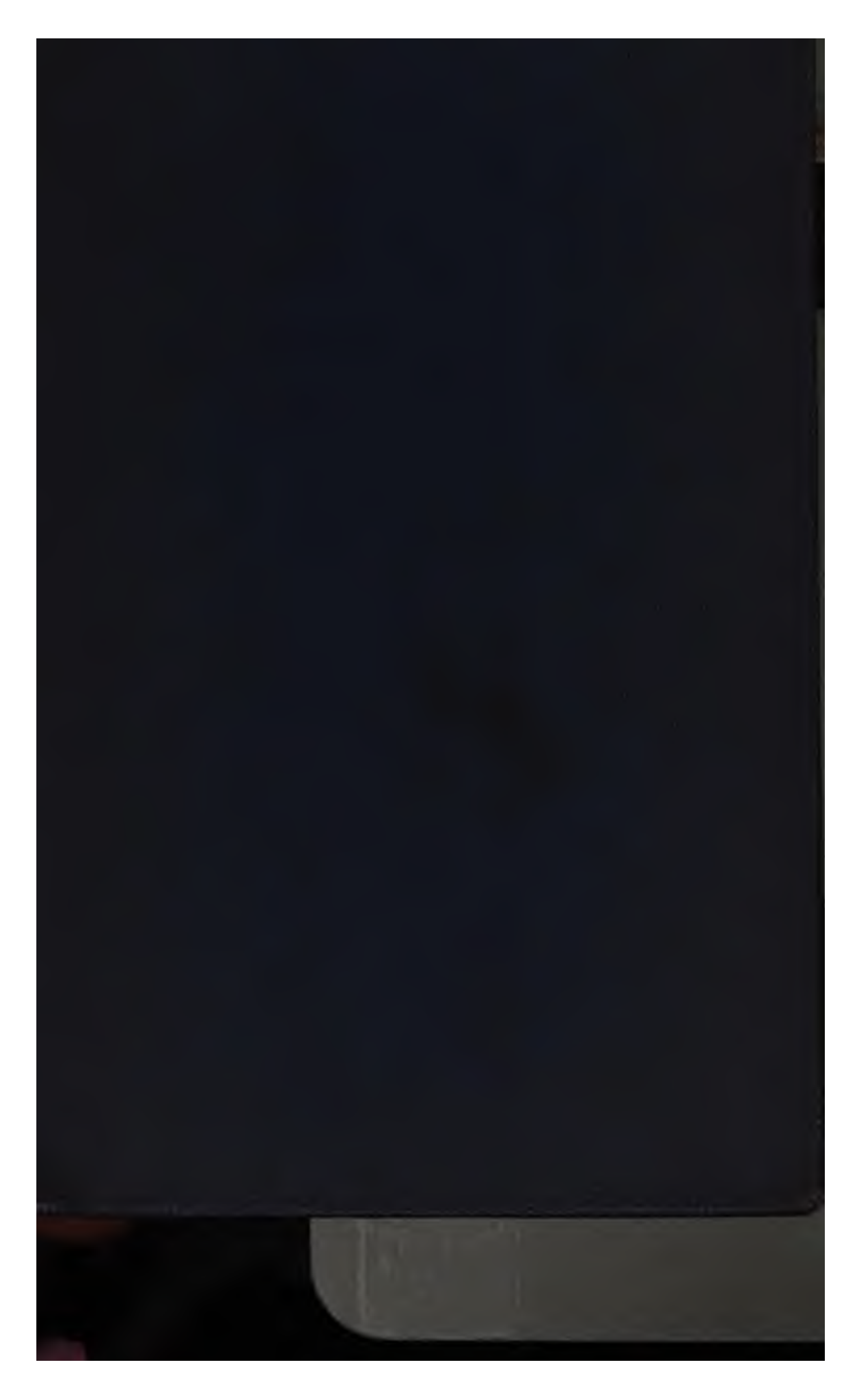










Leonhard Euler's

vollständige Anleitung

zur

Integralrechnung.

Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt

von

Joseph Salomon,

k. k. Professor.

Erster Band,

welcher die Integrationsmethoden von den ersten Principien bis zur Integration der Differenzialgleichungen des ersten Grades enthält.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1828.

Dem

Hochwohlgebornen Herrn

Adolph Baron v. Friesenhof,

seinem eifrigen Schüler,

aus wahrer Zuneigung und Verehrung

gewidmet

vom

Übersetzer.

Vorrede des Übersetzers.

Der classische Werth von Euler's Integralrechnung ist nicht allein in Deutschland, sondern bey allen gebildeten Nationen zu allgemein anerkannt, als daß ich es für nöthig erachte, auch nur ein Wort über die Wichtigkeit dieses Meisterwerkes anzuführen; ich beschränke mich demnach lediglich auf die Anführung der Gründe, die mich zur Veranstaltung dieser deutschen Ausgabe bestimmten.

Das Original, welches, wie alle Euler'schen Schriften, einen unerschöpflichen Reichthum an Kunstgriffen und einen unübersehbaren Schatz von Resultaten des richtigen mathematischen Denkens darbietet, ist aus dem deutschen Buchhandel gänzlich verschwunden, und so selten geworden, daß man dasselbe nur noch in größern Bibliotheken findet. Ereignet sich daher auch der seltene Fall, daß ein Exemplar dieses vortrefflichen Werkes in einer öffentlich zu verkaufenden Büchersammlung angetroffen wird, so wird es gewöhnlich zu einem so hohen Preise erstanden, daß derselbe für die Casse des größern Theiles des mathematischen Publicums sehr lästig fällt. Überdieß ist Euler's Integralrechnung, wie sich aus den häufigen Nachfragen nach derselben schließen läßt, durch die neuern Schriften und Sammlungen weder verdrängt, noch überflüssig gemacht worden, und bleibt immerhin eine reichhaltige Quelle der wichtigsten und interessantesten Resultate, mit welchen der forschende Geist die Wissenschaft bereichert hat.

Leonhard Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung.

Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt

von

Joseph Salomon,

k. k. Professor.

Erster Band,

welcher die Integrationsmethoden von den ersten Principien bis zur Integration der Differenzialgleichungen des ersten Grades enthält.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1828.

Dem

Hochwohlgebornen Herrn

Adolph Baron v. Friesenhof,

seinem eifrigen Schüler,

aus wahrer Zuneigung und Verehrung

gewidmet

vom

Übersetzer.

Vorrede des Übersetzers.

Der classische Werth von Euler's Integralrechnung ist
ht allein in Deutschland, sondern bey allen gebildeten Nationen
allgemein anerkannt, als daß ich es für nöthig erachte, auch
r ein Wort über die Wichtigkeit dieses Meisterwerkes anzu-
hren; ich beschränke mich demnach lediglich auf die Anführung
r Gründe, die mich zur Veranstaltung dieser deutschen Ausgabe
stimmten.

Das Original, welches, wie alle Euler'schen Schriften,
ien unerschöpflichen Reichthum an Kunstgriffen und einen unüber-
baren Schatz von Resultaten des richtigen mathematischen Den-
ns darbietet, ist aus dem deutschen Buchhandel gänzlich ver-
wunden, und so selten geworden, daß man dasselbe nur noch
größern Bibliotheken findet. Ereignet sich daher auch der sel-
ne Fall, daß ein Exemplar dieses vortrefflichen Werkes in einer
fentlich zu verkaufenden Büchersammlung angetroffen wird, so
ird es gewöhnlich zu einem so hohen Preise erstanden, daß der-
lbe für die Casse des größern Theiles des mathematischen Publi-
ms sehr lästig fällt. Überdieß ist Euler's Integralrechnung,
ie sich aus den häufigen Nachfragen nach derselben schließen läßt,
rch die neuern Schriften und Sammlungen weder verdrängt,
ch überflüssig gemacht worden, und bleibt immerhin eine reich-
ltige Quelle der wichtigsten und interessantesten Resultate, mit
lchen der forschende Geist die Wissenschaft bereichert hat.

Ich glaubte daher, nicht allein den Mathematikern, sonder auch der Wissenschaft selbst und ihrer Verbreitung einen wichtige Dienst zu leisten, wenn ich eine getreue, mit dem Originale voll kommen übereinstimmende und höchst korrekte Übersetzung diese klassischen Werkes veranstaltete. Ich habe mir hiebey keine an dere Abweichung vom Originale erlaubt, als daß ich den Buch staben i mit k vertauschte, um dadurch die Deutlichkeit zu förder und eine größere Korrektheit zu erzielen, und daß ich an viele Orten die noch vorhandenen Fehler verbesserte.

Sollte diese Arbeit den Beyfall des gelehrten Publicum erhalten, so werde ich in einem Supplementbande alles das zu sammenstellen, was seit des großen Eulers Tode in der Inte gralrechnung bisher geleistet worden ist, um auf diese Weise ein vollständige Sammlung aller Leistungen in diesem unermeßlicher Gebiethe der mathematischen Wissenschaften zu erhalten.

Ein getreues Verzeichniß der etwa übersehenen Fehler wird dem letzten Bande beygefügt werden.

Wien, im Junius 1828.

Der Übersetzer.

Inhalt des ersten Bandes.

Zweyter Abschnitt.

Von der Integration der Differenzialgleichungen.

Dritter Abschnitt.

Einleitung in die Integralrechnung überhaupt.

Erklärung 1.

§. 1. Die Integralrechnung ist die Methode, aus einer gegebenen Beziehung der Differenzialien die Relation zwischen den Größen selbst zu finden; die Rechnung, durch welche dieses geleistet wird, pflegt man Integration zu nennen.

Zusatz 1.

§. 2. Da die Differenzialrechnung aus einer gegebenen Relation zwischen veränderlichen Größen die Beziehung der Differenzialien bestimmen lehrt, so ist die Integralrechnung die umgekehrte Methode.

Zusatz 2.

§. 3. So wie in der Analysis immer zwey Rechnungsoperationen einander entgegengesetzt sind, wie Subtraction und Addition, Division und Multiplication, Wurzelausziehen und Potenziren, so ist auch auf ähnliche Art der Differenzialrechnung die Integralrechnung entgegengesetzt.

Zusatz 3.

§. 4. Wenn zwischen je zwey veränderlichen Größen x und y irgend eine Relation gegeben wird, so lehrt die Differenzialrechnung das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx$ bestimmen: soll aber umgekehrt aus dem gegebenen Verhältniß der Differenzialien die zwischen den Größen x und y statt findende Relation selbst bestimmt werden, so ist dieß das Geschäft der Integralrechnung.

Anmerkung 1.

§. 5. Ich habe schon in der Differenzialrechnung bemerkt, daß die Bestimmung der Differenzialien nicht im absoluten, sondern im re-

lativen Sinne zu nehmen sey, so daß, wenn y irgend eine Function von x bezeichnet, nicht sowohl das Differenziale derselben dy, sondern vielmehr das Verhältniß dieses Differenzials zu dem Differenziale dx zu bestimmen sey. Denn da alle Differenzialien an und für sich der o gleich sind, so wird, was auch immer y für eine Function von x seyn mag, immer $dy = o$ seyn müssen, so daß weiter nichts Absolutes gesucht werden kann. Der Satz muß also richtig so gestellt werden: man bestimme, während x einen unendlich kleinen und verschwindenden Zusatz dx erhält, das Verhältniß der Zunahme, welche dann die Function y selbst erhält, zu jenem dx. Denn ist gleichwohl jeder derselben gleich o, so findet dennoch ein gewisses Verhältniß zwischen ihnen statt, welches die Differenzialrechnung auf eine eigenthümliche Weise auffindet. Wenn demnach $y = x^2$ ist, so wird in der Differenzialrechnung gezeigt, daß $\frac{dy}{dx} = 2x$ sey, und daß dieses Verhältniß der Zunahmen nur dann wahr sey, wenn das Increment dx, aus welchem dy entspringt, $= o$ gesetzt wird. Übrigens kann man, wenn man diese wahre Bedeutung der Differenzialien festhält, die gewöhnliche Sprache, nach welcher die Differenzialien als etwas Absolutes betrachtet werden, dulden, so lange man nur, wenigstens im Geiste, den richtigen Sinn damit verknüpft. Es würde also nicht gefehlt seyn, wenn wir für $y = x^2$, dann $dy = 2x dx$ setzen, obgleich es eben so richtig wäre, wenn man $dy = 3x dx$ oder $dy = 4x dx$ setzen würde, weil wegen $dx = o$ und $dy = o$ diese Gleichungen zugleich Statt finden könnten; allein nur die erste entspricht dem wahren Verhältnisse $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Anmerkung 2.

§. 6. So wie die Differenzialrechnung von den Engländern die Methode der Fluxionen genannt wird, so heißt bei ihnen die Integralrechnung die umgekehrte Methode der Fluxionen, wenn man nämlich von den Fluxionen auf die fluenten Größen zurückkehrt. Die Größen, welche wir veränderlich nennen, heißen die Engländer zweckmäßige fluente Größen, und die unendlich kleinen oder verschwindenden Änderungen derselben Fluxionen, so daß bey ihnen Fluxionen dasselbe sind, was wir unter den Differenzialien verstehen. Die Verschiedenheit im Ausdrucke ist durch den Gebrauch schon so eingewurzelt, daß kaum eine Vereinigung zu hoffen ist. Ich meines Theils würde dem Sprachgebrauche der Engländer gerne nachahmen, wenn nicht die von uns ge

brauchten Zeichen bey weitem den Vorzug vor denen der Engländer verdienten. Da übrigens schon so viele Bücher nach beyden Systemen verfaßt erschienen sind, so würde eine solche Vereinigung auch ohne Nutzen seyn.

Erklärung 2.

§. 7. Da das Differenziale einer jeden Function von x die Form $X dx$ hat, so wird, wenn eine solche Differenzialformel $X dx$, in welcher X irgend eine Function von x bezeichnet, gegeben ist, jene Function, deren Differenziale gleich $X dx$ ist, das Integrale dieser letzteren genannt, und gewöhnlich durch das vorgesetzte Zeichen $\int$ angedeutet, so daß $\int X dx$ jene veränderliche Größe bezeichnet, deren Differenziale $= X dx$ ist.

Zusatz 1.

§. 8. Wie nun das Integrale einer gegebenen Differenzialformel $X dx$, oder wie jene Function von x, deren Differenziale $= X dx$ ist, und die durch $\int X dx$ angedeutet wird, gesucht werden müsse, ist der Gegenstand der Integralrechnung.

Zusatz 2.

§. 9. So wie nun der Buchstabe d das Zeichen der Differenziation ist, so wird durch den Buchstaben $\int$ die Integration angedeutet. Beyde Zeichen bedeuten also entgegengesetzte Rechnungsoperationen, und heben sich gleichsam auf; nämlich es ist $\int dX = X$, weil dadurch jene Größe bezeichnet wird, deren Differenziale dX ist, welche in der That X selbst ist.

Zusatz 3.

§. 10. Weil nun $2x dx$, $n x^{n-1} dx$, $\frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ die Differenzialien der Functionen x^2, x^n, $\sqrt{a^2 - x^2}$ sind, so wird umgekehrt $\int 2x dx = x^2$; $\int n x^{n-1} dx = x^n$; $\int \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}$ seyn, woraus der Gebrauch dieses Zeichens noch deutlicher erhellt.

Anmerkung 1.

§. 11. Es scheint zwar, daß hier nur eine einzige veränderliche Größe in der Rechnung vorkomme, und doch haben wir eben festgesetzt,

daß sowohl in der Differenzial- als in der Integralrechnung immer das Verhältniß zweyer oder mehrerer Differenzialien betrachtet werde. Allein, obgleich hier nur eine einzige veränderliche Größe erscheint, so werden doch im Grunde zwey betrachtet; denn die zweyte ist jene Function selbst, deren Differenzial wir durch $X dx$ vorstellten; bezeichnen wir diese durch den Buchstaben y, so wird $d.y = X dx$ oder $\frac{dy}{dx} = X$, so daß hier wirklich das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx$ gegeben wird, dessen Quotient $= X$ ist; und daher wird $y = \int X dx$ seyn. Übrigens muß man sich hier vorstellen, daß dieses Integrale nicht sowohl aus dem Differenziale $X dx$, welches $= 0$ ist, sondern vielmehr aus dem Verhältnisse desselben zu dx gefunden werde. Das Zeichen $\int$ spricht man gewöhnlich durch das Wort Summe aus, welches aus dem irrigen Begriffe entsteht, als wäre das Integrale gleichsam die Summe aller Differenzialien, welches aber eben so wenig richtig ist, als die gewöhnliche Vorstellung, daß eine Linie aus Puncten besteht.

Anmerkung 2.

§. 12. Die Integralrechnung erstreckt sich viel weiter als auf die Integration solcher Formeln mit einer veränderlichen Größe; denn so wie hier die Function einer veränderlichen Größe x aus der gegebenen Form ihres Differenzials gesucht wird, so muß man auch die Integralrechnung auf die Bestimmung der Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen ausdehnen, wenn irgend eine Relation ihrer Differenzialien gegeben ist. Ferner kann sich die Integralrechnung nicht allein auf Differenzialien des ersten Grades beschränken, sondern sie muß auch die Vorschriften lehren, nach welchen die Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen bestimmt werden können, wenn irgend eine Relation zwischen den Differenzialien des zweyten oder eines höheren Grades gegeben ist. Deßhalb haben wir die Integralrechnung so definirt, daß sie alle Untersuchungen dieser Art umfaßt. Denn unter dem Worte Differenzialien wollen wir Differenzialien von irgend einer Ordnung verstanden wissen, und des Ausdruckes: die zwischen ihnen Statt findende Relation, habe ich mich deßwegen bedient, um einen weiteren Begriff zu bezeichnen, als das Wort Verhältniß ausdrückt, welches nur die Vergleichung zweyer Differenzialien anzudeuten scheint. Dieß vorausgeschickt, können wir nun die Integralrechnung in mehrere Abschnitte theilen.

Erklärung 3.

§. 13. Die Integralrechnung zerfällt in zwey Theile, deren ersterer die Methode lehrt, nach welcher die Function einer einzigen veränderlichen Größe aus irgend einer gegebenen Relation zwischen ihren Differenzialien des ersten oder eines höheren Grades bestimmt werden kann. Der zweyte Theil aber lehrt die Function zweyer oder mehrerer Veränderlichen bestimmen, wenn zwischen ihren Differenzialien des ersten oder irgend eines höheren Grades die Relation gegeben ist.

Zusatz 1.

§. 14. Je nachdem also eine Function, die aus einer gegebenen Relation ihrer Differenzialien bestimmt werden soll, eine oder mehrere Veränderliche enthält, wird die Integralrechnung bequem in zwey Haupttheile getheilt, deren Auseinandersetzung wir zwey Bücher widmen.

Zusatz 2.

§. 15. Die Integralrechnung beschäftigt sich demnach stets mit der Auffindung der Functionen von einer oder mehreren veränderlichen Größen, wenn irgend eine Relation zwischen ihren Differenzialien irgend eines Grades gegeben ist.

Anmerkung.

§. 16. Da sich also nach unserer Eintheilung der erste Theil der Integralrechnung mit der Bestimmung der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe aus einer gegebenen Relation ihrer Differenzialien beschäftigt, so hätten wir, wie es scheint, mehrere Unterabtheilungen nach der Anzahl der in der Function enthaltenen Veränderlichen angeben sollen, so daß der zweyte Theil die Functionen zweyer veränderlichen, der dritte die dreyer, der vierte Theil die vierer veränderlichen Größen behandelte. Allein bey diesem letzteren Theile findet beynahe dieselbe Verfahrungsart Statt, so daß man die Functionen mit mehreren Veränderlichen zu behandeln weiß, sobald die Auffindung der Functionen zweyer Veränderlichen in unserer Gewalt ist. Wir können daher die Methoden, Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen zu bestimmen, bequem mit einander verbinden, und dieselben einem einzigen Theile der Integralrechnung zuweisen, welchen wir in dem zweyten Buche abhandeln werden.

Dieser zweyte Theil ist bisher in den Elementen nirgends abg

daß sowohl in der Differenzial- als in der Integralrechnung immer das Verhältniß zweyer oder mehrerer Differenzialien betrachtet werde. Allein, obgleich hier nur eine einzige veränderliche Größe erscheint, so werden doch im Grunde zwey betrachtet; denn die zweyte ist jene Function selbst, deren Differenzial wir durch $X\,dx$ vorstellten; bezeichnen wir diese durch den Buchstaben y, so wird $d.y = X\,dx$ oder $\frac{dy}{dx} = X$, so daß hier wirklich das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx$ gegeben wird, dessen Quotient $= X$ ist; und daher wird $y = \int X\,dx$ seyn. Übrigens muß man sich hier vorstellen, daß dieses Integrale nicht sowohl aus dem Differenziale $X\,dx$, welches $= 0$ ist, sondern vielmehr aus dem Verhältnisse desselben zu dx gefunden werde. Das Zeichen $\int$ spricht man gewöhnlich durch das Wort Summe aus, welches aus dem irrigen Begriffe entsteht, als wäre das Integrale gleichsam die Summe aller Differenzialien, welches aber eben so wenig richtig ist, als die gewöhnliche Vorstellung, daß eine Linie aus Puncten besteht.

Anmerkung 2.

§. 12. Die Integralrechnung erstreckt sich viel weiter als auf die Integration solcher Formeln mit einer veränderlichen Größe; denn so wie hier die Function einer veränderlichen Größe x aus der gegebenen Form ihres Differenzials gesucht wird, so muß man auch die Integralrechnung auf die Bestimmung der Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen ausdehnen, wenn irgend eine Relation ihrer Differenzialien gegeben ist. Ferner kann sich die Integralrechnung nicht allein auf Differenzialien des ersten Grades beschränken, sondern sie muß auch die Vorschriften lehren, nach welchen die Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen bestimmt werden können, wenn irgend eine Relation zwischen den Differenzialien des zweyten oder eines höheren Grades gegeben ist. Deßhalb haben wir die Integralrechnung so definirt, daß sie alle Untersuchungen dieser Art umfaßt. Denn unter dem Worte Differenzialien wollen wir Differenzialien von [illegible] einer Ordnung verstanden wissen, und des Ausdruckes: die [illegible] ihnen Statt findende Relation, habe ich [illegible] dient, um einen weiteren Begriff zu bezeichnen [illegible] hältniß ausdrückt, welches nur die Vergleich[illegible] anzudeuten scheint. Dieß vorausgeschickt, [illegible] gralrechnung in mehrere Abschnitte theile[illegible]

Erklärung 3.

§. 13. Die Integralrechnung zerfällt in zwey Theile, deren ersterer die Methode lehrt, nach welcher die Function einer einzigen veränderlichen Grösse aus irgend einer gegebenen Relation zwischen ihren Differenzialien des ersten oder eines höheren Grades bestimmt werden kann. Der zweyte Theil aber lehrt die Function zweyer oder mehrerer Veränderlichen bestimmen, wenn zwischen ihren Differenzialien des ersten oder irgend eines höheren Grades die Relation gegeben ist.

Zusatz 1.

§. 14. Je nachdem also eine Function, die aus einer gegebenen Relation ihrer Differenzialien bestimmt werden soll, eine oder mehrere Veränderliche enthält, wird die Integralrechnung bequem in zwey Haupttheile getheilt, deren Auseinandersetzung wir zwey Bücher widmen.

Zusatz 2.

§. 15. Die Integralrechnung beschäftigt sich demnach stets mit der Auffindung der Functionen von einer oder mehreren veränderlichen Grössen, wenn irgend eine Relation zwischen ihren Differenzialien irgend eines Grades gegeben ist.

Anmerkung.

§. 16. Da sich also nach unserer Eintheilung der erste Theil der Integralrechnung mit der Bestimmung der Functionen einer einzigen veränderlichen Grösse aus einer gegebenen Relation ihrer Differenzialien beschäftigt, so hätten wir, wie es scheint, mehrere Unterabtheilungen nach der Anzahl der in der Function enthaltenen Veränderlichen angeben sollen, so daß der zweyte Theil die Functionen zweyer veränderlichen, der dritte die dreyer, der vierte Theil die vierer veränderlichen Grössen behandelte. Allein bey diesem letzteren Theile findet beynahe dieselbe Verfahrungsart Statt, so daß man die Functionen mit mehreren Veränderlichen zu behandeln weiß, sobald die Auffindung der Functionen zweyer Veränderlichen in unserer Gewalt ist. Wir können [illegible] en zweyer oder mehrerer veränderlichen [illegible] der verbinden, und dieselben [illegible] eisen, welchen wir in [illegible] nten nirgends abge-

daß sowohl in der Differenzial- als in der Integralrechnung immer das Verhältniß zweyer oder mehrerer Differenzialien betrachtet werde. Allein, obgleich hier nur eine einzige veränderliche Größe erscheint, so werden doch im Grunde zwey betrachtet; denn die zweyte ist jene Function selbst, deren Differenzial wir durch $X\,dx$ vorstellten; bezeichnen wir diese durch den Buchstaben y, so wird $d.y = X\,dx$ oder $\frac{dy}{dx} = X$, so daß hier wirklich das Verhältniß der Differenzialien $dy : dx$ gegeben wird, dessen Quotient $= X$ ist; und daher wird $y = \int X\,dx$ seyn. Übrigens muß man sich hier vorstellen, daß dieses Integrale nicht sowohl aus dem Differenziale $X\,dx$, welches $= 0$ ist, sondern vielmehr aus dem Verhältnisse desselben zu dx gefunden werde. Das Zeichen $\int$ spricht man gewöhnlich durch das Wort Summe aus, welches aus dem irrigen Begriffe entsteht, als wäre das Integrale gleichsam die Summe aller Differenzialien, welches aber eben so wenig richtig ist, als die gewöhnliche Vorstellung, daß eine Linie aus Puncten besteht.

Anmerkung 2.

§. 12. Die Integralrechnung erstreckt sich viel weiter als auf die Integration solcher Formeln mit einer veränderlichen Größe; denn so wie hier die Function einer veränderlichen Größe x aus der gegebenen Form ihres Differenzials gesucht wird, so muß man auch die Integralrechnung auf die Bestimmung der Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen ausdehnen, wenn irgend eine Relation ihrer Differenzialien gegeben ist. Ferner kann sich die Integralrechnung nicht allein auf Differenzialien des ersten Grades beschränken, sondern sie muß auch die Vorschriften lehren, nach welchen die Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen bestimmt werden können, wenn irgend eine Relation zwischen den Differenzialien des zweyten oder eines höheren Grades gegeben ist. Deßhalb haben wir die Integralrechnung so definirt, daß sie alle Untersuchungen dieser Art umfaßt. Denn unter dem Worte Differenzialien wollen wir Differenzialien von irgend einer Ordnung verstanden wissen, und des Ausdruckes: die zwischen ihnen Statt findende Relation, habe ich mich deßwegen bedient, um einen weiteren Begriff zu bezeichnen, als das Wort Verhältniß ausdrückt, welches nur die Vergleichung zweyer Differenzialien anzudeuten scheint. Dieß vorausgeschickt, können wir nun die Integralrechnung in mehrere Abschnitte theilen.

Erklärung 3.

§. 13. Die Integralrechnung zerfällt in zwey Theile, deren ersterer die Methode lehrt, nach welcher die Function einer einzigen veränderlichen Größe aus irgend einer gegebenen Relation zwischen ihren Differenzialien des ersten oder eines höheren Grades bestimmt werden kann. Der zweyte Theil aber lehrt die Function zweyer oder mehrerer Veränderlichen bestimmen, wenn zwischen ihren Differenzialien des ersten oder irgend eines höheren Grades die Relation gegeben ist.

Zusatz 1.

§. 14. Je nachdem also eine Function, die aus einer gegebenen Relation ihrer Differenzialien bestimmt werden soll, eine oder mehrere Veränderliche enthält, wird die Integralrechnung bequem in zwey Haupttheile getheilt, deren Auseinandersetzung wir zwey Bücher widmen.

Zusatz 2.

§. 15. Die Integralrechnung beschäftigt sich demnach stets mit der Auffindung der Functionen von einer oder mehreren veränderlichen Größen, wenn irgend eine Relation zwischen ihren Differenzialien irgend eines Grades gegeben ist.

Anmerkung.

§. 16. Da sich also nach unserer Eintheilung der erste Theil der Integralrechnung mit der Bestimmung der Functionen einer einzigen veränderlichen Größe aus einer gegebenen Relation ihrer Differenzialien beschäftigt, so hätten wir, wie es scheint, mehrere Unterabtheilungen nach der Anzahl der in der Function enthaltenen Veränderlichen angeben sollen, so daß der zweyte Theil die Functionen zweyer veränderlichen, der dritte die dreyer, der vierte Theil die vierer veränderlichen Größen behandelte. Allein bey diesem letzteren Theile findet beynahe dieselbe Verfahrungsart Statt, so daß man die Functionen mit mehreren Veränderlichen zu behandeln weiß, sobald die Auffindung der Functionen zweyer Veränderlichen in unserer Gewalt ist. Wir können daher die Methoden, Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen zu bestimmen, bequem mit einander verbinden, und dieselben einem einzigen Theile der Integralrechnung zuweisen, welchen wir in dem zweyten Buche abhandeln werden.

Dieser zweyte Theil ist bisher in den Elementen nirgends abge-

handelt worden, obgleich die Anwendung desselben in der Mechanik, und vorzüglich in der Lehre von den flüssigen Körpern von sehr großem Nutzen ist. Da nun in Untersuchungen dieser Art außer den ersten Anfangsgründen nichts Erhebliches geleistet worden ist, so wird unser zweytes Buch der Integralrechnung nicht sehr reichhaltig seyn, und außer der Erwähnung dessen, was noch zu wünschen übrig bleibt, wenig erwarten lassen; übrigens scheint mir selbst dieses viel zur Erweiterung der Wissenschaft beyzutragen.

Erklärung 4.

§. 17. Jedes der beyden Bücher der Integralrechnung wird wieder nach dem Grade der Differenzialien, aus deren Relation die gesuchte Function bestimmt werden soll, bequem in mehrere Unterabtheilungen zerlegt. So beschäftigt sich der erste Theil mit der Relation der Differenzialien des ersten Grades, der zweyte mit der Relation der Differenzialien des zweyten Grades, wiewohl dieser letztere auch die Differenzialien höherer Grade betrachtet, weil hierin bisher noch wenig geleistet worden ist.

Zusatz 1.

§. 18. Es wird also jedes Buch aus zwey Theilen bestehen, in deren ersterem die zwischen Differenzialien des ersten Grades gegebene Relation in Erwägung gezogen werden soll, in dem zweyten Theile aber werden wir uns mit solchen Integrationen befassen, bey welchen eine Relation zwischen den Differenzialien des zweyten oder eines höheren Grades gegeben ist.

Zusatz 2.

§. 19. In dem ersten Theile des ersten Buches werden wir uns mit der Auffindung solcher Functionen der Veränderlichen x beschäftigen, daß, wenn die Function $= y$ und $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, jeder zwischen den drey Größen x, y und p gegebenen Relation Genüge geleistet werde: oder daß, wenn irgend eine Gleichung zwischen diesen drey Größen gegeben ist, die Natur der Function y, oder die Gleichung zwischen x und y mit Ausschluß von p bestimmt werde.

Zusatz 3.

§. 20. Die Aufgaben des zweyten Theils des ersten Buches werden wir so zusammenstellen, daß wenn $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, ꝛc.

nimmt er ferner nach erlerntem Potenziren durch die umgekehrte Operation das Wurzelausziehen, so bekömmt er, so oft dieß mißlingt, die Idee von irrationalen Größen, und diese Kenntniß ist hinreichend durch die ganze gewöhnliche Analysis. Auf eine ähnliche Weise leitet uns die Integralrechnung, wenn die Integration nicht gelingt, auf eine neue Gattung transcendenter Größen. Denn können wir gleichwohl alle Größen differenziren, so können wir doch nicht umgekehrt alle Differenzial-Ausdrücke integriren.

Anmerkung 3.

§. 30. Gelingen auch die ersten Versuche der Integration nicht sogleich, so kann man die gesuchten Functionen noch nicht für transcendent halten, denn nicht selten kann auch das algebraische Integral nur durch besondere Kunstgriffe gefunden werden. Erscheint aber dann die gesuchte Function als transcendent, so untersuche man sorgfältig, ob nicht dieselbe etwa auf die einfachsten Arten der transcendenten Größen, nämlich auf Logarithmen oder Winkel sich zurückführen lasse, in welchem Falle dann die Auflösung als algebraisch betrachtet werden kann. Gelingt dieses nicht nach Wunsch, so suche man dennoch die gesuchte Function auf die möglichst einfachste Form transcendenter Größen zurückzuführen. Für die Anwendung ist es aber wohl am bequemsten, die Werthe transcendenter Größen näherungsweise darzustellen, weßhalb die Integralrechnung sich vorzüglich mit der Aufsuchung unendlicher Reihen beschäftigt, welche die Werthe jener Functionen ausdrücken.

Lehrsatz.

§. 31. Alle durch Integralrechnung gefundene Functionen sind unbestimmt, und müssen erst durch die Natur des Problemes, dessen Auflösung sie enthalten, näher angegeben werden.

Beweis.

Es gibt immer unendlich viele Functionen, die dasselbe Differenziale haben; so z. B. ist das Differenziale der Function $P+C$ für jeden Werth der constanten Größe C, $=dP$; umgekehrt entspricht dem Differenziale dP das Integrale $P+C$, wo wir für C jede beliebige constante Größe setzen können. Hieraus erhellt die Unbestimmtheit jener Function, deren Differenzial $=dP$ gesetzt wird, weil sie eine willkürliche Constante mit sich führt. Dasselbe muß auch Statt finden, wenn

aus irgend einer Relation der Differenzialien eine Function zu bestimmen ist, welche immer eine willkürliche Constante enthalten wird, welcher in der Relation der Differenzialien keine Spur vorhanden war. Eine solche, durch Integralrechnung gefundene, Function wird demnach bestimmt werden, sobald man jener willkürlichen Constanten einen bestimmten Werth beylegt, welcher immer durch die Natur der Aufgabe, deren Auflösung auf jene Function führte, bestimmt wird.

Zusatz 1.

§. 32. Wenn daher eine Function y von x aus irgend einer gegebenen Relation der Differenzialien gesucht wird, so kann sie durch Einführung einer willkürlichen Constanten so bestimmt werden, daß für $x = a$, $y = b$ wird: hiedurch wird die Function selbst gegeben seyn, und es wird y für jeden Werth von x einen bestimmten Werth erhalten.

Zusatz 2.

§. 33. Wird eine Function y aus einer gegebenen Relation von Differenzialien des zweyten Grades gesucht, so führt sie immer zwey willkürliche Constanten mit sich, und läßt daher eine doppelte Auflösung zu, wodurch der Zweck erreicht werden kann, daß für $x = a$ nicht allein y einen gegebenen Werth b erhält, sondern auch das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ einer gegebenen Größe c gleich werde.

Zusatz 3.

§. 34. Die aus der Relation der Differenzialien entwickelte Function y zweyer Veränderlichen x und t wird ebenfalls eine willkürliche Constante enthalten, durch deren Bestimmung für $t = a$ eine bestimmte Gleichung zwischen y und x hervorgeht, oder eine Gleichung, die die Natur irgend einer gegebenen Curve ausdrückt.

Anmerkung.

§. 35. Jene Bestimmung der Integral-Functionen, oder jener Functionen, die durch Integralrechnung gefunden worden sind, läßt sich jedesmahl aus der Natur der vorgelegten Frage leicht ableiten, und bietet keine Schwierigkeit dar, wenn nicht etwa unnöthiger Weise die Auflösung auf Differenzialien geführt worden ist, da sie doch durch die gewöhnliche Analyse hätte bewerkstelliget werden können, in welchem Falle gerade wie in der Algebra gleichsam überflüssige Wurzeln in die Rechnung verwebt werden. Da aber diese Bestimmung nur in der Anwendung auf

sondere Fälle Statt findet, so werden wir hier, wo wir die Integra-
nsmethode im Allgemeinen behandeln, die Integralien in der größten
asdehnung zu entwickeln suchen; so daß die durch die Integration ein-
führten Constanten willkürlich bleiben, wenn uns nicht irgend eine
edingung zu deren Bestimmung nöthigt. Übrigens ist wohl jene Be-
immung der Functionen von x die einfachste, bey welcher dieselben für
$=0$ selbst verschwinden.

Erklärung 6.

§. 36. Ein Integrale wird vollständig (complett) genannt,
nn die gesuchte Function ohne Beschränkung mit einer willkürlichen
nstanten dargestellt wird. Ist aber diese Constante schon auf irgend
ie Weise bestimmt, so heißt das Integrale ein besonderes (particulares).

Zusatz 1.

§. 37. In jedem Falle gibt es also nur ein vollständiges Integral,
sondere Integralia aber können unendlich viele angegeben werden.
o ist $\frac{1}{2}x^2 + C$ das vollständige Integral der Differenzialformel $x\,dx$;
sondere Integralien hievon aber gibt es unendlich viele, als $\frac{1}{2}x^2$,
$x^2 + 1$, $\frac{1}{2}x^2 + 2$, rc.

Zusatz 2.

§. 38. Das vollständige Integral begreift alle besonderen Integra-
n in sich, und diese können alle aus jenem leicht abgeleitet werden.
ngekehrt aber wird aus den besonderen Integralien das vollständige
ht erkannt. Übrigens gibt es, wie wir später sehen werden, eine
ethode, in vielen Fällen aus dem besonderen Integral das vollstän-
e zu finden.

Anmerkung.

§. 39. Bisweilen kann man ein particulares Integral durch einige
rlegung in Voraus angeben oder errathen. Wird z. B. eine solche
nction y von x gesucht, für welche $dy + y^2dx = dx + x^2dy$ ist,
vird dieser Gleichung offenbar Genüge geleistet, wenn man $y = x$
mt; es ist dieß also ein besonderes Integral, weil es keine willkür-
e Constante enthält. Das vollständige Integral ist $y = \frac{1 + Cx}{C + x}$,
hes jenes besondere Integral in sich enthält, wenn man $C = \infty$ setzt.
n so findet man für $C = 0$ ein zweytes Integral $y = \frac{1}{x}$, welches
obigen Gleichung eben so gut Genüge leistet, wie das erstere $y = x$.

Erster Theil,

oder die Methode, aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des ersten Grades Functionen einer einzigen Veränderlichen zu bestimmen.

Erster Abschnitt.

Von der Integration der Differenzialformeln.

Kapitel I.

Von der Integration der rationalen Differenzialformeln.

Erklärung.

§. 40. Eine Differenzialformel heißt rational, wenn das Differenziale dx der Veränderlichen x, von welcher eine Function gesucht wird, mit einer rationalen Function von x multiplicirt ist; oder die Differenzialformel Xdx heißt rational, wenn X eine rationale Function von x bezeichnet.

Zusatz 1.

§. 41. In diesem Kapitel wird also eine solche Function y von x gesucht, für welche $\frac{dy}{dx}$ eine rationale Function von x bezeichnet, oder daß, wenn eine solche Function durch X bezeichnet wird, $\frac{dy}{dx} = X$ ist.

Zusatz 2.

§. 42. Es wird also hier eine solche Function von x gesucht, deren Differenziale $= Xdx$ ist; und demnach ist das Integrale dieser Differenzialformel, welches man durch $\int Xdx$ andeutet, die gesuchte Function.

Zusatz 3.

§. 43. Ist P eine solche Function von x, daß ihr Differenzial $dP = Xdx$ ist, so ist das vollständige Integral der gegebenen Formel Xdx offenbar $P + C$, weil die Größe $P + C$ eben diesen Ausdruck zum Differenzial hat.

Anmerkung 1.

§. 44. Im ersten Theile des ersten Buches wollen wir alle jene Probleme zusammenstellen, bey welchen aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des ersten Grades Functionen einer einzigen Veränderlichen x gesucht werden. Wird demnach die gesuchte Function $= y$ und $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, so ist, sobald irgend eine Gleichung zwischen den drey Größen x, y und p gegeben wird, die Natur der Function y, oder die Gleichung zwischen x und y ohne p auszumitteln. Stellt man aber diese Frage in solcher Allgemeinheit, so scheint sie von der Analysis mehr zu fordern, als diese je zu leisten vermag. Wir müssen uns also in der Auflösung einfacherer Fälle üben, und der erste ist der, in welchem $p =$ irgend einer Function von x, nämlich $= X$ ist, so daß $\frac{dy}{dx} = X$ oder $dy = Xdx$ ist, und demnach haben wir das Integrale $y = \int Xdx$ zu bestimmen, womit wir uns im ersten Abschnitte beschäftigen wollen. Übrigens ist auch dieser Fall wegen der Verschiedenheit der Function X sehr ausgedehnt, und bietet viele Schwierigkeiten dar, weßhalb wir in diesem Kapitel nur jene Fälle untersuchen wollen, in welchen jene Function X rational ist, dann aber werden wir zu den irrationalen, und endlich zu den transcendenten übergehen. Wir können daher dieses Hauptstück bequem in zwey Abschnitte theilen, in deren ersterem die Integration der einfachen Formeln, bey welchen $p = \frac{dy}{dx}$ nur eine Function von x bezeichnet, behandelt werden sollen. Im zweyten Abschnitte aber muß die Integrationsmethode gezeigt werden, wenn irgend eine Gleichung zwischen x, y und p gegeben ist. Mit den Gegenständen dieser beyden Abschnitte, und vorzüglich denen des ersteren, haben sich die Geometer am meisten beschäftigt, daher werden diese Untersuchungen den größten Theil des Werkes einnehmen.

Anmerkung 2.

§. 45. Die Differenzialrechnung gibt uns selbst die ersten Principien der Integration, so wie die Grundsätze der Division aus der

Multiplication, und die des Wurzelausziehens aus den Regeln für das Potenziren gewöhnlich genommen werden. Da also, wenn die zu differenzirende Größe aus mehreren Theilen besteht, wie z. B. die Größe $P + Q - R$, ihr Differenziale $= dP + dQ - dR$ ist, so wird auch umgekehrt, wenn die Differenzialformel aus mehreren Theilen besteht, wie $Pdx + Qdx - Rdx$, ihr Integrale $= \int Pdx + \int Qdx - \int Rdx$ seyn, nämlich das Integrale wird aus den einzelnen für sich zu integrirenden Theilen bestehen. Weil ferner $a dP$ das Differenzial von aP ist, so wird auch $a\int Pdx$ das Integral der Differenzialformel $aPdx$ seyn. Enthält nämlich die Differenzialformel einen constanten Factor, so muß mit diesem auch das Integral multiplicirt werden. Ist demnach $aPdx + bQdx + cRdx$ die Differenzialformel, bey welcher P, Q und R was immer für Functionen von x bezeichnen, so wird ihr Integrale $a\int Pdx + b\int Qdx + c\int Rdx$ seyn, so daß es nur darauf ankömmt, die einzelnen Formeln Pdx, Qdx, Rdx zu integriren. Sind diese Integrationen bewerkstelligt, so muß noch eine willkürliche Constante C hinzugefügt werden, um das vollständige Integral zu erhalten.

Aufgabe 1.

§. 46. **Eine Function von x zu finden, deren Differenziale $= ax^n dx$ ist, oder die Differenzialformel $ax^n dx$ zu integriren.**

Auflösung.

Da $mx^{m-1}dx$ das Differenzial der Potenz x^m ist, so wird umgekehrt $\int mx^{m-1}dx = m\int x^{m-1}dx = x^m$ seyn, mithin $\int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m}$; für $m - 1 = n$ oder $m = n + 1$ wird $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ und $a\int x^n dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$, daher wird $\frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$ das vollständige Integral der gegebenen Differenzialformel $ax^n dx$ seyn, welches man auch schon daran sieht, daß das Differenzial dieses Ausdruckes wirklich $= ax^n dx$ ist. Diese Integration findet immer Statt, was auch der Exponent n für eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, oder selbst irrationale Zahl bezeichnen mag.

Der einzige Fall wird hier ausgenommen, in welchem der Exponent $n = -1$ ist, oder wenn die Formel $\frac{adx}{x}$ zu integriren ist. Wir haben aber schon in der Differenzialrechnung gezeigt, daß, wenn lx den hyperbolischen Lo-

garithmus von x bezeichnet, $d.lx = \frac{dx}{x}$ sey; wir können also auch umgekehrt schließen, daß $\int \frac{dx}{x} = lx$ und $\int \frac{adx}{x} = alx$; fügen wir demnach noch eine willkürliche Constante hinzu, so ist das vollständige Integral der Formel $\frac{adx}{x}$ offenbar $= alx + C = l.x^a + C$, oder auch (für $C = lc$) $= l.cx^a$.

Zusatz 1.

§. 47. Das Integral der Differenzialformel $ax^n dx$ ist also immer algebraisch, den einzigen Fall ausgenommen, wo $n = -1$ ist, und das Integrale durch Logarithmen ausgedrückt wird, welche zu den transcendenten Functionen gehören. Es ist nämlich

$$\int \frac{adx}{x} = alx + C = lcx^a.$$

Zusatz 2.

§. 48. Wenn der Exponent n positive Zahlen bezeichnet, so müssen folgende Integrationen gut gemerkt werden, weil sie sehr häufig vorkommen:

$$\int a dx = ax + C; \int ax dx = \frac{ax^2}{2} + C; \int ax^2 dx = \frac{ax^3}{3} + C;$$

$$\int ax^3 dx = \frac{ax^4}{4} + C; \int ax^4 dx = \frac{ax^5}{5} + C; \int ax^5 dx = \frac{ax^6}{6} + C.$$

Zusatz 3.

§. 49. Wenn n eine negative Zahl bezeichnet, wird für $n = -m$

$$\int \frac{adx}{x^m} = \frac{a}{1-m} x^{1-m} + C = \frac{-a}{(m-1)x^{m-1}} + C;$$

man bemerke daher folgende einfacheren Fälle:

$$\int \frac{adx}{x^2} = \frac{-a}{x} + C; \int \frac{adx}{x^3} = \frac{-a}{2x^2} + C; \int \frac{adx}{x^4} = \frac{-a}{3x^3} + C;$$

$$\int \frac{adx}{x^5} = \frac{-a}{4x^4} + C; \int \frac{adx}{x^6} = \frac{-a}{5x^5} + C; \text{ic.}$$

Zusatz 4.

§. 50. Bezeichnet n auch gebrochene Werthe, so können die Integralien dennoch hier bestimmt werden. Sey erstens $n = \frac{m}{2}$, so wird

$$\int a dx \sqrt{x^m} = \frac{2a}{m+2} x \sqrt{x^m} + C;$$

demnach wird

$\int a dx \sqrt{x} = \frac{2}{3} a x \sqrt{x} + C$; $\int a x dx \sqrt{x} = \frac{2}{5} a x^2 \sqrt{x} + C$;
$\int a x^2 dx \sqrt{x} = \frac{2}{7} a x^3 \sqrt{x} + C$; $\int a x^3 dx \sqrt{x} = \frac{2}{9} a x^4 \sqrt{x} + C$; ꝛc.

Zusatz 5.

§. 51. Setzt man $n = -\frac{m}{2}$, so wird

$$\int \frac{a dx}{\sqrt{x^m}} = \frac{2a}{2-m} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^m}} + C = \frac{-2a}{(m-2)\sqrt{x^{m-2}}} + C;$$

eraus folgt

$$\int \frac{a dx}{\sqrt{x}} = 2a\sqrt{x} + C; \quad \int \frac{a dx}{x\sqrt{x}} = \frac{-2a}{\sqrt{x}} + C;$$

$$\int \frac{a dx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-2a}{3x\sqrt{x}} + C; \quad \int \frac{a dx}{x^3\sqrt{x}} = \frac{-2a}{5x^2\sqrt{x}} + C.$$

Zusatz 6.

§. 52. Setzen wir allgemein $n = \frac{\mu}{\nu}$, so wird

$\int a x^{\frac{\mu}{\nu}} dx = \frac{\nu a}{\mu+\nu} x^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} + C$, oder durch Wurzelgrößen

$$\int a dx \sqrt[\nu]{x^\mu} = \frac{\nu a}{\mu+\nu} \sqrt[\nu]{x^{\mu+\nu}} + C.$$

Setzt man aber $n = -\frac{\mu}{\nu}$, so wird:

$\int \frac{a dx}{x^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\nu a}{\nu-\mu} x^{\frac{\nu-\mu}{\nu}} + C$, oder durch Wurzelgrößen

$$\int \frac{a dx}{\sqrt[\nu]{x^\mu}} = \frac{\nu a}{\nu-\mu} \sqrt[\nu]{x^{\nu-\mu}} + C.$$

Anmerkung 1.

§. 53. Haben wir uns gleichwohl vorgenommen, in diesem Ka- el bloß rationale Functionen zu behandeln, so haben sich dennoch jene rationalitäten so von selbst dargebothen, daß sie gerade wie rationale ößen behandelt werden können. Übrigens können wir mit Hülfe der- ſen noch zusammengesetztere Ausdrücke integriren, wenn statt x Func- ten irgend einer andern Veränderlichen z gesetzt werden. Setzen wir 3. $x = f + gz$, so wird $dx = g dz$; und daher, wenn wir a mit

$\frac{a}{g}$ vertauschen, wird

$$\int a\,dz\,(f+gz)^n = \frac{a}{(n+1)g}(f+gz)^{n+1} + C,$$

und für den Fall, wo $n = -1$,

$$\int \frac{a\,dz}{f+gz} = \frac{a}{g}\,l(f+gz) + C.$$

Für $n = -m$ wird

$$\int \frac{a\,dz}{(f+gz)^m} = \frac{-a}{(m-1)g(f+gz)^{m-1}} + C.$$

Setzt man aber $n = \frac{\mu}{\nu}$, so erhält man

$$\int a\,dz\,(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu a}{(\nu+\mu)g}(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}+1} + C,$$

und für $n = -\frac{\mu}{\nu}$ wird

$$\int \frac{a\,dz}{(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\nu a(f+gz)}{(\nu-\mu)g(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} + C.$$

Anmerkung 2.

§. 54. Übrigens verdient hier eine vorzügliche Eigenschaft bemerkt zu werden. Da hier eine solche Function y gesucht wird, daß $dy = ax^n dx$ sey, so findet für $\frac{dy}{dx} = p$ die Relation $p = ax^n$ Statt, aus welcher die Function y ausgemittelt werden muß. Weil nun $y = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$, so wird wegen $ax^n = p$ auch $y = \frac{px}{n+1} + C$, und so haben wir den Fall, wo die Relation der Differenzialien durch eine Gleichung zwischen x, y und p gegeben ist, welcher, wie wir schon wußten, durch die Gleichung $y = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$ Genüge geleistet wird. Allein diese Gleichung ist in Beziehung auf die in der Gleichung $y = \frac{px}{n+1} + C$ ausgesprochene Relation nicht mehr das vollständige Integral, sondern nur ein besonderes, weil jenes Integral keine neue Constante enthält, welche in der Relation der Differenzialien nicht erscheint. Das vollständige Integrale aber ist $y = \frac{aD}{n+1}x^{n+1} + C$, welches eine neue Constante D enthält, denn hier wird $\frac{dy}{dx} = aD.x^n = p$, und daher

$y = \frac{px}{n+1} + C$. Gehört gleichwohl diese Bemerkung nicht hierher, so wird sie dennoch nicht ohne Nutzen seyn.

Aufgabe 2.

§. 55. Eine Function von x zu finden, deren Differenziale $= X dx$, wobei X irgend eine ganze rationale Function von x bezeichnet, oder das Integrale $\int X dx$ zu bestimmen.

Auflösung.

Da X eine ganze rationale Function von x bezeichnet, so ist sie nothwendig enthalten in der Form:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.},$$

daher ist nach der vorhergehenden Aufgabe das gesuchte Integrale

$$\int X dx = C + \alpha x + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \tfrac{1}{3}\gamma x^3 + \tfrac{1}{4}\delta x^4 + \tfrac{1}{5}\varepsilon x^5 + \tfrac{1}{6}\zeta x^6 + \text{etc.};$$

und wenn allgemein $X = \alpha x^\lambda + \beta x^\mu + \gamma x^\nu + \text{etc.}$, so wird

$$\int X dx = C + \frac{\alpha}{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \frac{\beta}{\mu+1} x^{\mu+1} + \frac{\gamma}{\nu+1} x^{\nu+1} + \text{etc.},$$

wo die Exponenten $\lambda, \mu, \nu \ldots$ etc. auch negative und gebrochene Zahlen bedeuten können, wenn man nur bemerkt, daß für $\lambda = -1$, $\int \frac{\alpha dx}{x} = \alpha l(x)$ ist, welcher Fall allein zur Ordnung der transcendenten Größen gehört.

Aufgabe 3.

§. 56. Eine Methode zu bestimmen, nach welcher das Integral von $X dx$ gefunden werden kann, wenn X irgend eine rationale gebrochene Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Sey also $X = \frac{M}{N}$, wobei M und N ganze Functionen von x bezeichnen, so hat man zuerst darauf zu sehen, ob die höchste Potenz von x im Zähler M eben so groß oder größer sey als im Nenner N. In diesem Falle ziehe man aus dem Bruche $\frac{M}{N}$ durch wirkliche Division die Ganzen heraus, so wird, weil die Integration dieser Theile keine Schwierigkeit hat, alles darauf ankommen, einen solchen Bruch $\frac{M}{N}$ zu

betrachten, in dessen Zähler M die höchste Potenz von x kleiner ist als im Nenner N.

Hierauf suche man alle Factoren des Nenners N, sowohl die reellen einfachen, als auch reellen quadratischen, welche nämlich die Stelle zweyer einfacher imaginärer Factoren vertreten, und sehe zugleich darauf, ob alle diese Factoren ungleich sind oder nicht? Denn sind die Factoren gleich, so muß die Auflösung des Bruches $\frac{M}{N}$ in einfache Brüche auf eine andere Weise bewerkstelliget werden, wenn nämlich aus den einzelnen Factoren die Partialbrüche entstehen, deren algebraische Summe dem vorgelegten Bruche $\frac{M}{N}$ gleich ist. Es entsteht nämlich aus dem einfachen Factor $a + bx$ der Bruch $\frac{A}{a + bx}$; sind zwey Factoren einander gleich, oder enthält N den Factor $(a + bx)^2$, so entstehen daraus die Brüche $\frac{A}{(a + bx)^2} + \frac{B}{a + bx}$; aus dem Factor $(a + bx)^3$ werden die drey Brüche

$$\frac{A}{(a + bx)^3} + \frac{B}{(a + bx)^2} + \frac{C}{a + bx} \text{ erhalten, u. s. w.}$$

Der doppelte (quadratische) Factor aber, von der Form

$$a^2 - 2abx \cos. \zeta + b^2x^2,$$

wenn ihm kein anderer gleich ist, gibt den Partialbruch

$$\frac{A + Bx}{a^2 - 2abx \cos. \zeta + b^2x^2}.$$

Wenn aber der Nenner N zwey solche gleiche Factoren enthält, so entstehen daraus die beyden Partialbrüche

$$\frac{A + Bx}{(a^2 - 2abx \cos. \zeta + b^2x^2)^2} + \frac{C + Dx}{a^2 - 2abx \cos. \zeta + b^2x^2};$$

ist aber $(a^2 - 2abx \cos. \zeta + b^2x^2)^3$ ein Factor des Nenners N, so entstehen aus ihm folgende drey Partialbrüche:

$$\frac{A + Bx}{(a^2 - 2abx \cos.\zeta + b^2x^2)^3} + \frac{C + Dx}{(a^2 - 2abx \cos.\zeta + b^2x^2)^2} + \frac{E + Fx}{a^2 - 2abx \cos.\zeta + b^2x^2}$$

Wenn auf diese Weise der Bruch $\frac{M}{N}$ in alle seine einfachen Brüche aufgelöst ist, so müssen sie sämmtlich in einer der beyden Formen

$$\frac{A}{(a + bx)^n} \text{ oder } \frac{A + Bx}{(a^2 - 2abx \cos. \zeta + b^2x^2)^n} \text{ enthalten seyn.}$$

Multiplicirt man nun jeden einzelnen dieser Brüche durch dx,

und verrichtet die Integration, so ist das Aggregat aller dieser Integrale der Werth der gesuchten Function $\int X\,dx = \int \frac{M}{N}\,dx$.

Zusatz 1.

§. 57. Die Integration aller Ausdrücke von der Form $\frac{M\,dx}{N}$ hängt demnach ab von der Integration folgender zwey Formeln

$$\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^n} \text{ und } \int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)^n},$$

wenn für n nach und nach die Werthe 1, 2, 3 . . . ꝛc. geschrieben werden.

Zusatz 2.

§. 58. Das Integrale des ersten Ausdruckes ist schon oben (§. 53.) angegeben worden. Man erhält aus demselben

$$\int \frac{A\,dx}{a + bx} = \frac{A}{b}\,l\,(a + bx) + C,$$

$$\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^2} = \frac{-A}{b\,(a + bx)} + C,$$

$$\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^3} = \frac{-A}{2b\,(a + bx)^2} + C, \text{ und allgemein}$$

$$\int \frac{A\,dx}{(a + bx)^n} = \frac{-A}{(n-1)\,b\,(a + bx)^{n-1}} + C.$$

Zusatz 3.

§. 59. Um also das vorgelegte Problem vollständig zu lösen, haben wir nur noch die Integration der Formel

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)^n}$$

zu lehren, und zwar zuerst für $n = 1$, $n = 2$, . . . ꝛc.

Anmerkung 1.

§. 60. Wenn wir die imaginären Größen nicht vermeiden wollten, so wäre die ganze Auflösung schon in dem bereits Gelehrten enthalten; denn ist der Nenner N in alle seine einfache reellen oder imaginären Factoren aufgelöst, so könnte der gegebene Bruch in Partialbrüche von der Form $\frac{A}{a + bx}$ oder $\frac{A}{(a + bx)^n}$ zerlegt werden, und da wir deren Integration schon kennen, so ist dann auch das Integral des ganzen Ausdruckes $\frac{M}{N}\,dx$ bekannt. Dann aber würde es allerdings schwierig seyn, je zwey imaginäre Theile so zu verbinden, daß ein re-

eller Ausdruck zum Vorschein käme, was doch die Natur der Sache absolut erfordert.

Anmerkung 2.

§. 61. Wir setzen hier auch die Möglichkeit der Auflösung einer jeden ganzen Function in Factoren voraus, obgleich die Algebra keineswegs noch so weit vorgeschritten ist, daß diese Auflösung wirklich immer bewerkstelligt werden könnte. Es wird aber in der Analysis durchaus die Forderung gestellt, bey dem weiteren Fortschreiten alles Vorhergehende als bekannt anzunehmen, wenn auch die bereits angestellten Untersuchungen nicht ganz genügen sollten. Es genügt uns nämlich hier die Möglichkeit, alle Factoren durch Näherungsmethoden so genau als man will, darzustellen. Wenn wir in der Integralrechnung weiter werden vorgerückt seyn, werden wir auf ähnliche Art die Integralien aller Ausdrücke von der Form $X dx$, was X auch immer für eine Function von x bezeichnen mag, als bekannt ansehen, und wir werden schon sehr viel geleistet haben, wenn wir die verwickelteren Integralien auf jene Formen zurückführen können. Dieß hat auch für den practischen Gebrauch gar keinen Nachtheil, da wir die Werthe der Ausdrücke von der Form $\int X dx$ so genau als man will, angeben können, wie wir in der Folge sehen werden. Übrigens sind diese Integrationen durch die Auflösung des Nenners N in seine einfachen Factoren absolut bedingt, besonders weil diese einzelnen Factoren in den Ausdruck des Integrals verwebt sind. Es gibt nur sehr wenige Fälle, die gerade am häufigsten vorkommen, bey welchen wir jene Auflösung entbehren können; wäre z. B. die Formel $\frac{x^{n-1} dx}{1 + x^n}$ gegeben, so sieht man sogleich, daß sie für $x^n = v$ in $\frac{dv}{n(1+v)}$ übergeht, dessen Integrale $\frac{1}{n} l(1+v) = \frac{1}{n} l(1+x^n)$ ist, hiebey war also die Auflösung in Factoren nicht nöthig; allein diese Fälle sind für sich so klar, daß ihre Behandlung keiner eigenen Erklärung bedarf.

Aufgabe 4.

§. 62. Das Integral $y = \int \frac{(A + Bx)\, dx}{a^2 - 2abx \cos \zeta + b^2 x^2}$ zu bestimmen.

Auflösung.

Da der Zähler aus zwey Theilen $A dx + B x dx$ besteht, so kann der letztere $B x dx$ auf folgende Weise weggeschafft werden.

Weil

$$l(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2) = \int \frac{-2abdx\cos.\zeta + 2b^2xdx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2},$$

so multiplicire man diese Gleichung durch $\frac{B}{2b^2}$, und ziehe das Product von der gegebenen Gleichung ab, denn man erhält dann

$$\int \frac{(A+Bx)dx}{a^2-2abx\cos.\zeta+b^2x^2} - \frac{B}{2b^2}l(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2) = \int \frac{\left(A + \frac{Ba\cos.\zeta}{b}\right)dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2},$$

so daß man nur noch diese Formel zu integriren hat. Setzt man Kürze halber $A + \frac{Ba\cos.\zeta}{b} = C$, so geht diese Formel über in $\int \frac{Cdx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2}$, welche auch so dargestellt werden kann $\int \frac{Cdx}{a^2\sin.^2\zeta + (bx - a\cos.\zeta)^2}$. Man setze nun $bx - a\cos.\zeta = av\sin.\zeta$, und demnach $dx = \frac{adv\sin.\zeta}{b}$, so verwandelt sich unsere Formel in

$$\int \frac{Cadv\sin.\zeta}{b\,.\,a^2\sin.^2\zeta(1+v^2)} = \frac{C}{ab\sin.\zeta}\int \frac{dv}{1+v^2}.$$

Nun wissen wir aber aus der Differenzialrechnung, daß

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \text{arc. tg. } v = \text{arc. tg. } \frac{bx - a\cos.\zeta}{a\sin.\zeta},$$

und daher wird, weil $C = \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{b}$, unser Integrale

$$\frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{ab^2\sin.\zeta}\text{arc. tang. }\frac{bx - a\cos.\zeta}{a\sin.\zeta},$$ folglich ist

$$\int \frac{(A+Bx)dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2} =$$

$$= \frac{B}{2b^2}l(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2) + \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{ab^2\sin.\zeta}\text{arc. tg. }\frac{bx - a\cos.\zeta}{a\sin.\zeta}$$

wozu noch eine willkürliche Constante C gesetzt werden muß, um das Integrale vollständig zu machen.

Zusatz 1.

§. 63. Addiren wir zu arc. tang. $\frac{bx - a\cos.\zeta}{a\sin.\zeta}$ den Ausdruck arc. tang. $\frac{\cos.\zeta}{\sin.\zeta}$, welchen wir uns als in der Constante enthalten denken, so erhalten wir arc. tang. $\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta}$, und so wird

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2} =$$

$$= \frac{B}{2b^2}\, l(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2) + \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{ab^2\sin.\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta} +$$

Zusatz 2.

§. 64. Soll dieses Integrale für $x = o$ verschwinden, so [muß] $C = \frac{-B}{2b^2}\, l a^2$ gesetzt werden, und dann wird

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2} =$$

$$= \frac{B}{b^2}\, l\, \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)} + \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{ab^2\sin.\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta}$$

Dieses Integrale hängt also zum Theil von Logarithmen, zum Theil von Kreisbogen oder Winkeln ab.

Zusatz 3.

§. 65. Für $B = o$ verschwindet der vom Logarithmus abhängende Theil, und man erhält:

$$\int \frac{A\,dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2} = \frac{A}{ab\sin.\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta} + C,$$

welches Integrale durch einen Winkel allein bestimmt wird.

Zusatz 4.

§. 66. Bezeichnet ζ einen rechten Winkel, und ist demnach $\cos.\zeta = o$ und $\sin.\zeta = 1$, so wird

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{B}{b^2}\, l\, \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 + b^2x^2)} + \frac{A}{ab}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx}{a} + \text{Const.}$$

Für $\zeta = 60^\circ$, also $\cos.\zeta = \frac{1}{2}$ und $\sin.\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, wird

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a^2 - abx + b^2x^2} =$$

$$= \frac{B}{b^2}\, l\, \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - abx + b^2x^2)} + \frac{2Ab + Ba}{ab^2\sqrt{3}}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sqrt{3}}{2a - bx}.$$

Endlich für $\zeta = 120^\circ$, also $\cos.\zeta = -\frac{1}{2}$ und $\sin.\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, wird

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a^2 + abx + b^2x^2} =$$

$$= \frac{B}{b^2}\, l\,.\, \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 + abx + b^2x^2)} + \frac{2Ab - Ba}{ab^2\sqrt{3}}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sqrt{3}}{2a + bx}.$$

Anmerkung 1.

§. 67. Es ist hier allerdings bemerkenswerth, daß für $\zeta = 0$, urch der Nenner in das Quadrat $a^2 - 2abx + b^2x^2$ übergeht, dem Integrale der Winkel ganz verschwindet. Denn nimmt man Winkel ζ unendlich klein, so wird $\cos.\zeta = 1$ und $\sin.\zeta = \zeta$; er verwandelt sich der logarithmische Theil in $\frac{B}{b^2}\,l.\frac{a-bx}{a}$, und andere Theil in $\frac{Ab+Ba}{ab^2\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\zeta}{a-bx} = \frac{(Ab+Ba)x}{ab(a-bx)}$, weil Tangente des unendlich kleinen Bogens $\frac{bx\zeta}{a-bx}$ dem Bogen selbst ich ist; es wird demnach dieser Theil algebraisch. Hieraus folgt:

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a-bx)^2} = \frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a-bx}{a} + \frac{(Ab+Ba)\,x}{ab\,(a-bx)} + \text{Const.}$$

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes erhellt aus dem Vorhergehen, denn es ist $\frac{A+Bx}{(a-bx)^2} = \frac{-B}{b\,(a-bx)} + \frac{Ab+Ba}{b\,(a-bx)^2}$. Nun ist aber

$$\int\frac{-B\,dx}{b\,(a-bx)} = \frac{B}{b^2}\,l\,(a-bx) - \frac{B}{b^2}\,l\,a = \frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a-bx}{a}$$ und

$$\int\frac{(Ab+Ba)\,dx}{b\,(a-bx)^2} = \frac{Ab+Ba}{b^2\,(a-bx)} - \frac{(Ab+Ba)}{ab^2} = \frac{(Ab+Ba)\,x}{ab\,(a-bx)},$$

nn nämlich beyde Integrationen so verrichtet werden, daß die Intellien für $x = 0$ verschwinden.

Anmerkung 2.

§. 68. Wenn in der gebrochenen Differenzialformel $\frac{M\,dx}{N}$ im hler M die höchste Potenz von x um einen Grad niedriger ist, als im nner N, so kann dieses Glied durch dieselbe oben eingehaltene Mede weggebracht werden. Denn es sey

$$= Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.},$$

$$= \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{ꝛc.},$$ und man setze $\frac{M}{N}\,dx = dy$.

Da nun

$$l = n\alpha x^{n-1}.dx + (n-1)\beta x^{n-2}.dx + (n-2)\gamma x^{n-3}.dx + \text{ꝛc.},$$

ist

$$\frac{N}{N} = \frac{dx}{N}\left(Ax^{n-1} + \frac{(n-1)A\beta}{n\alpha}x^{n-2} + \frac{(n-2)A\gamma}{n\alpha}x^{n-3} + \dots\right),$$

d daher durch Subtraction

$$dy - \frac{A dN}{N \alpha n} = \frac{dx}{N}\left[\left(B - \frac{(n-1)A\beta}{n\alpha}\right)x^{n-2} + \left(C - \frac{(n-2)A\gamma}{n\alpha}\right)x^{n-3} + \ldots\right.$$

wird nun der Kürze wegen

$$B - \frac{(n-1)\,A\beta}{n\alpha} = \mathfrak{B};\; C - \frac{(n-2)\,A\gamma}{n\alpha} = \mathfrak{C};\; D - \frac{(n-3)\,A\delta}{n\alpha} = \mathfrak{D};$$

gesetzt, so erhält man

$$y = \frac{A}{n\alpha}\,l\,N + \int \frac{dx\,(\mathfrak{B}\,x^{n-2} + \mathfrak{C}\,x^{n-3} + \mathfrak{D}\,x^{n-4} + \text{rc.})}{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{rc.}} = \int \frac{M\ldots}{N}$$

Auf diese Weise lassen sich demnach alle gebrochenen Differen[tial]formeln so reduciren, daß die höchste Potenz von x im Zähler um zw[ei] oder mehrere Grade niedriger wird, als im Nenner.

Aufgabe 5.

§. 69. **Die Integralformel** $\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)^{n+1}}$ **auf einen ähnlichen Ausdruck zurück zu führen, in we[l]chem die höchste Potenz im Nenner um einen Gr[ad] niedriger ist.**

Auflösung.

Man setze der Kürze wegen $a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2 = X$ un[d] $\int \frac{(A + Bx)\,dx}{X^{n+1}} = y$. Weil $dX = -2ab\,dx\cos.\zeta + 2b^2x\,dx$ ist, so wird $d\,.\,\frac{C + Dx}{X^n} = \frac{-n(C + Dx)\,dX}{X^{n+1}} + \frac{D\,dx}{X^n}$, und demnach

$$\frac{C + Dx}{X^n} = \int \frac{2nb\,(C + Dx)\,(a\cos.\zeta - bx)\,dx}{X^{n+1}} + \int \frac{D\,dx}{X^n};$$

wir erhalten also $\quad y + \frac{C + Dx}{X^n} =$

$$= \int \frac{dx\,[A + 2nCab\cos.\zeta + x(B + 2nDab\cos.\zeta - 2nCb^2) - 2nDb^2x^2]}{X^{n+1}}$$

$$+ \int \frac{D\,dx}{X^n}.$$

Nun bestimme man in der vorhergehenden Formel C und D so, daß der Zähler durch X theilbar werde; zu diesem Zwecke setze man denselben $= -2nDX\,dx$, so wird

$A + 2nCab\cos.\zeta = -2nDa^2$ und

$B + 2nDab\cos.\zeta - 2nCb^2 = 4nDab\cos.\zeta$, oder

$B - 2nCb^2 = 2nDab\cos.\zeta$, und daher

$$2nDa = \frac{B - 2nCb^2}{b\cos.\zeta};$$ aber nach der erstern Bedin-

gung ist $2nDa = \frac{-A - 2nCab\cos.\zeta}{a}$, durch deren Gleichstellung $Ba + Ab\cos.\zeta - 2nCab^2\sin.^2\zeta = 0$ oder $C = \frac{Ba + Ab\cos.\zeta}{2nab^2\sin.^2\zeta}$ erhalten wird. Es ist also

$$B - 2nCb^2 = \frac{Ba\sin.^2\zeta - Ba - Ab\cos.\zeta}{a\sin.^2\zeta} = \frac{-Ab\cos.\zeta - Ba\cos.^2\zeta}{a\sin.^2\zeta},$$

so daß $D = -\frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{2na^2b\sin.^2\zeta}$ gefunden wird. Setzt man demnach $C = \frac{Ba + Ab\cos.\zeta}{2nab^2\sin.^2\zeta}$ und $D = \frac{-Ab - Ba\cos.\zeta}{2na^2b\sin.^2\zeta}$, so wird

$$y + \frac{C + Dx}{X^n} = \int\frac{-2nDdx}{X^n} + \int\frac{Ddx}{X^n} = -(2n-1)D\int\frac{dx}{X^n}$$

und daher $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}} = \frac{-C-Dx}{X^n} - (2n-1)D\int\frac{dx}{X^n}$ oder

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}} = \frac{-Ba^2 - Aab\cos.\zeta + (Ab^2 + Bab\cos.\zeta)x}{2na^2b^2\sin.^2\zeta\,X^n} +$$

$$+ \frac{(2n-1)(Ab + Ba\cos.\zeta)}{2na^2b\sin.^2\zeta}\int\frac{dx}{X^n}.$$

Ist demnach $\int\frac{dx}{X^n}$ bekannt, so kann man auch das Integrale $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}}$ angeben.

Zusatz 1.

§. 70. Bleibt also $X = a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2$, mithin $\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{ab\sin.\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta} + \text{Const.}$, so erhält man

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^2} = \frac{-Ba^2 - Aab\cos.\zeta + (Ab^2 + Bab\cos.\zeta)x}{2a^2b^2\sin.^2\zeta\,.\,X} +$$

$$+ \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{2a^3b^2\sin.^3\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta} + \text{Const.},$$

und daher wird für $B = 0$ und $A = 1$

$$\int\frac{dx}{X^2} = \frac{-a\cos.\zeta + bx}{2a^2b\sin.^2\zeta\,.\,X} + \frac{1}{2a^3b\sin.^3\zeta}\,\text{arc. tg.}\,\frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta} + \text{Const.}$$

Das Integrale $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^2}$ enthält demnach keine Logarithmen.

Zusatz 2.

§. 71. Da nun

$$\int\frac{dx}{X^3} = \frac{-a\cos.\zeta + bx}{4a^2b\sin.^2\zeta\,.\,X^2} + \frac{3}{4a^2\sin.^2\zeta}\int\frac{dx}{X^2} + \text{Const.},$$

so erhält man durch Substitution des obigen Werthes

$$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{-a\cos.\zeta + bx}{4a^2 b \sin.^2\zeta . X^2} + \frac{3(-a\cos.\zeta + bx)}{2.4.a^4 b \sin.^4\zeta . X} + \frac{1.3}{2.4.a^5 b \sin.^5\zeta} \text{arc. tg.} \frac{bx \sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta}$$

Hieraus folgert man ferner:

$$\int \frac{dx}{X^4} = \frac{-a\cos.\zeta + bx}{6a^2 b \sin.^2\zeta . X^3} + \frac{5(-a\cos.\zeta + bx)}{4.6.a^4 b . \sin.^4\zeta . X^2} + \frac{3.5(-a\cos.\zeta + bx)}{2.4.6.a^6 b \sin.^6\zeta . X} + \frac{1.3.5}{2.4.6.a^7 b \sin.^7\zeta} \text{arc. tg.} \frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta}$$

Zusatz 3.

§. 72. Geht man so weiter fort, so erhält man die Integrale aller Formeln von der Form $\int \frac{dx}{X}$, $\int \frac{dx}{X^2}$, $\int \frac{dx}{X^3}$, rc., deren erstes bloß durch einen Kreisbogen ausgedrückt ist; die übrigen aber enthalten überdieß noch algebraische Theile.

Anmerkung.

§. 73. Allein es ist hinreichend, das Integrale $\int \frac{dx}{X^{n+1}}$ zu kennen, weil die Formel $\int \frac{(A + Bx)\,dx}{X^{n+1}}$ sich leicht darauf zurückführen läßt; denn diese Formel läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{1}{2b^2}\int \frac{2Ab^2 dx + 2Bb^2 x dx - 2Babdx\cos.\zeta + 2Babdx\cos.\zeta}{X^{n+1}},$$

welche Formel wegen $2b^2 x dx - 2abdx\cos.\zeta = d.X$ übergeht in

$$\frac{1}{2b^2}\int \frac{BdX}{X^{n+1}} + \frac{1}{b}\int \frac{(Ab + Ba\cos.\zeta)\,dx}{X^{n+1}};$$

aber weil $\int \frac{dX}{X^{n+1}} = -\frac{1}{nX^n}$, so wird

$$\int \frac{(A + bx)\,dx}{X^{n+1}} = \frac{-B}{2nb^2 X^n} + \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{b}\int \frac{dx}{X^{n+1}},$$

welcher Ausdruck nur von $\int \frac{dx}{X^{n+1}}$ abhängt, und dieses haben wir eben entwickelt.

Dieß sind alle Hülfsformeln, welche wir zur Integration eines jeden gebrochenen Ausdruckes von der Form $\frac{M}{N}dx$ brauchen, so lange nur M und N ganze Functionen von x sind. Wir können also im Allge-

meinen alle Ausdrücke von der Form $\int V dx$, wobey V was immer für eine rationale Function von x bezeichnet, integriren, und man kann hierbey bemerken, daß alle diese Integrale, wenn sie nicht algebraisch sind, immer durch Logarithmen oder Winkel dargestellt werden.

Wir haben also nur noch diese Methode durch einige Beyspiele zu erläutern.

Beyspiel 1.

§. 74. Das Integrale der Differenzialformel $\frac{(A + Bx)dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ zu bestimmen.

Weil die Veränderliche x im Zähler weniger Dimensionen hat, als im Nenner, so enthält dieser Bruch keine Ganzen; man untersuche demnach, ob der Nenner zwey einfache reelle Factoren enthält, oder nicht? und im ersten Falle, ob die beyden Factoren einander gleich sind? Wir haben demnach drey Fälle zu betrachten.

I. Der Nenner soll zwey gleiche Factoren enthalten, und sey gleich $(a + bx)^2$; löst man den Bruch $\frac{A + Bx}{(a + bx)^2}$ in die zwey Partialbrüche $\frac{Ab - Ba}{b(a + bx)^2} + \frac{B}{b(a + bx)}$ auf, so erhält man:

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a + bx)^2} = \frac{Ba - Ab}{b^2.(a + bx)} + \frac{B}{b^2} l(a + bx) + \text{Const.}$$

Bestimmt man aber das Integrale so, daß es für $x = 0$ verschwindet, so findet man

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a + bx)^2} = \frac{(Ab - Ba)x}{ab(a + bx)} + \frac{B}{b^2} l \frac{a + bx}{a}.$$

II. Die beyden Factoren des Nenners seyen ungleich, es sey nämlich die gegebene Formel $\frac{A + Bx}{(a + bx)(f + gx)} dx$, welche sich in die zwey Partialbrüche $\frac{Ab - Ba}{bf - ag} \cdot \frac{dx}{a + bx} + \frac{Ag - Bf}{ag - bf} \cdot \frac{dx}{f + gx}$ zerlegen läßt. Daher wird das gesuchte Integrale

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a + bx)(f + gx)} =$$

$$= \frac{Ab - Ba}{b(bf - ag)} l \left(\frac{a + bx}{a}\right) + \frac{Ag - Bf}{g(ag - bf)} l \frac{f + gx}{f}.$$

Man setze $\frac{Ab - Ba}{b(bf - ag)} = m + n$ und $\frac{Bf - Ag}{g(bf - ag)} = m - n$, damit das Integrale gleich $m\, l \frac{(a + bx)(f + gx)}{af} + n\, l \frac{f(a + bx)}{a(f + gx)}$

werde, so ist

$$2m = \frac{B(bf-ag)}{bg(bf-ag)} = \frac{B}{bg} \text{ und } 2n = \frac{2Abg - Bag - Bbf}{bg(bf-ag)};$$

folglich $\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx)(f+gx)} =$

$$= \frac{B}{2bg} l \frac{(a+bx)(f+gx)}{af} + \frac{2Abg - B(ag+bf)}{2bg(bf-ag)} l \frac{f(a+bx)}{a(f+gx)}.$$

III. Es seyen die einfachen Factoren des Nenners beyde imaginär, in welchem Falle der Nenner von der Form $a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2$ seyn wird, welcher Fall schon oben behandelt wurde; es ist nämlich

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2} =$$

$$= \frac{B}{b^2} l \frac{\surd[a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2]}{a} + \frac{Ab + Ba\cos.\zeta}{ab^2\sin.\zeta} \text{arc. tg.} \frac{bx\sin.\zeta}{a - bx\cos.\zeta}.$$

Zusatz 1.

§. 75. Setzt man im zweyten Falle $f = a$ und $g = -b$, so wird

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{-B}{2b^2} l \frac{a^2 - b^2x^2}{a^2} + \frac{A}{2ab} l \frac{a+bx}{a-bx},$$

hieraus folgt also

$$\int \frac{A\,dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{A}{2ab} l \frac{a+bx}{a-bx} + C \text{ und}$$

$$\int \frac{Bx\,dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{-B}{2b^2} l \left(\frac{a^2 - b^2x^2}{a^2}\right) = \frac{B}{b^2} l \frac{a}{\surd[a^2 - b^2x^2]} + C.$$

Zusatz 2.

§. 76. Setzen wir im dritten Falle $\cos.\zeta = 0$, so erhalten wi[r]

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{B}{b^2} l \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{A}{ab} \text{arc. tg.} \frac{bx}{a} + C,$$

und hieraus erhalten wir insbesondere

$$\int \frac{A\,dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{A}{ab} \text{arc. tg.} \frac{bx}{a} + C \text{ und}$$

$$\int \frac{Bx\,dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{B}{b^2} l \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2x^2} + C.$$

Beyspiel 2.

§. 77. Die Differenzialformel $\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ zu integr[i]ren, wenn der Exponent $m-1$ kleiner ist als n.

Im letzten Kapitel der Institut. Calculi Differential. haben w[ir]

gefunden, daß die einfachen Brüche, in welche sich der Bruch $\frac{x^m}{1+x^n}$ zerlegen läßt, wenn π als das Maß zweyer rechten Winkel angesehen wird, enthalten seyen in folgender allgemeinen Formel:

$$\frac{2\sin.\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin.\frac{m(2k-1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{m(2k-1)\pi}{n}\left(x - \cos.\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{n\left(1 - 2x\cos.\frac{(2k-1)\pi}{n} + x^2\right)},$$

wo für k nach und nach alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, ꝛc. gesetzt werden können, bis $2k-1$ größer als n wird. Multipliciren wir diesen Ausdruck mit dx, und vergleichen wir ihn mit unserer allgemeinen Formel $\frac{(A+Bx)dx}{a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2}$, so wird $a = 1$, $b = 1$, $\zeta = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ und

$$A = \frac{2}{n}\sin.\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin.\frac{m(2k-1)\pi}{n} + \frac{2}{n}\cos.\frac{(2k-1)\pi}{n}\cos.\frac{m(2k-1)\pi}{n},$$

oder $A = \frac{2}{n}\cos.\frac{(m-1)(2k-1)\pi}{n}$ und $B = -\frac{2}{n}\cos.\frac{m(2k-1)\pi}{n}$; daher wird

$$Ab + Ba\cos.\zeta = \frac{2}{n}\sin.\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin.\frac{m(2k-1)\pi}{n},$$

und das Integrale dieses Theiles wird seyn

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{m(2k-1)\pi}{n}\,l\sqrt{\left(1 - 2x\cos.\frac{(2k-1)\pi}{n} + x^2\right)}$$

$$+\frac{2}{n}\sin.\frac{m(2k-1)\pi}{n}\,\text{arc. tg.}\frac{x\sin.\frac{(2k-1)\pi}{n}}{1 - x\cos.\frac{(2k-1)\pi}{n}}.$$

Bezeichnet n eine ungerade Zahl, so kömmt noch der Bruch $\frac{\pm dx}{n(1+x)}$ hinzu, dessen Integrale $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$ ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Das gesuchte Integrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ läßt sich demnach auf folgende Weise darstellen:

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{m\pi}{n}\,l\sqrt{(1 - 2x\cos.\frac{\pi}{n} + x^2)} + \frac{2}{n}\sin.\frac{m\pi}{n}\,\text{arc. tg.}\frac{x\sin.\frac{\pi}{n}}{1 - x\cos.\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{3m\pi}{n}\,l\sqrt{(1 - 2x\cos.\frac{3\pi}{n} + x^2)} + \frac{2}{n}\sin.\frac{3m\pi}{n}\,\text{arc. tg.}\frac{x\sin.\frac{3\pi}{n}}{1 - x\cos.\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{5m\pi}{n}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{5\pi}{n}+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\frac{5m\pi}{n}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{5\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{7m\pi}{n}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{7\pi}{n}+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\frac{7m\pi}{n}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{7\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{7\pi}{n}}$$

ꝛc. ꝛc.

welcher Ausdruck nach den ungeraden Zahlen, die kleiner als n sind, fortschreitet. Auf diese Weise wird das ganze Integrale erhalten, wenn n eine gerade Zahl ist; ist aber n eine ungerade Zahl, so kommt noch der Theil $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$ hinzu, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Wäre also $m=1$, so müßte noch der Theil $\frac{1}{n}l(1+x)$ zugesetzt werden.

Zusatz 1.

§. 78. Setzen wir $m=1$, um den Ausdruck $\int\frac{dx}{1+x^n}$ zu erhalten, so wird für die verschiedenen Werthe von n:

I. $\int\frac{dx}{1+x}=l(1+x)$

II. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc.tg.}x$

III. $\int\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{2}{3}\cos.\frac{\pi}{3}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{\pi}{3}+x^2)}$

$$+\frac{2}{3}\sin.\frac{\pi}{3}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1-x\cos.\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{3}l(1+x)$$

IV. $\int\frac{dx}{1+x^4}=$

$$=\begin{cases}-\frac{2}{4}\cos.\frac{\pi}{4}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{\pi}{4}+x^2)}+\frac{2}{4}\sin.\frac{\pi}{4}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{\pi}{4}}{1-x\cos.\frac{\pi}{4}}\\[2ex]-\frac{2}{4}\cos.\frac{3\pi}{4}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{3\pi}{4}+x^2)}+\frac{2}{4}\sin.\frac{3\pi}{4}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{3\pi}{4}}{1-x\cos.\frac{3\pi}{4}}\end{cases}$$

$$\text{V.} \int \frac{dx}{1+x^5} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{5}\cos.\frac{\pi}{5}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{\pi}{5}+x^2)} + \frac{2}{5}\sin.\frac{\pi}{5}\,\text{arc.tg.}\dfrac{x\sin.\frac{\pi}{5}}{1-x\cos.\frac{\pi}{5}} \\ -\frac{2}{5}\cos.\frac{3\pi}{5}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{3\pi}{5}+x^2)} + \frac{2}{5}\sin.\frac{3\pi}{5}\,\text{arc.tg.}\dfrac{x\sin.\frac{3\pi}{5}}{1-x\cos.\frac{3\pi}{5}} \\ +\frac{1}{5}\, l(1+x) \end{cases}$$

$$\text{VI.} \int \frac{dx}{1+x^6} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{6}\cos.\frac{\pi}{6}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{\pi}{6}+x^2)} + \frac{2}{6}\sin.\frac{\pi}{6}\,\text{arc.tg.}\dfrac{x\sin.\frac{\pi}{6}}{1-x\cos.\frac{\pi}{6}} \\ -\frac{2}{6}\cos.\frac{3\pi}{6}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{3\pi}{6}+x^2)} + \frac{2}{6}\sin.\frac{3\pi}{6}\,\text{arc.tg.}\dfrac{x\sin.\frac{3\pi}{6}}{1-x\cos.\frac{3\pi}{6}} \\ -\frac{2}{6}\cos.\frac{5\pi}{6}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{5\pi}{6}+x^2)} + \frac{2}{6}\sin.\frac{5\pi}{6}\,\text{arc.tg.}\dfrac{x\sin.\frac{5\pi}{6}}{1-x\cos.\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

Zusatz 2.

§. 79. Setzen wir, wo es die Bequemlichkeit gestattet, statt der Sinusse und Cosinusse ihre Werthe, so erhalten wir

$\int \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{1}{3} l\sqrt{(1-x+x^2)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x} + \frac{1}{3} l(1+x)$ oder

$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} l \frac{1+x}{\sqrt{(1-x+x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}$. Ferner wird wegen

$$\sin.\frac{\pi}{4} = \cos.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin.\frac{3\pi}{4} = -\cos.\frac{3\pi}{4}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\sqrt{\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

dann aber

$$\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\sqrt{\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}} + \frac{1}{6}\,\text{arc.tg.}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$$

Beyspiel 3.

§. 80. Die Differenzialformel $\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ zu integriren, wenn der Exponent $m-1$ kleiner ist als n.

Jeder Theil des gebrochenen Ausdruckes $\frac{x^{m-1}}{1-x^n}$, aus welchem Factor des Nenners er auch entstanden seyn mag, ist enthalten in der Form

$$\frac{2\sin.\frac{2k\pi}{n}\sin.\frac{2mk\pi}{n} - \cos.\frac{2mk\pi}{n}\left(x-\cos.\frac{2k\pi}{n}\right)}{n\left(1-2x\cos.\frac{2k\pi}{n}+x^2\right)},$$

welcher Ausdruck, mit unserer Formel $\frac{A+Bx}{a^2-2abx\cos.\zeta+b^2x^2}$ verglichen, $a=1$, $b=1$, $\zeta=\frac{2k\pi}{n}$ gibt, also

$$A = \frac{2}{n}\sin.\frac{2k\pi}{n}\sin.\frac{2mk\pi}{n} + \frac{2}{n}\cos.\frac{2k\pi}{n}\cos.\frac{2mk\pi}{n},$$

$$B = -\frac{2}{n}\cos.\frac{2mk\pi}{n}, \text{ und daher}$$

$$Ab + Ba\cos.\zeta = \frac{2}{n}\sin.\frac{2k\pi}{n}\sin.\frac{2mk\pi}{n}.$$

Das hieraus entspringende Integrale wird seyn

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{2km\pi}{n}\,l\sqrt{\left(1-2x\cos.\frac{2k\pi}{n}+x^2\right)}$$
$$+\frac{2}{n}\sin.\frac{2km\pi}{n}\,\text{arc. tg.}\frac{x\sin.\frac{2k\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{2k\pi}{n}},$$

wo für k nach und nach alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 ꝛc. gesetzt werden müssen, so lange $2k$ die Zahl n nicht übertrifft; aber für $k=0$ wird ein Theil des Integrals $=-\frac{1}{n}l(1-x)$: und wenn n eine gerade Zahl ist, erhält man für $2k=n$ den letzten Theil des Integrals, welcher

$$-\frac{2}{n}\cos.m\pi\,l\sqrt{(1+2x+x^2)} = -\frac{2\cos.m\pi}{n}\,l(1+x).$$

Bezeichnet also m eine gerade Zahl, so wird $\cos.m\pi=1$, ist aber m ungerade, so wird $\cos.m\pi=-1$. Das Integrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ läßt sich demnach auf folgende Weise darstellen:

$$-\frac{1}{n}\,l(1-x)$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{2m\pi}{n}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{2\pi}{n}+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\frac{2m\pi}{n}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{2\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{2\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{4m\pi}{n}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{4\pi}{n}+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\frac{4m\pi}{n}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{4\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{4\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{6m\pi}{n}\,l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{6\pi}{n}+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\frac{6m\pi}{n}\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{6\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{6\pi}{n}}$$

ꝛc.

Zusatz.

§. 81. Setzen wir für $m = 1$ nach und nach statt n die Zahlen 1, 2, 3, 4 . . ., so erhalten wir nachstehende Integrale:

$$\text{I.}\int\frac{dx}{1-x} = -\,l(1-x)$$

$$\text{II.}\int\frac{dx}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}l(1-x)+\tfrac{1}{2}l(1+x) = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\text{III.}\int\frac{dx}{1-x^3} = -\tfrac{1}{3}l(1-x)-\tfrac{2}{3}\cos.\tfrac{2}{3}\pi\,l\sqrt{(1-2x\cos.\tfrac{2}{3}\pi+x^2)}$$
$$+\tfrac{2}{3}\sin.\tfrac{2}{3}\pi\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{2}{3}\pi}{1-x\cos.\frac{2}{3}\pi}$$

$$\text{IV.}\int\frac{dx}{1-x^4} = -\tfrac{1}{4}l(1-x)-\tfrac{2}{4}\cos.\tfrac{2}{4}\pi\,l\sqrt{(1-2x\cos.\tfrac{2}{4}\pi+x^2)}$$
$$+\tfrac{2}{4}\sin.\tfrac{2}{4}\pi\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{2}{4}\pi}{1-x\cos.\frac{2}{4}\pi}$$
$$+\tfrac{1}{4}l(1+x)$$

$$\text{V.}\int\frac{dx}{1-x^5} = -\tfrac{1}{5}l(1-x)-\tfrac{2}{5}\cos.\tfrac{2}{5}\pi\,l\sqrt{(1-2x\cos.\tfrac{2}{5}\pi+x^2)}$$
$$+\tfrac{2}{5}\sin.\tfrac{2}{5}\pi\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{2}{5}\pi}{1-x\cos.\frac{2}{5}\pi}$$
$$-\tfrac{2}{5}\cos.\tfrac{4}{5}\pi\,l\sqrt{(1-2x\cos.\tfrac{4}{5}\pi+x^2)}$$
$$+\tfrac{2}{5}\sin.\tfrac{4}{5}\pi\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\frac{4}{5}\pi}{1-x\cos.\frac{4}{5}\pi}$$

$$\text{VI.} \int \frac{dx}{1-x^6} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{6} l(1-x) - \frac{2}{6} \cos.\frac{2}{6}\pi\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{2}{6}\pi+x^2)} \\ \qquad + \frac{2}{6}\sin.\frac{2}{6}\pi \text{ arc. tg. } \frac{x \sin.\frac{2}{6}\pi}{1-x\cos.\frac{2}{6}\pi} \\ +\frac{1}{6} l(1+x) - \frac{2}{6}\cos.\frac{4}{6}\pi\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{4}{6}\pi+x^2)} \\ \qquad + \frac{2}{6}\sin.\frac{4}{6}\pi \text{ arc. tg. } \frac{x\sin.\frac{4}{6}\pi}{1-x\cos.\frac{4}{6}\pi} \end{array} \right.$$

Beyspiel 4.

§. 82. **Die Differenzialformel** $\frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})dx}{1+x^n}$ **zu integriren, wenn** $n > m-1$.

Aus dem zweyten Beyspiele erhellt, daß, wenn i was immer für eine ungerade Zahl, die nicht größer als n ist, bezeichnet, jeder Theil des Integrals im Allgemeinen in folgender Formel enthalten sey:

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{im\pi}{n}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{i\pi}{n}+x^2)}$$

$$+\frac{2}{n}\sin.\frac{im\pi}{n} \text{ arc. tg. } \frac{x\sin.\frac{i\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{i\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\frac{i(n-m)\pi}{n}\, l\sqrt{(1-2x\cos.\frac{i\pi}{n}+x^2)}$$

$$+\frac{2}{n}\sin.\frac{i(n-m)\pi}{n} \text{ arc. tg. } \frac{x\sin.\frac{i\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{i\pi}{n}}.$$

Nun ist aber

$$\cos.\frac{i(n-m)\pi}{n} = \cos.\left(i\pi - \frac{im\pi}{n}\right) = -\cos.\frac{im\pi}{n} \text{ und}$$

$$\sin.\frac{i(n-m)\pi}{n} = \sin.\left(i\pi - \frac{im\pi}{n}\right) = +\sin.\frac{im\pi}{n},$$

daher werden sich die logarithmischen Theile aufheben, und dieser Theil des Integrals wird im Allgemeinen seyn

$$+\frac{4}{n}\sin.\frac{im\pi}{n} \text{ arc. tg. } \frac{x\sin.\frac{i\pi}{n}}{1-x\cos.\frac{i\pi}{n}}.$$

Setzt man, der Bequemlichkeit wegen, den Winkel $\frac{\pi}{n} = \omega$, so wird

$$\int\frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n} = \frac{4}{n}\sin.m\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega}$$
$$+\frac{4}{n}\sin.3m\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.3\omega}{1-x\cos.3\omega}$$
$$+\frac{4}{n}\sin.5m\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.5\omega}{1-x\cos.5\omega}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{4}{n}\sin.im\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.i\omega}{1-x\cos.i\omega},$$

für i die größte ungerade Zahl gesetzt werden muß, die den Expo-nenten n nicht übersteigt. Ist n selbst eine ungerade Zahl, so verschwin-der für $i = n$ entstandene Theil des Integrals, weil $\sin.m\pi = 0$ Hier wird also das Integrale bloß durch Winkel ausgedrückt.

Zusatz.

§. 83. Auf ähnliche Art findet man das folgende Integrale, wo iter Logarithmen zurückbleiben, wenn man wieder $\frac{\pi}{n} = \omega$ setzt:

$$\int\frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n} = -\frac{4}{n}\cos.m\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.\omega+x^2)}$$
$$-\frac{4}{n}\cos.3m\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.3\omega+x^2)}$$
$$-\frac{4}{n}\cos.5m\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.5\omega+x^2)}$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{4}{n}\cos.im\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.i\omega+x^2)},$$

lange nämlich die ungerade Zahl i den Exponenten n nicht übersteigt.

Beyspiel 6.

§. 84. Die Differenzialformel $\frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n}$ zu tegriren, wenn $n > m-1$.

Nach dem Beyspiele 3 ist, wenn wir der Kürze wegen $\frac{\pi}{n} = \omega$ ßen, jeder Theil des Integrals enthalten in der Form

$$\frac{2}{n}\cos.2km\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.2k\omega+x^2)}$$
$$+\frac{2}{n}\sin.2km\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.2k\omega}{1-x\cos.2k\omega}$$
$$\frac{2}{n}\cos.2k(n-m)\omega\ l\sqrt{(1-2x\cos.2k\omega+x^2)}$$
$$-\frac{2}{n}\sin.2k(n-m)\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.2k\omega}{1-x\cos.2k\omega}.$$

Es ist aber

$$\cos. 2k(n-m)\omega = \cos.(2k\pi - 2km\omega) = \cos. 2km\omega \text{ und}$$
$$\sin. 2k(n-m)\omega = \sin.(2k\pi - 2km\omega) = - \sin. 2km\omega,$$

daher geht jener Theil des Integrals über in

$\frac{4}{n} \sin. 2km\omega \text{ arc. tg. } \frac{x \sin. 2k\omega}{1 - x\cos. 2k\omega}$, folglich erhält man

$$\int \frac{(x^{m-1} - x^{n-m-1})dx}{1 - x^n} = \frac{4}{n} \sin. 2m\omega \text{ arc. tg. } \frac{x \sin. 2\omega}{1 - x\cos. 2\omega}$$
$$+ \frac{4}{n} \sin. 4m\omega \text{ arc. tg. } \frac{x \sin. 4\omega}{1 - x\cos. 4\omega}$$
$$+ \frac{4}{n} \sin. 6m\omega \text{ arc. tg. } \frac{x \sin. 6\omega}{1 - x\cos. 6\omega} + \ldots,$$

indem man nach den geraden Zahlen so weit fortschreitet, so lange sie den Exponenten n nicht übersteigen.

Zusatz.

§. 85. Ganz auf dieselbe Weise findet man auch folgendes Integrale, wobey wieder $\frac{\pi}{n} = \omega$ ist:

$$\int \frac{(x^{m-1} + x^{n-m-1})dx}{1 - x^n} = -\frac{2}{n} l(1-x)$$
$$- \frac{4}{n} \cos. 2m\omega\, l\sqrt{(1 - 2x\cos. 2\omega + x^2)}$$
$$- \frac{4}{n} \cos. 4m\omega\, l\sqrt{(1 - 2x\cos. 4\omega + x^2)}$$
$$- \frac{4}{n} \cos. 6m\omega\, l\sqrt{(1 - 2x\cos. 6\omega + x^2)} - \ldots$$

wo wieder die geraden Zahlen die Gränze n nicht überschreiten dürfen.

Beyspiel 6.

§. 86. Die Differenzialformel $dy = \frac{dx}{x^3(1+x)(1-x^4)}$ zu integriren.

Die gebrochene Function, die hier durch dx multiplicirt ist, läßt sich nach den Factoren des Nenners auch so darstellen:

$$\frac{1}{x^3(1+x)^2(1-x)(1+x^2)},$$

und kann in folgende einfache Brüche aufgelöst werden:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4(1+x)^2} - \frac{9}{8(1+x)} + \frac{1}{8(1-x)} + \frac{1+x}{4(1+x^2)} = \frac{dy}{dx};$$

her erhält man durch Integration

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + lx + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{2}{8}l(1+x)$$
$$- \frac{1}{8}l(1-x) + \frac{1}{8}l(1+x^2) + \frac{1}{4}\,\text{arc. tg. } x,$$

elcher Ausdruck auf folgende Form gebracht werden kann:

$$= C + \frac{-2+2x+5x^2}{4x^2(1+x)} - l\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{1}{8}\,l\,\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{1}{4}\,\text{arc. tg. } x.$$

Anmerkung.

§. 87. Wir konnten demnach dieses Kapitel so abhandeln, daß
y dieser Gattung Integrationen nichts mehr zu wünschen übrig bleibt.
o oft demnach eine solche Function y von x zu suchen ist, daß $\frac{dy}{dx}$
ner rationalen Function von x gleich wird, bietet die Integration
ne Schwierigkeit dar, es müßten denn die Vorschriften der Algebra
r Auflösung des Nenners in seine einfachen Factoren nicht ausreichen;
nn aber trifft dieser Mangel die Algebra, und nicht die hier gelehrte
tegrationsmethode. Besonders aber müssen wir hier bemerken, daß
Function y, weil $\frac{dy}{dx}$ eine rationale Function von x bezeichnet, für
n Fall, daß sie nicht algebraisch ist, keine andern transcendenten Grö-
n als Logarithmen und Winkel enthalten könne; übrigens muß man
merken, daß hierbey immer die hyperbolischen Logarithmen zu verste-
n seyen, weil, wenn keine hyperbolischen Logarithmen genommen
rden, das Differenziale von lx nicht gleich $\frac{dx}{x}$ seyn kann; allein die
duction auf gemeine Logarithmen ist sehr leicht, so daß die Anwen-
ng des Calculs auf practische Gegenstände nicht die mindesten Schwie-
keiten darbietet. Wir werden daher auf jene Fälle übergehen, in
lchen die Formel $\frac{dy}{dx}$ eine irrationale Function von x bezeichnet, wo-
y im Voraus bemerkt werden muß, daß in allen Fällen, wo jene
nction durch eine schickliche Substitution rational gemacht werden
nn, auf das gegenwärtige Kapitel verwiesen werden soll. Wäre z. B.

$$dy = \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,.\,dx,$$

sieht man sogleich, daß, wenn $x = z^6$ gesetzt wird, mithin
$x = 6z^5\,dz$ ist,

$$dy = \frac{1 + z^3 - z^4}{1 + z^2} \cdot 6 z^5 dz$$

werde, also

$$\frac{dy}{dz} = -6z^7 + 6z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^2 - 6 + \frac{6}{1+z^2}$$

daher ist das Integrale

$$y = -\tfrac{3}{4}z^8 + \tfrac{6}{7}z^7 + z^6 - \tfrac{6}{5}z^5 + 2z^3 - 6z + 6 \text{ arc.tg.} z$$

und durch Substitution für z

$$y = -\tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + x - \tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \text{ arc.tg.} \sqrt[6]{x}$$

Kapitel II.

Von der Integration der irrationalen Differenzialformeln.

Aufgabe 6.

§. 88. Das Integrale der Differenzialformel
$y = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ zu bestimmen.

Auflösung.

Die Größe $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ hat entweder zwey reelle Factoren,
er nicht.

I. Im ersten Falle ist der gegebene Ausdruck von der Form

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(a + bx)(f + gx)}}.$$

diese Formel rational zu machen, setze man

$$(a + bx)(f + gx) = (a + bx)^2 \cdot z^2,$$

so wird $x = \frac{f - az^2}{bz^2 - g}$, und daher

$$= \frac{2(ag - bf)z\,dz}{(bz^2 - g)^2} \text{ und } \sqrt{(a + bx)(f + gx)} = -\frac{(ag - bf)z}{bz^2 - g},$$

raus folgt

$$dy = \frac{-2dz}{bz^2 - g} = \frac{2dz}{g - bz^2} \text{ und } z = \sqrt{\frac{f + gx}{a + bx}};$$

en demnach die Buchstaben b und g gleiche Zeichen, so läßt sich
Integrale durch Logarithmen, im entgegengesetzten Falle aber durch
nkel ausdrücken.

II. Im zweyten Falle erhalten wir

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{[a^2 - 2abx \cos.\zeta + b^2x^2]}}.$$

Setzt man nun

$$a^2 - 2abx \cos.\zeta + b^2x^2 = (bx - az)^2,$$

wird

$$2bx \cos.\zeta + a = -2bxz + az^2 \text{ und } x = \frac{a(1 - z^2)}{2b(\cos.\zeta - z)}.$$

daher $dx = \frac{a\,dz\,(1 - 2z\cos.\zeta + z^2)}{2b\,(\cos.\zeta - z)^2}$ und

$$\sqrt{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)} = \frac{a\,(1 - 2z\cos.\zeta + z^2)}{2\,(\cos.\zeta - z)}\,,$$

also

$$dy = \frac{dz}{b\,(\cos.\zeta - z)} \text{ und } y = -\frac{1}{b}\,l\,(\cos.\zeta - z).$$

Es ist aber

$$z = \frac{bx - \sqrt{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)}}{a},$$

folglich

$$y = -\frac{1}{b}\,l\,\frac{a\cos.\zeta - bx + \sqrt{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)}}{a} \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{b}\,l\,(-a\cos.\zeta + bx + \sqrt{(a^2 - 2abx\cos.\zeta + b^2x^2)}).$$

Zusatz 1.

§. 89. Der letztere Fall ist umfassender, und läßt sich auf die Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ bringen, sobald γ eine positive Größe ist; denn wegen $b = \sqrt{\gamma}$ und $a\cos.\zeta = \frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}$ erhält man

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l\left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}} + x\sqrt{\gamma} + \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}\right] + C,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l\left[\tfrac{1}{2}\beta + \gamma x + \sqrt{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}\right] + C.$$

Zusatz 2.

§. 90. Da für den ersten Fall

$$\int\frac{2\,dz}{g - bz^2} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\,l\,\frac{\sqrt{g} + z\sqrt{b}}{\sqrt{g} - z\sqrt{b}} \text{ und } \int\frac{2\,dz}{g + bz^2} = \frac{2}{\sqrt{gb}}\,\text{arc. tg.}\,\frac{z\sqrt{b}}{\sqrt{g}},$$

so erhalten wir folgende Fälle:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a + bx)(f + gx)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\,l\,\frac{\sqrt{g\,(a + bx)} + \sqrt{b\,(f + gx)}}{\sqrt{g\,(a + bx)} - \sqrt{b\,(f + gx)}} + C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(bx - a)(f + gx)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\,l\,\frac{\sqrt{g\,(bx - a)} + \sqrt{b\,(f + gx)}}{\sqrt{g\,(bx - a)} - \sqrt{b\,(f + gx)}} + C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(bx - a)(gx - f)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\,l\,\frac{\sqrt{g\,(bx - a)} + \sqrt{b\,(gx - f)}}{\sqrt{g\,(bx - a)} - \sqrt{b\,(gx - f)}} + C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a - bx)(f - gx)}} = \frac{-1}{\sqrt{bg}}\,l\,\frac{\sqrt{g\,(a - bx)} + \sqrt{b\,(f - gx)}}{\sqrt{g\,(a - bx)} - \sqrt{b\,(f - gx)}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a - bx)(f + gx)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}} \text{ arc. tg. } \frac{\sqrt{b(f + gx)}}{\sqrt{g(a - bx)}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a - bx)(gx - f)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}} \text{ arc. tg. } \frac{\sqrt{b(gx - f)}}{\sqrt{g(a - bx)}} + C.$$

Zusatz 3.

§. 91. Die vier ersten dieser sechs Integralformeln sind in dem im Zusatze 1. angeführten Falle enthalten, die beyden letzten aber in der Formel

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta - \gamma x^2)}};$$

denn es sey für den vorletzten Ausdruck

$$af = \alpha, \quad ag - bf = \beta, \quad bg = \gamma, \quad \text{so wird}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{g}} \text{ arc. tg. } \frac{2\sqrt{g(\alpha + \beta x - \gamma x^2)}}{\beta - 2\gamma x},$$

wenn man den doppelten Bogen nimmt. Führt man aber den Cosinus ein, so erhält man

$$y = \frac{1}{\sqrt{g}} \text{ arc. cos. } \frac{\beta - 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}} + C,$$

deren Richtigkeit aus der Differenziation erhellet.

Anmerkung 1.

§. 92. Aus der Auflösung dieses Problemes erhellt auch, daß die allgemeinere Formel $\frac{X dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}}$ nach den Vorschriften des vorhergehenden Kapitels integrirt werden könne, wenn X irgend eine rationale Function von x bezeichnet; denn führt man statt x die Veränderliche z ein, wodurch die obige Wurzelgröße rational wird, so geht auch X in eine rationale Function von z über. Dasselbe findet in noch größerer Allgemeinheit Statt, wenn für $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = u$ die Größe X irgend eine rationale Function von x und u wird, denn dann geht die Differenzialformel vermöge der angewandten Substitution in eine rationale über, indem sowohl für x als für u rationale Functionen von z gesetzt werden. Man kann diesen Satz auch so stellen, daß man sagt, das Integrale von X dx lasse sich angeben, wenn die Function X außer $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ keine andere irrationale Function enthält, weil mit Hülfe der Substitution jener Ausdruck in eine rationale Differenzialformel verwandelt werden kann.

Anmerkung 2.

§. 93. Wenn irgend eine irrationale Differenzialformel vorgelegt wird, so hat man vor Allem darauf zu sehen, ob man dieselbe durch irgend eine Substitution in eine rationale transformiren könne; gelingt dieß, so läßt sich die Integration nach den Vorschriften des vorhergehenden Kapitels bewerkstelligen, und man sieht zugleich ein, daß das Integrale, wenn es nicht algebraisch wird, keine andern transcendenten Größen enthalten könne, als Logarithmen und Winkel.

Läßt sich dieser Zweck durch keine Substitution erreichen, so steht man von allen ferneren Bemühungen ab, weil dann das Integrale weder algebraisch, noch durch Logarithmen oder Winkel ausgedrückt werden kann. Wäre z. B. $X dx$ eine solche Differenzialformel, welche auf keine Weise rational gemacht werden kann, so gehört ihr Integrale $\int X dx$ zu einer neuen Gattung transcendenter Größen, bey welchen wir den Werth des Integrals durch Näherung anzugeben versuchen müssen. Führen wir aber eine neue Gattung transcendenter Größen ein, so lassen sich unzählige andere Formen darauf zurückführen und integriren. Wir müssen uns also hier vorzüglich bemühen, für jede Gattung solcher Größen die einfachste Form aufzustellen, und nach Festsetzung derselben können wir dann die Integrale der übrigen Formeln bestimmen. Wir werden hier auf eine höchst wichtige Frage geleitet, wie man nämlich die Integration verwickelterer Formen auf einfachere zurückführen müsse. Bevor wir zur Beantwortung dieser Frage übergehen, müssen wir andere Formen dieser Art untersuchen, welche mit Hülfe einer schicklichen Substitution rational gemacht werden können, so wie wir oben schon gezeigt haben, daß sich die Differenzialformel $X dx$ in eine rationale transformiren lasse, sobald X eine rationale Function von x und $u = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ bezeichnet, so daß sie außer der Quadratwurzel von $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ keine andere irrationale Function enthält.

Aufgabe 7.

§. 94. Die Differenzialformel $X dx (a + bx)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational darzustellen, wenn X irgend eine rationale Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Man setze $a + bx = z^\nu$, damit $(a + bx)^{\frac{\mu}{\nu}} = z^\mu$ werde, so

Zusatz 3.

§. 107. Wenn sich demnach die Formel $x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ *rational* darstellen läßt, so ist dieß auch möglich bey der Formel $x^{m\pm\alpha n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}\pm\beta}$, welche ganze Zahlen auch α und β immer bezeichnen mögen.

Zur Bestimmung der reducibeln Fälle ist es demnach hinreichend, $m < n$ und $\mu < \nu$ zu setzen.

Zusatz 4.

§. 108. Ist $m = 0$, so läßt sich die Formel $\frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ immer nach dem ersten Falle rational machen, indem man $x^n = \frac{u^\nu - a}{b}$ setzt; denn dadurch wird unser Ausdruck in $\frac{\nu b u^{\mu+\nu-1}\,du}{n(u^\nu - a)}$ transformirt.

Anmerkung 1.

§. 109. Weil für $m = kn$, wobey k was immer für eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet, der Ausdruck $x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ immer rational dargestellt werden kann, und diese Fälle für sich klar sind, so wollen wir die übrigen Fälle, die diese Reduction zulassen, einer näheren Betrachtung würdigen. Zu diesem Zwecke setzen wir $\nu = n$, $m < n$ und $\mu < n$, wobey jedoch $m + \mu = n$ seyn muß: dadurch erhalten wir folgende in ihrer Art höchst einfache Formen, welche sich rational darstellen lassen.

I. $dx(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$.

II. $dx(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}$; $xdx(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}$.

III. $dx(a+bx^4)^{\frac{3}{4}}$; $x^2dx(a+bx^4)^{\frac{1}{4}}$.

IV. $dx(a+bx^5)^{\frac{4}{5}}$; $xdx(a+bx^5)^{\frac{3}{5}}$; $x^2dx(a+bx^5)^{\frac{2}{5}}$; $x^3dx(a+bx^5)^{\frac{1}{5}}$.

V. $dx(a+bx^6)^{\frac{5}{6}}$; $x^4dx(a+bx^6)^{\frac{1}{6}}$.

Demnach lassen sich auch folgende Formeln reduciren:

$a + bx = z^{\lambda\mu\nu}$ gesetzt wird; denn dann wird

$$x = \frac{z^{\lambda\mu\nu} - a}{b}, \quad u = z^{\mu\nu}, \quad v = z^{\lambda\nu}, \quad t = z^{\lambda\mu}, \quad \text{ꝛc.}$$

$$\text{und} \quad dx = \frac{\lambda\mu\nu}{b} z^{\lambda\mu\nu - 1} dz.$$

Beyspiel.

§. 98. Wenn die Formel $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$ gegeben ist, so findet man für $1 + x = z^6$:

$$dy = -\frac{6z^3\,dz\,(1 - z^6)}{1 - z} \quad \text{oder}$$

$$dy = -6dz(z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8),$$

und daher durch Integration

$$y = C - \tfrac{3}{2}z^4 - \tfrac{6}{5}z^5 - z^6 - \tfrac{6}{7}z^7 - \tfrac{3}{4}z^8 - \tfrac{2}{3}z^9;$$

oder, wenn man statt z wieder den Werth setzt:

$$y = C - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} - \tfrac{6}{5}\sqrt[6]{(1+x)^5} - 1 - x - \tfrac{6}{7}(1+x)\sqrt[6]{1+x} -$$

$$- \tfrac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{(1+x)} - \tfrac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x},$$

in welchem Falle das Integral sogar algebraisch wird.

Aufgabe 8.

§. 99. Die Differenzialformel $X dx \left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational zu machen, wenn X irgend eine rationale Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Für $\frac{a + bx}{f + gx} = z^\nu$ wird

$$\left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = z^\mu \quad \text{und} \quad x = \frac{a - fz^\nu}{gz^\nu - b},$$

$$\text{daher} \quad dx = \frac{\nu(bf - ag)z^{\nu - 1}\,dz}{(gz^\nu - b)^2},$$

so geht X in eine rationale Function von z über. Bezeichnet man diese mit Z, so erhalten wir die Differenzialformel

$$\frac{\nu(bf - ag)}{(gz^\nu - b)^2} Z z^{\mu+\nu-1} dz,$$

welche rational ist, und daher nach Kapitel I. integrirt werden kann.

Zusatz 1.

§. 100. Wenn für $\left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{\frac{1}{\nu}} = u$ die Größe X irgend eine rationale Function von x und u wird, so wird durch die angenommene Substitution die Differenzialformel X dx eine rationale Form erhalten, deren Integration bekannt ist.

Zusatz 2.

§. 101. Wenn X eine rationale Function sowohl von x als auch von den Größen

$$\left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = u, \quad \left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{\frac{1}{\mu}} = v, \quad \left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{\frac{1}{\nu}} = t$$

ist, so geht die Differenzialformel X dx durch die Substitution $\frac{a + bx}{f + gx} = z^{\lambda\mu\nu}$ in eine rationale über, wobey

$$x = \frac{a - fz^{\lambda\mu\nu}}{gz^{\lambda\mu\nu} - b}; \quad \text{und} \quad u = z^{\mu\nu}; \quad v = z^{\lambda\nu}; \quad t = z^{\lambda\mu}.$$

Anmerkung 1.

§. 102. Man kann demnach in diesen Fällen die Differenzialformeln rational machen, obgleich sie verschiedene Radicalen enthalten, weil diese durch dieselbe Substitution alle zugleich rational werden, und es läßt sich die Größe x selbst durch eine neue Veränderliche z rational ausdrücken. Wenn aber das vorgelegte Differenziale zwey solche irrationale Formeln enthält, welche durch dieselbe Substitution nicht zugleich rational gemacht werden können, obgleich dieß bey einer jeden für sich genommen angeht, so läßt sich die Reduction nicht bewerkstelligen, es müßte denn zufällig das Differenziale selbst in zwey Theile zerlegt werden können, deren jeder nur einen einzigen irrationalen Ausdruck enthält. Wäre z. B. die Differenzialformel

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$$ gegeben, und man

Zusatz 2.

§. 113. Betrachtet man das Integrale $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ als bekannt, so können auch alle Integrale von der Form

$$\int x^{m \pm n - 1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

oder allgemeiner die Integrale von der Form

$$\int x^{m \pm \alpha n - 1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$ bestimmt werden.

Aufgabe 11.

§. 114. Das Integrale $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ auf das Integrale $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ zurück zu führen.

Auflösung.

Das Differenzíale der Function $x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ läßt sich auf die Form

$$\left[ma - \frac{(m\nu + n\mu + n\nu)a}{\nu}\right] x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$
$$+ \frac{m\nu + n\mu + n\nu}{\nu} \cdot x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

bringen, und hieraus folgt

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = -\frac{(n\mu+n\nu)a}{\nu}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$
$$+ \frac{(m\nu + n\mu + n\nu)}{\nu}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1},$$

woraus

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu + n(\mu+\nu)}$$
$$+ \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu + n(\mu+\nu)}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

erhalten wird.

wodurch $6 u^3 du (a + b u^3)^{\frac{\mu}{\nu}}$ erhalten wird, dann aber können wir für n einen positiven Werth annehmen; denn hätten wir

$$x^{m-1} dx (a + b x^{-n})^{\frac{\mu}{\nu}},$$

wo n negativ ist, so würden wir $x = \frac{1}{u}$ setzen, und so den Ausdruck

$$- u^{-m-1} du (a + b u^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

erhalten, welcher der allgemeinen Formel ähnlich ist. Wir werden nun untersuchen, in welchen Fällen solche Ausdrücke rational gemacht werden können.

Aufgabe 9.

§. 104. Die Fälle zu bestimmen, in welchen die Differenzialformel $x^{m-1} dx (a + b x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational gemacht werden kann.

Auflösung.

Zuerst ist klar, daß für $\nu = 1$, wo also $\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl bezeichnet, die Formel an und für sich rational sey, und also keine Substitution erforderlich ist. Bezeichnet aber $\frac{\mu}{\nu}$ einen Bruch, so müssen wir zwey Substitutionen machen.

I. Man setze $a + b x^n = u^\nu$, damit $(a + b x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = u^\mu$ werde, so erhalten wir $x^n = \frac{u^\nu - a}{b}$, also

$$x^m = \left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}, \text{ und daher } x^{m-1} dx = \frac{\nu}{nb} u^{\nu-1} du \left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

wodurch unsere Formel in $\frac{\nu}{nb} u^{\mu+\nu-1} du \left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$ übergeht.

Hieraus erhellet demnach, daß diese Formel rational sey, sobald der Exponent $\frac{m-n}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

II. Man setze $a + b x^n = x^n z^\nu$, mithin

$x^n = \frac{a}{z^\nu - b}$ und $(a + b x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{a^{\frac{\mu}{\nu}} z^\mu}{(z^\nu - b)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, so wird

$x^m = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^\nu - b)^{\frac{m}{n}}}$, also $x^{m-1} d x = \frac{-\nu a^{\frac{m}{n}} z^{\nu-1} d z}{n (z^\nu - b)^{\frac{m}{n}+1}}$,

folglich geht unsere Formel über in

$$\frac{-\nu a^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}} z^{\mu+\nu-1} d z}{n (z^\nu - b)^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1}}.$$

Diese Formel wird demnach rational seyn, sobald $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist. Ein wenig Überlegung zeigt die Unmöglichkeit, andere Substitutionen anzugeben, die unserem Zwecke entsprechen. Hieraus ziehen wir den Schluß, daß die irrationale Formel $x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational dargestellt werden könne, wenn entweder $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist.

Zusatz 1.

§. 105. Bezeichnet $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, so ist der Fall an und für sich leicht; denn man setze $m = kn$ und $x^n = v$, so wird $x^m = v^k$, wodurch wir den Ausdruck $\frac{k}{m} v^{k-1} d v (a + b v)^{\frac{\mu}{\nu}}$ erhalten, welcher nach Aufgabe 7. integrirt werden kann.

Zusatz 2.

§. 106. Ist aber $\frac{m}{n}$ keine ganze Zahl, so muß $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl seyn, wenn die Rationalität hergestellt werden soll: was nur möglich ist, wenn $\nu = n$ ist. Folglich muß $m + \mu$ ein Vielfaches von $n = \nu$ seyn.

$$\frac{\nu(bf-ag)}{(gz^\nu-b)^2}\, Zz^{\mu+\nu-1}\, dz,$$

welche rational ist, und daher nach Kapitel I. integrirt werden kann.

Zusatz 1.

§. 100. Wenn für $\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\nu}} = u$ die Größe X irgend eine rationale Function von x und u wird, so wird durch die angenommene Substitution die Differenzialformel $X\,dx$ eine rationale Form erhalten, deren Integration bekannt ist.

Zusatz 2.

§. 101. Wenn X eine rationale Function sowohl von x als auch von den Größen

$$\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = u, \quad \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\mu}} = v, \quad \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\nu}} = t$$

ist, so geht die Differenzialformel $X\,dx$ durch die Substitution $\frac{a+bx}{f+gx} = z^{\lambda\mu\nu}$ in eine rationale über, wobey

$$x = \frac{a-fz^{\lambda\mu\nu}}{gz^{\lambda\mu\nu}-b}; \quad \text{und} \quad u = z^{\mu\nu}; \quad v = z^{\lambda\nu}; \quad t = z^{\lambda\mu}.$$

Anmerkung 1.

§. 102. Man kann demnach in diesen Fällen die Differenzialformeln rational machen, obgleich sie verschiedene Radicalen enthalten, weil diese durch dieselbe Substitution alle zugleich rational werden, und es läßt sich die Größe x selbst durch eine neue Veränderliche z rational ausdrücken. Wenn aber das vorgelegte Differenziale zwey solche irrationale Formeln enthält, welche durch dieselbe Substitution nicht zugleich rational gemacht werden können, obgleich dieß bey einer jeden für sich genommen angeht, so läßt sich die Reduction nicht bewerkstelligen, es müßte denn zufällig das Differenziale selbst in zwey Theile zerlegt werden können, deren jeder nur einen einzigen irrationalen Ausdruck enthält. Wäre z. B. die Differenzialformel

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$$ gegeben, und man

multiplicirt den Zähler und Nenner durch $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$, so wird

$$dy = \frac{dx\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{dx\sqrt{1-x^2}}{2x^2},$$

wo jeder Theil für sich rational gemacht und integrirt werden kann. Man findet nämlich

$$y = C - \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{2x} + \tfrac{1}{2}l\left[x+\sqrt{1+x^2}\right] - \tfrac{1}{2}\,\text{arc. tg.}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Jener Ausdruck aber wird am bequemsten rational dargestellt, wenn man beym ersten Theile $\sqrt{1+x^2} = px$, und bey dem andern $\sqrt{1-x^2} = qx$ setzt; denn wird gleichwohl dadurch

$$x = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}},$$

so erhält man dennoch die rationale Differenzialformel

$$dy = \frac{-p^2\,dp}{2(p^2-1)} - \frac{q^2\,dq}{2(1+q^2)}.$$

Anmerkung 2.

§. 103. Über die allgemeinen Formeln, welche von der Irrationalität befreyt werden können, läßt sich kaum etwas Ausführlicheres sagen, nur den Fall werden wir noch anführen, in welchem die Function X zwey solche Radicalen $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{f+gx}$ enthält; denn setzen wir $a+bx = (f+gx)t^2$, so wird

$$x = \frac{a-ft^2}{gt^2-b}, \text{ und } \sqrt{a+bx} = \frac{t\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{gt^2-b}}; \ \sqrt{f+gx} = \frac{\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{gt^2-b}}.$$

Es enthält demnach die Differenzialformel nur die einzige irrationale Größe $\sqrt{gt^2-b}$, welche nach den beym sechsten Probleme aufgestellten Sätzen durch eine neue Substitution leicht rational gemacht werden kann. Bevor wir nun weiter schreiten, müssen wir die Differenzialformel $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ mit besonderer Aufmerksamkeit betrachten, welche wegen ihrer Einfachheit in der ganzen Analysis eine sehr häufige Anwendung findet, wobey wir zwar annehmen, daß m, n, μ und ν ganze Zahlen bezeichnen, weil im entgegengesetzten Falle dieselben leicht darauf zurückgeführt werden können. Hätten wir z. B. $x^{-\frac{1}{3}}dx(a+b\sqrt{x})^{\frac{\mu}{\nu}}$, so müssen wir $x = u^6$ setzen, also $dx = 6u^5\,du$,

wodurch $6\,u^5\,du\,(a + b\,u^3)^{\frac{\mu}{\nu}}$ erhalten wird, dann aber können wir für n einen positiven Werth annehmen; denn hätten wir

$$x^{m-1}\,dx\,(a + b\,x^{-n})^{\frac{\mu}{\nu}},$$

wo n negativ ist, so würden wir $x = \frac{1}{u}$ setzen, und so den Ausdruck

$$-\,u^{-m-1}\,du\,(a + b\,u^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

erhalten, welcher der allgemeinen Formel ähnlich ist. Wir werden nun untersuchen, in welchen Fällen solche Ausdrücke rational gemacht werden können.

Aufgabe 9.

§. 104. Die Fälle zu bestimmen, in welchen die Differenzialformel $x^{m-1}\,dx\,(a + b\,x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational gemacht werden kann.

Auflösung.

Zuerst ist klar, daß für $\nu = 1$, wo also $\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl bezeichnet, die Formel an und für sich rational sey, und also keine Substitution erforderlich ist. Bezeichnet aber $\frac{\mu}{\nu}$ einen Bruch, so müssen wir zwey Substitutionen machen.

I. Man setze $a + b\,x^n = u^\nu$, damit $(a + b\,x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = u^\mu$ werde, so erhalten wir $x^n = \frac{u^\nu - a}{b}$, also

$$x^m = \left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},\ \text{und daher}\ x^{m-1}\,dx = \frac{\nu}{n\,b}\,u^{\nu-1}\,du\left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

wodurch unsere Formel in $\frac{\nu}{n\,b}\,u^{\mu+\nu-1}\,du\left(\frac{u^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}$ übergeht.

Hieraus erhellet demnach, daß diese Formel rational sey, sobald der Exponent $\frac{m-n}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

II. Man setze $a + b\,x^n = x^n\,z^\nu$, mithin

Anmerkung 2.

§. 93. Wenn irgend eine irrationale Differenzialformel vorgelegt wird, so hat man vor Allem darauf zu sehen, ob man dieselbe durch irgend eine Substitution in eine rationale transformiren könne; gelingt dieß, so läßt sich die Integration nach den Vorschriften des vorhergehenden Kapitels bewerkstelligen, und man sieht zugleich ein, daß das Integrale, wenn es nicht algebraisch wird, keine andern transcendenten Größen enthalten könne, als Logarithmen und Winkel.

Läßt sich dieser Zweck durch keine Substitution erreichen, so stehe man von allen ferneren Bemühungen ab, weil dann das Integrale weder algebraisch, noch durch Logarithmen oder Winkel ausgedrückt werden kann. Wäre z. B. $X dx$ eine solche Differenzialformel, welche auf keine Weise rational gemacht werden kann, so gehört ihr Integrale $\int X dx$ zu einer neuen Gattung transcendenter Größen, bey welchen wir den Werth des Integrals durch Näherung anzugeben versuchen müssen. Führen wir aber eine neue Gattung transcendenter Größen ein, so lassen sich unzählige andere Formen darauf zurückführen und integriren. Wir müssen uns also hier vorzüglich bemühen, für jede Gattung solcher Größen die einfachste Form aufzustellen, und nach Festsetzung derselben können wir dann die Integrale der übrigen Formeln bestimmen. Wir werden hier auf eine höchst wichtige Frage geleitet, wie man nämlich die Integration verwickelterer Formen auf einfachere zurückführen müsse. Bevor wir zur Beantwortung dieser Frage übergehen, müssen wir andere Formen dieser Art untersuchen, welche mit Hülfe einer schicklichen Substitution rational gemacht werden können, so wie wir oben schon gezeigt haben, daß sich die Differenzialformel $X dx$ in eine rationale transformiren lasse, sobald X eine rationale Function von x und $u = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ bezeichnet, so daß sie außer der Quadratwurzel von $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ keine andere irrationale Function enthält.

Aufgabe 7.

§. 94. Die Differenzialformel $X dx (a + bx)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational darzustellen, wenn X irgend eine rationale Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Man setze $a + bx = z^\nu$, damit $(a + bx)^{\frac{\mu}{\nu}} = z^\mu$ werde, so

Zusatz 3.

§. 107. Wenn sich demnach die Formel $x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ rational darstellen läßt, so ist dieß auch möglich bey der Formel $x^{m \pm \alpha n - 1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu} \pm \beta}$, welche ganze Zahlen auch α und β immer bezeichnen mögen.

Zur Bestimmung der reducibeln Fälle ist es demnach hinreichend, $m < n$ und $\mu < \nu$ zu setzen.

Zusatz 4.

§. 108. Ist $m = 0$, so läßt sich die Formel $\frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ immer nach dem ersten Falle rational machen, indem man $x^n = \frac{u^\nu - a}{b}$ setzt; denn dadurch wird unser Ausdruck in $\frac{\nu b u^{\mu+\nu-1}\,du}{n(u^\nu - a)}$ transformirt.

Anmerkung 1.

§. 109. Weil für $m = kn$, wobey k was immer für eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet, der Ausdruck $x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ immer rational dargestellt werden kann, und diese Fälle für sich klar sind, so wollen wir die übrigen Fälle, die diese Reduction zulassen, einer näheren Betrachtung würdigen. Zu diesem Zwecke setzen wir $\nu = n$, $m < n$ und $\mu < n$, wobey jedoch $m + \mu = n$ seyn muß: dadurch erhalten wir folgende in ihrer Art höchst einfache Formen, welche sich rational darstellen lassen.

I. $dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$.

II. $dx\,(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}$; $x\,dx\,(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}$.

III. $dx\,(a+bx^4)^{\frac{3}{4}}$; $x^2\,dx\,(a+bx^4)^{\frac{1}{4}}$.

IV. $dx\,(a+bx^5)^{\frac{4}{5}}$; $x\,dx\,(a+bx^5)^{\frac{3}{5}}$; $x^2\,dx\,(a+bx^5)^{\frac{2}{5}}$; $x^3\,dx\,(a+bx^5)^{\frac{1}{5}}$.

V. $dx\,(a+bx^6)^{\frac{5}{6}}$; $x^4\,dx\,(a+bx^6)^{\frac{1}{6}}$.

Demnach lassen sich auch folgende Formeln reduciren;

$x^{\pm 2\alpha}\, dx\, (a + bx^2)^{\frac{1}{2} \pm \beta}.$

$x^{\pm 3\alpha}\, dx\, (a + bx^3)^{\frac{2}{3} \pm \beta}; \quad x^{1 \pm 3\alpha}\, dx\, (a + bx^3)^{\frac{1}{3} \pm \beta}.$

$x^{\pm 4\alpha}\, dx\, (a + bx^4)^{\frac{3}{4} \pm \beta}; \quad x^{2 \pm 4\alpha}\, dx\, (a + bx^4)^{\frac{1}{4} \pm \beta}.$

$x^{\pm 5\alpha}\, dx\, (a + bx^5)^{\frac{4}{5} \pm \beta}; \quad x^{1 \pm 5\alpha}\, (a + bx^5)^{\frac{3}{5} \pm \beta};$

$x^{2 \pm 5\alpha}\, (a + bx^5)^{\frac{2}{5} \pm \beta};$

$x^{3 \pm 5\alpha}\, (a + bx^5)^{\frac{1}{5} \pm \beta}.$

$x^{\pm 6\alpha}\, dx\, (a + bx^6)^{\frac{5}{6} \pm \beta}; \quad x^{4 \pm 6\alpha}\, dx\, (a + bx^6)^{\frac{1}{6} \pm \beta}.$

Anmerkung 2.

§. 110. Läßt sich auch die Formel $x^{m-1}\, dx\, (a + bx^n)^{\nu}$ nicht rational darstellen, so kann man dennoch immer die Integration aller Ausdrücke von der Form $x^{m \pm n\alpha - 1}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu} \pm \beta}$ auf dieselbe zurückführen, so zwar, daß die Integrale der letzten Ausdrücke angegeben werden können, wenn man das Integrale des ersten als bekannt ansieht; da diese Reduction in der Analysis äußerst nützlich ist, so müssen wir dieselbe hier aus einander setzen. Übrigens können wir ohne Bedenken behaupten, daß es außer jenen Fällen, für welche wir die Möglichkeit der Reduction auf eine rationale Form nachgewiesen haben, keine andern existiren, welche durch irgend eine Substitution von der Irrationalität befreyt werden können; denn wäre die Formel $\frac{a\, dx}{\sqrt{a + bx^3}}$ gegeben, so gibt es keine rationale Function von z, die, für x gesetzt, den Ausdruck $\sqrt{a + bx^3}$ rational macht. Man kann zwar einwenden, daß der Zweck erreicht werden könne, wenn auch eine irrationale Function von z statt x gesetzt werde, wenn nur im Nenner $\sqrt{a + bx^3}$ ein ähnlicher irrationaler Ausdruck vorkommt, welcher den irrationalen Coefficienten des Zählers dx aufhebt, wie dieß bey der Formel $\frac{dx}{\sqrt[3]{a + bx^3}}$ durch die Substitution $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{z^3 - b}}$ der Fall ist. Allein, es läßt sich auf keine Weise entdecken, wie der Kunstgriff, welcher hier so gute Dienste leistet, bey dem obigen Falle Anwendung finde; jedoch will ich nicht behaupten, daß dieß durchaus unmöglich sey.

Aufgabe 10.

§. 111. Die Integration der Formel

$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ auf die Integration der Formel

$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ zurück zu führen.

Auflösung.

Durch Differenziation der Function $x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ erhält man

$$\left(m a x^{m-1}\,dx + m b x^{m+n-1}\,dx + \frac{n(\mu+\nu)}{\nu} b x^{m+n-1}\,dx\right)(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

demnach ist

$$x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = m a \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$+ \frac{(m\nu+n\mu+n\nu)\,b}{\nu} \int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

und hieraus folgt

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m\nu+n\mu+n\nu)\,b}$$

$$- \frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)\,b} \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Zusatz 1.

§. 112. Aus der obigen Gleichung folgt auch

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m a}$$

$$- \frac{(m\nu+n\mu+n\nu)\,b}{m\nu a} \int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

und hieraus erhalten wir, wenn wir $m-n$ statt m schreiben, folgende Formel:

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m-n)\,a}$$

$$- \frac{(m\nu+n\mu)\,b}{(m-n)\,\nu a} \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Zusatz 2.

§. 113. Betrachtet man das Integrale $\int x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ als bekannt, so können auch alle Integrale von der Form

$$\int x^{m \pm n - 1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

oder allgemeiner die Integrale von der Form

$$\int x^{m \pm \alpha n - 1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$ bestimmt werden.

Aufgabe 11.

§. 114. Das Integrale $\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ auf das Integrale $\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ zurück zu führen.

Auflösung.

Das Differenziale der Function $x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ läßt sich auf die Form

$$\left[ma - \frac{(m\nu + n\mu + n\nu)a}{\nu}\right] x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$+ \frac{m\nu + n\mu + n\nu}{\nu} \,.\, x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

bringen, und hieraus folgt

$$x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = -\frac{(n\mu + n\nu)a}{\nu} \int x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$+ \frac{(m\nu + n\mu + n\nu)}{\nu} \int x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1},$$

woraus

$$\int x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu + n(\mu+\nu)}$$

$$+ \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu + n(\mu+\nu)} \int x^{m-1}\, dx\, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

erhalten wird.

und für die geraden Zahlen:

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2} + \frac{6}{7}\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ꝛc.

Weil nun

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin.}\,x \quad \text{und} \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

so erhalten wir folgende Integrale:

für das erste System

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6}x^5 + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{8}x^7 + \frac{1.7}{6.8}x^5 + \frac{1.5.7}{4.6.8}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{arc. sin.}\,x;$$

und für das zweyte System

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{2.4}{3.5}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{1.6}{5.7}x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

so erhalten wir daraus die Reductionsformel

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu b} - \frac{m\nu}{n\mu b}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}};$$

und wenn wir $m-n$ und $\mu+\nu$ statt m und μ setzen, die umgekehrte Formel

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m-n} - \frac{n(\mu+\nu)\,b}{\nu(m-n)}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Bey dieser Formel wird die Reduction auf ein Mahl bewerkstelliget, während die obigen Formeln eine doppelte Reduction erfordern; wir haben demnach sechs allerdings merkwürdige Reductionsformeln erhalten, welche wir hier zusammenstellen wollen:

$$\text{I.}\quad \int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{[m\nu+n(\mu+\nu)]\,b} - \frac{m\nu a}{[m\nu+n(\mu+\nu)]\,b}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{II.}\quad \int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m-n)\,a} - \frac{(m\nu+n\mu)\,b}{(m-n)\,\nu a}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{III.}\quad \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{-\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu+n(\mu+\nu)} + \frac{n(\mu+\nu)\,a}{m\nu+n(\mu+\nu)}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{IV.}\quad \int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{-\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu a} + \frac{m\nu+n\mu}{n\mu a}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

I. $\int x^{m+n-1} dx \, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu b}$

$- \frac{m\nu}{n\mu b} \int x^{m-1} dx \, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$

$\int x^{m-n-1} dx \, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m-n}$

$- \frac{n(\mu+\nu) b}{\nu (m-n)} \int x^{m-1} dx \, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$

Anmerkung 2.

§. 119. Bey diesen Reductionsformeln ist vorerst zu bemerken, i der erste Ausdruck algebraisch angebbar sey, wenn der Coefficient zweyten Integralausdruckes verschwindet. So erhält man bey

für $m=0$, $\int x^{n-1} dx \, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{n(\mu+\nu) b}$; bey

für $\frac{\mu}{\nu} = \frac{-m}{n}$, $\int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^{\frac{-m}{n}} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{-m}{n}+1}}{(m-n)a}$; bey

für $\frac{\mu}{\nu} = \frac{-m}{n}$, $\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{-m}{n}-1} = \frac{x^m (a+bx^n)^{\frac{-m}{n}}}{ma}$; bey

für $m=0$, $\int x^{n-1} dx \, (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{\nu (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu b}$.

Auch müssen die Fälle bemerkt werden, in welchen der Coefficient letzten Ausdruckes unendlich wird, denn dann findet die Reduction)t Statt, und der erste Ausdruck hat ein eigenes Integrale, wel- s für sich entwickelt werden muß; dieß ergibt sich bey der ersten For- [für $\frac{\mu+\nu}{\nu} = \frac{-m}{n}$, und der Ausdruck $x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{\frac{-m}{n}-1}$)t für $a+bx^n = x^n z^n$ oder $x^n = \frac{a}{z^n - b}$ über in $- \frac{z^{-m-1} dz}{z^n - b}$, sen Integrale nach dem ersten Hauptstücke bestimmt werden muß.

Derselbe Fall findet bey der zweyten Reductionsformel für $m=n$

Statt, und der Ausdruck $\frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ verwandelt sich fi $a+bx^n=z^\nu$ oder $x^n=\frac{z^\nu-a}{b}$ in $\frac{\nu z^{\mu+\nu-1}dz}{n(z^\nu-a)}$.

Bey der dritten Formel ereignet sich dieß, wenn $\frac{\mu}{\nu}=\frac{-m}{n}-1$ gese wird, und für $a+bx^n=x^nz^n$ oder $x^n=\frac{a}{z^n-b}$ geht $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)$ über in $\int\frac{-z^{-m-n-1}dz}{z^n-b}$, oder für $z=\frac{1}{u}$ wird

$$\int\frac{u^{m+2n-1}du}{1-bu^n}=\frac{-u^{m+n}}{(m+n)b}-\frac{u^m}{mb^2}+\frac{1}{b^2}\int\frac{u^{m-1}du}{a-bu^n}.$$

Bey der vierten Formel ergibt sich dieß für $\mu=0$, und der Au druck $\int\frac{x^{m-1}dx}{a+bx^n}$ ist für sich rational.

Bey der fünften Formel erfolgt es für $\mu=0$.

Bey der sechsten Formel aber für $m=n$, und der Ausdru $\int\frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ geht für $a+bx^n=z^\nu$ in $\frac{\nu}{n}\int\frac{z^{\mu+2\nu-1}d}{z^\nu-a}$ über.

Beyspiel 1.

§. 120. Das Integrale $\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu bestimmen wenn m positive Werthe hat.

Da hier $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $\mu=-1$, $\nu=2$, so gi die erste Reductionsformel

$$\int\frac{x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1}+\frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

und wir erhalten, je nachdem wir für m gerade oder ungerade Zahl setzen, für die ungeraden Zahlen:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

, , , , , , , , , , , , , , , , , ,

und für die geraden Zahlen:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2} + \frac{6}{7}\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ꝛc.

Weil nun

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin.}\,x \quad \text{und} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

so erhalten wir folgende Integrale:

für das erste System

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\,\text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6}x^5 + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{arc. sin.}\,x,$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{8}x^7 + \frac{1.7}{6.8}x^5 + \frac{1.5.7}{4.6.8}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\text{arc. sin.}\,x;$$

und für das zweyte System

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{2.4}{3.5}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{1.6}{5.7}x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

Zusatz 1.

§. 121. Wir erhalten also allgemein für das Integrale $\int \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, wenn wir der Kürze wegen $\frac{1 . 3 . 5 \ldots (2k-1)}{2 . 4 . 6 \ldots 2k} = K$ setzen, folgenden Ausdruck:

$$\int \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{1-x^2}} = K \operatorname{arc.sin.} x - K \left[x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7} x^7 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{2 . 4 . 6 \ldots (2k-2)}{3 . 5 . 7 \ldots (2k-1)} x^{2k-1} \right] \sqrt{1-x^2}.$$

Zusatz 2.

§. 122. Auf dieselbe Weise erhält man für $\int \frac{x^{2k+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, wenn der Kürze wegen $\frac{2 . 4 . 6 \ldots 2k}{3 . 5 . 7 \ldots (2k+1)} = L$ gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\int \frac{x^{2k+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = L - L \left[1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 . 3}{2 . 4} x^4 + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} x^6 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1 . 3 . 5 \ldots (2k-1)}{2 . 4 . 6 \ldots 2k} x^{2k} \right] \sqrt{1-x^2},$$

damit das Integrale für $x = 0$ verschwinde.

Beyspiel 2.

§. 123. Das Integrale $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu entwickeln, wenn m negative Zahlen bedeutet.

Hier bedienen wir uns der zweyten Reductionsformel, mit Hülfe derer wir finden

$$\int \frac{x^{m-3} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}}{m-2} + \frac{m-1}{m-2} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

woraus wir für $m = 1$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

erhalten. Für $m = 2$ geht $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ über in $\frac{-dz}{1-z^2}$, wenn $1 - x^2 = z^2$ gesetzt wird, dessen Integrale

$$-\frac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1}{2} l \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} = -l \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

ist; daher erhalten wir eine doppelte Reihe von Integrationen, nämlich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -l\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{4x^4} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{6x^6} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$$

2c.;

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

2c.

Behalten wir also die Bezeichnung wie in den beyden vorigen sätzen bey, so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{x^{2k+1}\sqrt{1-x^2}} = lK\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - K\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3.x^4} + \frac{2.4}{3.5.x^6} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{2.4\ldots(2k-2)}{3.5\ldots(2k-1)x^{2k}}\right]\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2k}\sqrt{1-x^2}} = C - L\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.x^3} + \frac{1.3}{2.4.x^5} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k.x^{2k+1}}\right]\sqrt{1-x^2}.$$

Anmerkung 1.

§. 124. Nun ist es nicht schwer, das Integrale $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}$ alle Werthe von m, und für alle ungeraden Werthe von μ anzu- en. Unsere allgemeinen Reductionsformeln, für diesen Zweck ein- ichtet, sind folgende:

$$\int x^{m+1}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} = \frac{-x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m+\mu+2} + \frac{m}{m+\mu+2}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

$$\int x^{m-3}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} = \frac{x^{m-2}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m-2} + \frac{m+\mu}{m-2}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

Kapitel III.

Von der Integration der Differenzialformeln mittelst unendli[illegible] Reihen.

Aufgabe 12.

§. 126. Das Integrale der Differenzialform[illegible] $dy = Xdx$ durch eine unendliche Reihe darzustelle[illegible] wenn X eine rationale gebrochene Function von x [illegible] zeichnet.

Auflösung.

Weil X eine rationale gebrochene Function ist, so läßt sich [illegible] Werth immer so darstellen, daß

$$X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \ldots$$

werde, wobey die Coefficienten A, B, C 2c. eine recurrente Re[illegible] bilden, welche aus dem Nenner des Bruches zu bestimmen ist. M[illegible] multiplicire demnach die einzelnen Glieder durch dx, und integrire [illegible] Producte, wodurch das Integral y durch folgende unendliche Rei[illegible] dargestellt erhalten wird:

$$y = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{2c.} + \text{Const.},$$

wobey das Glied $M\,lx$ erscheinen wird, wenn in der Reihe für X ein Glied von der Form $\frac{M}{x}$ vorkömmt.

Anmerkung.

§. 127. Weil das Integrale $\int X dx$, wenn es nicht algebrais[illegible] angebbar ist, durch Logarithmen und Winkel dargestellt werden kan[illegible] so lassen sich die Werthe der Logarithmen und Winkel durch unendli[illegible] Reihen ausdrücken. Mehrere solche Reihen sind schon in der Einle[illegible] tung zur höheren Analysis gelehrt worden; allein nicht nur diese, s[illegible] dern auch unzählige andere können hier durch Integration abgel[illegible] werden. Wir wollen uns damit begnügen, dieß durch Beyspiele zu e[illegible] läutern, wobey wir vorzüglich solche Formeln entwickeln wollen, dere[illegible] Nenner zweytheilig ist; dann aber werden wir auch einige solche Fä[illegible]

so erhält man, wenn $\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}} = y$ gesetzt wird:

$$y + \frac{R}{Q^n} = \int \frac{P\,dx + Q\,dR - nR\,dQ}{Q^{n+1}}.$$

Nun bestimme man R so, daß $P\,dx + Q\,dR - nR\,dQ$ durch Q theilbar werde, oder weil $Q\,dR$ schon den Factor Q enthält, daß $P\,dx - nR\,dQ = QT\,dx$ werde, so erhält man

$$y + \frac{R}{Q^n} = \int \frac{dR + T\,dx}{Q^n} \quad \text{oder}$$

$$\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}} = -\frac{R}{Q^n} + \int \frac{dR + T\,dx}{Q^n}.$$

Die Function R läßt sich immer so bestimmen, daß $P\,dx - nR\,dQ$ den Factor Q enthält; läßt sich dieß gleichwohl im Allgemeinen nicht zeigen, so wird man in bestimmten Fällen durch einen leichten Versuch gleich einsehen, daß jene Bestimmung immer gelingt. Ich nehme hier P und Q als ganze Functionen an, mithin wird sich auch R als eine solche Function darstellen lassen. Wäre zufällig $dR + T\,dx = 0$, so ist das Integrale der vorgelegten Formel algebraisch, welches auf dem angezeigten Wege gefunden wird. Im entgegengesetzten Falle aber läßt sich unsere Formel auf andere Brüche zurückführen, bey welchen der Exponent des Nenners immer um eine Einheit abnimmt. Wäre n eine ganze Zahl, so kömmt man am Ende auf einen Ausdruck von der Form $\frac{V\,dx}{Q}$, welche unstreitig die einfachste ist. Da wir in diesem Kapitel kaum einen anderen Kunstgriff angeben können, durch welchen die Integration der irrationalen Formeln bewerkstelligt wird, so wollen wir nun die Methode zeigen, diese Integrationen durch unendliche Reihen auszuführen.

Es ist aber

$$\int \frac{-2x\,dx}{a^2 - x^2} = l(a^2 - x^2) - l\,a^2 \quad \text{und} \quad \int \frac{2a\,dx}{a^2 - x^2} = l\,\frac{a+x}{a-x},$$

so daß wir diese Formeln nicht mehr durch Reihen zu integriren brauchen.

Beyspiel 2.

§. 131. Die Differenzialformel $\frac{a\,dx}{a^2 + x^2}$ durch eine Reihe zu integriren.

Es sey $dy = \frac{a\,dx}{a^2 + x^2}$, so wird sich, weil $y = \text{arc. tg.}\ \frac{x}{a}$, dieser Winkel durch eine unendliche Reihe ausdrücken lassen. Weil nämlich

$$\frac{a}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \text{ꝛc.},$$

so erhält man durch Integration

$$y = \text{arc. tg.}\ \frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ꝛc.}$$

Beyspiel 3.

§. 132. Die Integrale der Formeln $\frac{dx}{1+x^3}$ und $\frac{x\,dx}{1+x^3}$ durch Reihen darzustellen.

Weil $\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \text{ꝛc.}$, so ist

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = x - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{13}x^{13} - \text{ꝛc.} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{8}x^8 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{14}x^{14} - \text{ꝛc.}$$

Allein nach §. 77 erhalten wir mit Hülfe der Logarithmen und Winkel

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\,l(1+x) - \tfrac{2}{3}\cos.\frac{\pi}{3}\,l\sqrt{1 - 2x\cos.\frac{\pi}{3} + x^2}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\sin.\frac{\pi}{3}\ \text{arc. tg.}\ \frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1 - x\cos.\frac{\pi}{3}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = -\tfrac{1}{3}\,l(1+x) - \tfrac{2}{3}\cos.\frac{2\pi}{3}\,l\sqrt{1 - 2x\cos.\frac{\pi}{3} + x^2}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\sin.\frac{2\pi}{3}\ \text{arc. tg.}\ \frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1 - x\cos.\frac{\pi}{3}},$$

geht X in eine rationale Function von u über, welche $= U$ gesetzt, uns wie früher $dy = \frac{1}{2} U u^{n-2} du (u^2 + 1)$ gibt.

Beyspiel.

Die vorgelegte Formel sey

$$dy = [ax + b\sqrt{1 + x^2}] \cdot [x + \sqrt{1 + x^2}]^n dx,$$

so wird, indem man $x = \frac{u^2 - 1}{2u}$ setzt:

$$dy = \left[\frac{a(u^2 - 1) + b(u^2 + 1)}{2u}\right] \cdot \frac{1}{2} u^{n-2} du (u^2 + 1) \text{ oder}$$

$$dy = \frac{1}{4} u^{n-3} du [a(u^4 - 1) + b(u^4 + 2u^2 + 1)],$$

und dessen Integrale ist

$$y = \frac{a + b}{4(n + 2)} u^{n+2} + \frac{b}{2n} u^n + \frac{b - a}{4(n - 2)} u^{n-2} + \text{Const.},$$

welches immer algebraisch ist, wenn nicht etwa $n = 2$, $n = -2$ oder $n = 0$ ist.

Kapitel III.

Von der Integration der Differenzialformeln mittelst unendlicher Reihen.

Aufgabe 12.

§. 126. Das Integrale der Differenzialformel $dy = Xdx$ durch eine unendliche Reihe darzustellen, wenn X eine rationale gebrochene Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Weil X eine rationale gebrochene Function ist, so läßt sich ihr Werth immer so darstellen, daß

$$X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{etc.}$$

werde, wobey die Coefficienten A, B, C etc. eine recurrente Reihe bilden, welche aus dem Nenner des Bruches zu bestimmen ist. Man multiplicire demnach die einzelnen Glieder durch dx, und integrire die Producte, wodurch das Integral y durch folgende unendliche Reihe dargestellt erhalten wird:

$$y = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.} + \text{Const.},$$

wobey das Glied Mlx erscheinen wird, wenn in der Reihe für X ein Glied von der Form $\frac{M}{x}$ vorkömmt.

Anmerkung.

§. 127. Weil das Integrale $\int Xdx$, wenn es nicht algebraisch angebbar ist, durch Logarithmen und Winkel dargestellt werden kann, so lassen sich die Werthe der Logarithmen und Winkel durch unendliche Reihen ausdrücken. Mehrere solche Reihen sind schon in der Einleitung zur höheren Analysis gelehrt worden; allein nicht nur diese, sondern auch unzählige andere können hier durch Integration abgeleitet werden. Wir wollen uns damit begnügen, dieß durch Beyspiele zu erläutern, wobey wir vorzüglich solche Formeln entwickeln wollen, deren Nenner zweytheilig ist; dann aber werden wir auch einige solche Fälle

tachten, bey welchen der Nenner drey- oder mehrgliedrig ist. Vor-
lich wollen wir solche Beyspiele auswählen, bey welchen der Bruch
einen anderen mit einem zweytheiligen Nenner verwandelt werden
n.

Beyspiel 1.

§. 128. Die Differenzialformel $\frac{dx}{a+x}$ mittelst einer
eihe zu integriren.

Es sey $y = \int \frac{dx}{a+x}$, so ist $y = l(a+x) + \text{Const.}$; also,
nn man das Integrale so bestimmt, daß es für $x = o$ verschwindet:
$= l(a+x) - la$. Weil nun

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \text{etc.},$$

erhält man, wenn das Integrale nach demselben Gesetze bestimmt
d:

$$y = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.},$$

hieraus folgern wir die bereits bekannte Formel

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}$$

Zusatz 1.

§. 129. Nehmen wir x negativ, so daß $dy = \frac{-dx}{a-x}$, so erhält
n auf dieselbe Weise

$$l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \text{etc.},$$

durch Verbindung beyder Formeln

$$l(a^2 - x^2) = 2la - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{2a^4} - \frac{x^6}{3a^6} - \frac{x^8}{4a^8} - \text{etc.} \text{ und}$$

$$l\frac{a+x}{a-x} = \frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} + \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 130. Diese beyden letzten Reihen werden auch erhalten durch
tegration der Formeln

$$\frac{-2x\,dx}{a^2 - x^2} = -2x\,dx\left(\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \text{etc.}\right) \text{ und}$$

$$\frac{2a\,dx}{a^2 - x^2} = 2a\,dx\left(\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \text{etc.}\right).$$

Es ist aber

$$\int \frac{-2x\,dx}{a^2-x^2} = l(a^2-x^2) - l\,a^2 \quad \text{und} \quad \int \frac{2a\,dx}{a^2-x^2} = l\,\frac{a+x}{a-x},$$

so daß wir diese Formeln nicht mehr durch Reihen zu integriren brauchen.

Beyspiel 2.

§. 131. Die Differenzialformel $\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$ durch eine Reihe zu integriren.

Es sey $dy = \frac{a\,dx}{a^2+x^2}$, so wird sich, weil $y = \text{arc. tg.}\,\frac{x}{a}$, eben dieser Winkel durch eine unendliche Reihe ausdrücken lassen. Weil nämlich

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \text{rc.},$$

so erhält man durch Integration

$$y = \text{arc. tg.}\,\frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{rc.}$$

Beyspiel 3.

§. 132. Die Integrale der Formeln $\frac{dx}{1+x^3}$ und $\frac{x\,dx}{1+x^3}$ durch Reihen darzustellen.

Weil $\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \text{rc.}$, so ist

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = x - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{13}x^{13} - \text{rc.} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{8}x^8 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{14}x^{14} - \text{rc.}$$

Allein nach §. 77 erhalten wir mit Hülfe der Logarithmen und Winkel

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}\,l(1+x) - \tfrac{2}{3}\cos.\frac{\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos.\frac{\pi}{3}+x^2}$$

$$+ \tfrac{2}{3}\sin.\frac{\pi}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1-x\cos.\frac{\pi}{3}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = -\tfrac{1}{3}\,l(1+x) - \tfrac{2}{3}\cos.\frac{2\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos.\frac{\pi}{3}+x^2}$$

$$+ \tfrac{2}{3}\sin.\frac{2\pi}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1-x\cos.\frac{\pi}{3}},$$

Da aber

$$\cos.\frac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2},\ \cos.\frac{2\pi}{3}=-\tfrac{1}{2},\ \sin.\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin.\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

so erhält man

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\tfrac{1}{3}l(1+x)-\tfrac{1}{3}l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x},$$

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}=-\tfrac{1}{3}l(1+x)+\tfrac{1}{3}l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x},$$

wenn die Integrale und Reihen so bestimmt werden, daß sie für $x=0$ verschwinden.

Zusatz 1.

§. 133. Addirt man diese Reihen, so erhält man

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}=x+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{8}x^8-\tfrac{1}{10}x^{10}-\tfrac{1}{11}x^{11}+\ldots$$

Durch Subtraction der letztern Reihe von der erstern aber findet man

$$\tfrac{2}{3}l\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}=x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{1}{8}x^8-\tfrac{1}{10}x^{10}+\tfrac{1}{11}x^{11}+\ldots,$$

welche Reihe auch den Werth von

$$\tfrac{1}{3}l\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}=\tfrac{1}{3}l\frac{(1+x)^3}{1+x^3}\ \text{enthält.}$$

Zusatz 2.

§. 134. Weil $\int\frac{x^2dx}{1+x^3}=\tfrac{1}{3}l(1+x^3)$, so findet man auf demselben Wege

$$\tfrac{1}{3}l(1+x^3)=\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{6}x^6+\tfrac{1}{9}x^9-\tfrac{1}{12}x^{12}+\ldots.$$

Verbindet man diese Reihe mit denen des vorigen Zusatzes, so erscheinen im Resultate alle Potenzen von x.

Beyspiel 4.

§. 135. Das Integrale $y=\int\frac{(1+x^2)dx}{1+x^4}$ durch eine Reihe darzustellen.

Weil $\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+x^{16}-$ ꝛc., so wird

$$y=x+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9+\tfrac{1}{11}x^{11}-\tfrac{1}{13}x^{13}-\tfrac{1}{15}x^{15}+\text{ꝛc.}$$

Setzt man aber in §. 82 $m=1$, $n=4$ und $\frac{\pi}{4}=\omega$, so erhält eben dieses Integral die Form

$$y=\sin.\omega\,.\,\text{arc. tg.}\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega}+\sin.3\omega\,.\,\text{arc. tg.}\frac{x\sin.3\omega}{1-x\cos.3\omega};$$

weil nun $\frac{\pi}{4}=\omega=45^\circ$, so ist

$$\sin.\omega=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos.\omega=\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin.3\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{und}\ \cos.3\omega=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

wir erhalten demnach

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc. tg.}\frac{x}{\sqrt{2}-x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc. tg.}\frac{x}{\sqrt{2}+x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Beyspiel 5.

§. 136. **Das Integrale $y=\int\frac{(1+x^4)dx}{1+x^6}$ durch eine Reihe darzustellen.**

Es ist $\frac{1}{1+x^6}=1-x^6+x^{12}-x^{18}+x^{24}-$ ꝛc., demnach

$$y=x+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{1}{11}x^{11}+\tfrac{1}{13}x^{13}+\tfrac{1}{17}x^{17}-\text{ꝛc.}$$

Setzt man aber in §. 82 $m=1$, $n=6$ und $\omega=\frac{\pi}{6}=30^\circ$, so ist

$$y=\tfrac{2}{3}\sin.\omega\ \text{arc. tg.}\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega}+\tfrac{2}{3}\sin.3\omega\ \text{arc. tg.}\frac{x\sin.3\omega}{1-x\cos.3\omega}$$
$$+\tfrac{2}{3}\sin.5\omega\ \text{arc. tg.}\frac{x\sin.5\omega}{1-x\cos.5\omega};$$

oder, weil $\sin.\omega=\frac{1}{2}$, $\cos.\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin.3\omega=1$, $\cos.3\omega=0$; $\sin.5\omega=\frac{1}{2}$, $\cos.5\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$y=\tfrac{1}{3}\text{arc. tg.}\frac{x}{2-x\sqrt{3}}+\tfrac{2}{3}\text{arc. tg.}x+\tfrac{1}{3}\text{arc. tg.}\frac{x}{2+x\sqrt{3}}\ \text{oder}$$

$$y=\tfrac{1}{3}\text{arc. tg.}\frac{x}{1-x^2}+\tfrac{2}{3}\text{arc. tg.}x=\tfrac{1}{3}\text{arc. tg.}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$$

Zusatz 1.

§. 137. Sey $z=\int\frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{15}x^{15}-\frac{1}{21}x^{21}+$ ꝛc., so wird für $x^3=u$:

$$z=\tfrac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}=\tfrac{1}{3}\text{arc. tg.}u=\tfrac{1}{3}\text{arc. tg.}x^3.$$

Wir erhalten sonach folgende gemischte Reihe

$$x + \frac{n}{3} x^3 + \tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{7} x^7 - \frac{n}{9} x^9 - \tfrac{1}{11} x^{11} + \tfrac{1}{13} x^{13} + \frac{n}{15} x^{15} + \tfrac{1}{17} x^{17} - \text{ic.}$$

deren Summe gleich

$$\tfrac{1}{3} \text{ arc. tang. } \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} + \frac{n}{3} \text{ arc. tang. } x^3.$$

Zusatz 2.

§. 138. Setzt man $n = -1$, und reducirt die beyden Winkel auf einen, so erhält man

$$\tfrac{1}{3} \text{ arc. tg. } \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} - \tfrac{1}{3} \text{ arc. tg. } x^3 = \tfrac{1}{3} \text{ arc. tg. } \frac{3x-4x^3+4x^5-x^7}{1-4x^2+4x^4-3x^6};$$

welcher Bruch, durch $1-x^2+x^4$ abgekürzt, den Ausdruck $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ gibt, welcher die Tangente des dreyfachen Winkels, dessen Tangente $=x$ ist, bezeichnet, so daß

$$\tfrac{1}{3} \text{ arc. tg. } \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \text{arc. tg. } x$$

ist, was die oben gefundene Reihe ebenfalls andeutet.

Beyspiel 6.

§. 139. Die Formel $dy = \frac{(x^{m-1} + x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n}$ mittelst einer Reihe zu integriren.

Weil $\frac{1}{1+x^n} = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n} - \text{ic.}$, so wird

$$y = \frac{x^m}{m} + \frac{x^{n-m}}{n-m} - \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} + \frac{x^{3n-m}}{3n-m} - \text{ic.}$$

Diese Reihe bezeichnet demnach ein Aggregat mehrerer Kreisbogen, wie aus §. 82 ersichtlich ist.

Zusatz.

§. 140. Wenn die Formel $dz = \frac{(x^{m-1} - x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n}$ zu integriren ist, so findet man wegen

$$\frac{1}{1-x^n} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{ic.}$$

auf dieselbe Art

$$dy = \frac{2udu}{\sqrt{u^2 - u^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1 - u^2}}, \text{ mithin}$$

$$y = 2 \text{ arc. sin. } u = 2 \text{ arc. sin. } \sqrt{x}.$$

Mittelst der Reihe aber wird

$$y = 2\left(u + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{u^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{u^7}{7} + \text{zc.}\right) \text{ oder}$$

$$y = 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{7} + \text{zc.}\right)\sqrt{x}.$$

Beyspiel 2.

§. 151. Man entwickle das Integrale der Form $dy = dx\sqrt{2ax - x^2}$ durch eine Reihe.

Setzt man $x = u^2$, so wird $dy = 2u^2 du\sqrt{2a - u^2}$; setzt man aber in der Reductionsformel I. (§. 118) $n = 2$, $m = 1$, $a = 2a$, $b = -1$, $\mu = 1$ und $\nu = 2$, so erhält man

$$\int u^2 du\sqrt{2a - u^2} = -\tfrac{1}{4}u(2a - u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a\int du\sqrt{2a - u^2}.$$

Setzt man in der dritten Reductionsformel $m = 1$, $a = 2a$, $b = -1$, $n = 2$, $\mu = -1$ und $\nu = 2$, so erhält man

$$\int du\sqrt{2a - u^2} = \tfrac{1}{2}u\sqrt{2a - u^2} + a\int\frac{du}{\sqrt{2a - u^2}}.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{du}{\sqrt{2a - u^2}} = \text{arc. sin. } \frac{u}{\sqrt{2a}} = \text{arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}},$$

und daher

$$\int u^2 du\sqrt{2a - u^2} = -\tfrac{1}{4}u(2a - u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}au\sqrt{2a - u^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$$

$$= \tfrac{1}{4}u(u^2 - a)\sqrt{2a - u^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$$

folglich $y = \tfrac{1}{2}(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$.

Um aber die unendliche Reihe zu finden, setze man

$$dy = dx\sqrt{2ax} \cdot \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} dx\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} - \text{zc.}\right)\sqrt{2a}$$

und demnach ist durch Integration

so erhält man, wenn $\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}} = y$ gesetzt wird:

$$y + \frac{R}{Q^n} = \int \frac{P\,dx + Q\,dR - nR\,dQ}{Q^{n+1}}.$$

Nun bestimme man R so, daß $P\,dx + Q\,dR - nR\,dQ$ durch Q theilbar werde, oder weil $Q\,dR$ schon den Factor Q enthält, daß $P\,dx - nR\,dQ = QT\,dx$ werde, so erhält man

$$y + \frac{R}{Q^n} = \int \frac{dR + T\,dx}{Q^n} \quad \text{oder}$$

$$\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}} = -\frac{R}{Q^n} + \int \frac{dR + T\,dx}{Q^n}.$$

Die Function R läßt sich immer so bestimmen, daß $Pdx - nRdQ$ den Factor Q enthält; läßt sich dieß gleichwohl im Allgemeinen nicht zeigen, so wird man in bestimmten Fällen durch einen leichten Versuch gleich einsehen, daß jene Bestimmung immer gelingt. Ich nehme hier P und Q als ganze Functionen an, mithin wird sich auch R als eine solche Function darstellen lassen. Wäre zufällig $dR + T\,dx = 0$, so ist das Integrale der vorgelegten Formel algebraïsch, welches auf dem angezeigten Wege gefunden wird. Im entgegengesetzten Falle aber läßt sich unsere Formel auf andere Brüche zurückführen, bey welchen der Exponent des Nenners immer um eine Einheit abnimmt. Wäre n eine ganze Zahl, so kömmt man am Ende auf einen Ausdruck von der Form $\frac{V\,dx}{Q}$, welche unstreitig die einfachste ist. Da wir in diesem Kapitel kaum einen anderen Kunstgriff angeben können, durch welchen die Integration der irrationalen Formeln bewerkstelligt wird, so wollen wir nun die Methode zeigen, diese Integrationen durch unendliche Reihen auszuführen.

Anhang.

Aufgabe.

Das Integral der Formel $dy = [x + \sqrt{1+x^2}]^n dx$ anzugeben.

Auflösung.

Setzt man $x + \sqrt{1+x^2} = u$, so wird

$$x = \frac{u^2-1}{2u} \text{ und } dx = \frac{du(u^2+1)}{2u^2},$$

wodurch unsere Formel in $dy = \frac{1}{2} u^{n-2} du (u^2+1)$, und deren Integral in

$$y = \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \text{Const.}$$

übergeht, welches also immer algebraisch ist, die Fälle $n = 1$ und $n = -1$ ausgenommen.

Zusatz 1.

Es ist einleuchtend, daß auf dieselbe Weise auch die allgemeinere Formel $dy = (x + \sqrt{1+x^2})^n X dx$ integrirt werden könne, sobald X eine rationale Function von x bezeichnet. Setzt man nämlich $x = \frac{u^2-1}{2u}$, so geht X in eine rationale Function von u über, welche wir durch U bezeichnen wollen, und es wird

$$dy = \frac{1}{2} U u^{n-2} du (u^2+1),$$

welche Formel entweder selbst rational ist, wenn nämlich n eine ganze Zahl bezeichnet, oder wenn das nicht der Fall ist, leicht auf eine rationale Form gebracht werden kann.

Zusatz 2.

Da dem Vorigen zu Folge $\sqrt{1+x^2} = \frac{u^2+1}{2u}$, so wird, wenn man kurz $\sqrt{1+x^2}$ durch v bezeichnet, auch die Formel

$$dy = [x + \sqrt{1+x^2}]^n X dx$$

integrirt werden können, wenn X was immer für eine rationale Function der Größen x und v bedeutet. Denn setzt man $x = \frac{u^2-1}{2u}$, so

geht X in eine rationale Function von u über, welche $= U$ gesetzt, uns wie früher $dy = \frac{1}{2} U u^{n-2} du (u^2 + 1)$ gibt.

Beyspiel.

Die vorgelegte Formel sey

$$dy = [ax + b\sqrt{1 + x^2}] . [x + \sqrt{1 + x^2}]^n dx,$$

so wird, indem man $x = \frac{u^2 - 1}{2u}$ setzt:

$$dy = \left[\frac{a(u^2 - 1) + b(u^2 + 1)}{2u}\right] . \frac{1}{2} u^{n-2} du (u^2 + 1) \text{ oder}$$

$$dy = \frac{1}{4} u^{n-3} du [a(u^4 - 1) + b(u^4 + 2u^2 + 1)],$$

und dessen Integrale ist

$$y = \frac{a+b}{4(n+2)} u^{n+2} + \frac{b}{2n} u^n + \frac{b-a}{4(n-2)} u^{n-2} + \text{Const.},$$

welches immer algebraisch ist, wenn nicht etwa $n = 2$, $n = -2$ oder $n = 0$ ist.

Kapitel III.

Von der Integration der Differenzialformeln mittelst unendlicher Reihen.

Aufgabe 12.

§. 126. Das Integrale der Differenzialformel $dy = Xdx$ durch eine unendliche Reihe darzustellen, wenn X eine rationale gebrochene Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Weil X eine rationale gebrochene Function ist, so läßt sich ihr Werth immer so darstellen, daß

$$X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{etc.}$$

werde, wobey die Coefficienten A, B, C etc. eine recurrente Reihe bilden, welche aus dem Nenner des Bruches zu bestimmen ist. Man multiplicire demnach die einzelnen Glieder durch dx, und integrire die Producte, wodurch das Integral y durch folgende unendliche Reihe dargestellt erhalten wird:

$$y = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{etc.} + \text{Const.},$$

wobey das Glied Mlx erscheinen wird, wenn in der Reihe für X ein Glied von der Form $\frac{M}{x}$ vorkömmt.

Anmerkung.

§. 127. Weil das Integrale $\int Xdx$, wenn es nicht algebraisch angebbar ist, durch Logarithmen und Winkel dargestellt werden kann, so lassen sich die Werthe der Logarithmen und Winkel durch unendliche Reihen ausdrücken. Mehrere solche Reihen sind schon in der Einleitung zur höheren Analysis gelehrt worden; allein nicht nur diese, sondern auch unzählige andere können hier durch Integration abgeleitet werden. Wir wollen uns damit begnügen, dieß durch Beyspiele zu erläutern, wobey wir vorzüglich solche Formeln entwickeln wollen, deren Nenner zweytheilig ist; dann aber werden wir auch einige solche Fälle

rachten, bey welchen der Nenner drey= oder mehrgliedrig ist. Vor-
glich wollen wir solche Beyspiele auswählen, bey welchen der Bruch
einen anderen mit einem zweytheiligen Nenner verwandelt werden
nn.

Beyspiel 1.

§. 128. **Die Differenzialformel $\frac{dx}{a+x}$ mittelst einer
eihe zu integriren.**

Es sey $y = \int \frac{dx}{a+x}$, so ist $y = l(a+x) + Const.$; also,
nn man das Integrale so bestimmt, daß es für $x=o$ verschwindet:
$= l(a+x) - la$. Weil nun

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \text{ꝛc.},$$

erhält man, wenn das Integrale nach demselben Gesetze bestimmt
rd:

$$y = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ꝛc.},$$

d hieraus folgern wir die bereits bekannte Formel

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ꝛc.}$$

Zusatz 1.

§. 129. Nehmen wir x negativ, so daß $dy = \frac{-dx}{a-x}$, so erhält
n auf dieselbe Weise

$$l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \text{ꝛc.},$$

) durch Verbindung beyder Formeln

$$l(a^2 - x^2) = 2la - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{2a^4} - \frac{x^6}{3a^6} - \frac{x^8}{4a^8} - \text{ꝛc. und}$$

$$l\frac{a+x}{a-x} = \frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} + \text{ꝛc.}$$

Zusatz 2.

§. 130. Diese beyden letzten Reihen werden auch erhalten durch
tegration der Formeln

$$\frac{-2xdx}{a^2-x^2} = -2xdx\left(\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \text{ꝛc.}\right) \text{ und}$$

$$\frac{2adx}{a^2-x^2} = 2adx\left(\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \text{ꝛc.}\right).$$

Es ist aber

$$\int \frac{-2x\,dx}{a^2-x^2} = l(a^2-x^2) - l a^2 \quad \text{und} \quad \int \frac{2a\,dx}{a^2-x^2} = l\frac{a+x}{a-x},$$

so daß wir diese Formeln nicht mehr durch Reihen zu integriren brauchen.

Beyspiel 2.

§. 131. **Die Differenzialformel $\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$ durch eine Reihe zu integriren.**

Es sey $dy = \frac{a\,dx}{a^2+x^2}$, so wird sich, weil $y = \text{arc. tg.}\,\frac{x}{a}$, eben dieser Winkel durch eine unendliche Reihe ausdrücken lassen. Weil nämlich

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \text{ꝛc.},$$

so erhält man durch Integration

$$y = \text{arc. tg.}\,\frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{ꝛc.}$$

Beyspiel 3.

§. 132. **Die Integrale der Formeln $\frac{dx}{1+x^3}$ und $\frac{x\,dx}{1+x^3}$ durch Reihen darzustellen.**

Weil $\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \text{ꝛc.}$, so ist

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = x - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{10}x^{10} + \tfrac{1}{13}x^{13} - \text{ꝛc.} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{8}x^8 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{14}x^{14} - \text{ꝛc.}$$

Allein nach §. 77 erhalten wir mit Hülfe der Logarithmen und Winkel

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \tfrac{1}{3}l(1+x) - \tfrac{2}{3}\cos.\frac{\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos.\frac{\pi}{3}+x^2}$$

$$+ \tfrac{2}{3}\sin.\frac{\pi}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1-x\cos.\frac{\pi}{3}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = -\tfrac{1}{3}l(1+x) - \tfrac{2}{3}\cos.\frac{2\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos.\frac{\pi}{3}+x^2}$$

$$+ \tfrac{2}{3}\sin.\frac{2\pi}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{x\sin.\frac{\pi}{3}}{1-x\cos.\frac{\pi}{3}},$$

Da aber

$$\cos.\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \cos.\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin.\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin.\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

so erhält man

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}l(1+x)-\frac{1}{3}l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x},$$

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}l(1+x)+\frac{1}{3}l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x},$$

wenn die Integrale und Reihen so bestimmt werden, daß sie für $x=0$ verschwinden.

Zusatz 1.

§. 133. Addirt man diese Reihen, so erhält man

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc. tg.}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{10}x^{10}-\frac{1}{11}x^{11}+\ldots$$

Durch Subtraction der letztern Reihe von der erstern aber findet man

$$\frac{2}{3}l\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{11}x^{11}+\ldots,$$

welche Reihe auch den Werth von

$$\frac{1}{3}l\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}l\frac{(1+x)^3}{1+x^3}\ \text{enthält.}$$

Zusatz 2.

§. 134. Weil $\int\frac{x^2dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}l(1+x^3)$, so findet man auf demselben Wege

$$\frac{1}{3}l(1+x^3)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{12}x^{12}+\ldots.$$

Verbindet man diese Reihe mit denen des vorigen Zusatzes, so erscheinen im Resultate alle Potenzen von x.

Beyspiel 4.

§. 135. Das Integrale $y=\int\frac{(1+x^2)dx}{1+x^4}$ durch eine Reihe darzustellen.

Weil $\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+x^{16}-$ ꝛc., so wird

$$y=x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{11}x^{11}-\frac{1}{13}x^{13}-\frac{1}{15}x^{15}+\text{ꝛc.}$$

Setzt man aber in §. 82 $m = 1$, $n = 4$ und $\frac{\pi}{4} = \omega$, so erhält eben dieses Integral die Form

$$y = \sin.\omega \,.\, \text{arc.tg.}\frac{x \sin.\omega}{1 - x\cos.\omega} + \sin.3\omega \,.\, \text{arc.tg.}\frac{x\sin.3\omega}{1 - x\cos.3\omega};$$

weil nun $\frac{\pi}{4} = \omega = 45^\circ$, so ist

$$\sin.\omega = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos.\omega = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin.3\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } \cos.3\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

wir erhalten demnach

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc.tg.}\frac{x}{\sqrt{2} - x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc.tg.}\frac{x}{\sqrt{2} + x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc.tg.}\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}.$$

Beyspiel 5.

§. 136. **Das Integrale** $y = \int \frac{(1 + x^4)\,dx}{1 + x^6}$ **durch eine Reihe darzustellen.**

Es ist $\frac{1}{1 + x^6} = 1 - x^6 + x^{12} - x^{18} + x^{24} - $ etc., demnach

$$y = x + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{17}x^{17} - \text{etc.}$$

Setzt man aber in §. 82 $m = 1$, $n = 6$ und $\omega = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, so ist

$$y = \tfrac{2}{3}\sin.\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.\omega}{1 - x\cos.\omega} + \tfrac{2}{3}\sin.3\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.3\omega}{1 - x\cos.3\omega}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\sin.5\omega\ \text{arc.tg.}\frac{x\sin.5\omega}{1 - x\cos.5\omega};$$

oder, weil $\sin.\omega = \frac{1}{2}$, $\cos.\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin.3\omega = 1$, $\cos.3\omega = 0$; $\sin.5\omega = \frac{1}{2}$, $\cos.5\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$y = \tfrac{1}{3}\text{arc.tg.}\frac{x}{2 - x\sqrt{3}} + \tfrac{2}{3}\text{arc.tg.}x + \tfrac{1}{3}\text{arc.tg.}\frac{x}{2 + x\sqrt{3}} \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{3}\text{arc.tg.}\frac{x}{1 - x^2} + \tfrac{2}{3}\text{arc.tg.}x = \tfrac{1}{3}\text{arc.tg.}\frac{3x(1 - x^2)}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

Zusatz 1.

§. 137. Sey $z = \int \frac{x^2\,dx}{1 + x^6} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{21}x^{21} + $ etc., so wird für $x^3 = u$:

$$z = \tfrac{1}{3}\int \frac{du}{1 + u^2} = \tfrac{1}{3}\text{arc.tg.}u = \tfrac{1}{3}\text{arc.tg.}x^3.$$

Wir erhalten sonach folgende gemischte Reihe

$$x + \frac{n}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{n}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + \frac{n}{15}x^{15} + \frac{1}{17}x^{17} - \text{rc.}$$

deren Summe gleich

$$\frac{1}{3}\,\text{arc. tang.}\,\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} + \frac{n}{3}\,\text{arc. tang.}\,x^3.$$

Zusatz 2.

§. 138. Setzt man $n = -1$, und reducirt die beyden Winkel auf einen, so erhält man

$$\frac{1}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} - \frac{1}{3}\,\text{arc. tg.}\,x^3 = \frac{1}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{3x-4x^3+4x^5-x^7}{1-4x^2+4x^4-3x^6};$$

welcher Bruch, durch $1-x^2+x^4$ abgekürzt, den Ausdruck $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ gibt, welcher die Tangente des dreyfachen Winkels, dessen Tangente $=x$ ist, bezeichnet, so daß

$$\frac{1}{3}\,\text{arc. tg.}\,\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \text{arc. tg.}\,x$$

ist, was die oben gefundene Reihe ebenfalls andeutet.

Beyspiel 6.

§. 139. Die Formel $dy = \frac{(x^{m-1} + x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n}$ mittelst einer Reihe zu integriren.

Weil $\frac{1}{1+x^n} = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n} - \text{rc.}$, so wird

$$y = \frac{x^m}{m} + \frac{x^{n-m}}{n-m} - \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} + \frac{x^{3n-m}}{3n-m} - \text{rc.}$$

Diese Reihe bezeichnet demnach ein Aggregat mehrerer Kreisbogen, wie aus §. 82 ersichtlich ist.

Zusatz.

§. 140. Wenn die Formel $dz = \frac{(x^{m-1} - x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n}$ zu integriren ist, so findet man wegen

$$\frac{1}{1-x^n} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{rc.}$$

auf dieselbe Art

$$z = \frac{x^m}{m} - \frac{x^{n-m}}{n-m} + \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} - \frac{x^{3n-m}}{3n-m} + \ldots$$

Den Werth dieser Reihe findet man §. 84 entwickelt.

Beyspiel 7.

§. 141. Die Formel $dy = \frac{(1+2x)\,dx}{1+x+x^2}$ mittelst einer Reihe zu integriren.

Es ist offenbar das Integrale $y = l(1 + x + x^2)$; um aber diesen Ausdruck in eine Reihe zu verwandeln, multiplicire man Zähler und Nenner der gegebenen Differenzialformel durch $1 - x$, so wird $dy = \frac{(1 + x - 2x^2)\,dx}{1 - x^3}$. Da nun

$$\frac{1}{1 - x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \text{etc.},$$

so erhält man durch Integration

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9} + \text{etc.}$$

Zusatz 1.

§. 142. Auf dieselbe Weise läßt sich $y = l(1 + x + x^2 + x^3)$ in eine Reihe verwandeln. Denn da $y + l(1-x) = l(1-x^4)$, so wird

$$\begin{aligned} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.} \\ - x^4 \qquad\qquad\qquad - \frac{x^8}{2} \qquad\qquad \end{aligned}$$

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{3}{8}x^8 + \frac{x^9}{9} + \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 143. Verwandelt man den Bruch $\frac{1+2x}{1+x+x^2}$ in eine recurrente Reihe, so findet man

$$1 + x - 2x^2 + x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6 + x^7 - 2x^8 + \text{etc.},$$

und durch Integration findet man dieselbe Reihe, wie vorhin.

Beyspiel 8.

§. 144. Die Formel $dy = \frac{dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$ mittelst einer Reihe zu integriren.

In §. 64 ist, wenn man $A = 1$, $B = 0$, $a = 1$, $b = 1$ setzt, das Integral dieser Formel

$$y = \frac{1}{\sin.\zeta} \text{ arc. tg. } \frac{x \sin.\zeta}{1 - x \cos.\zeta}.$$

Durch die Entwicklung in eine recurrente Reihe finden wir

$$\frac{1}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} = 1 + 2x\cos.\zeta + (4\cos.^2\zeta - 1)x^2$$
$$+ (8\cos.^3\zeta - 4\cos.\zeta)x^3 + (16\cos.^4\zeta - 12\cos.^2\zeta + 1)x^4$$
$$+ (32\cos.^5\zeta - 32\cos.^3\zeta + 6\cos.\zeta)x^5 + \text{etc.}$$

Multipliciren wir diese Reihe mit dx, und integriren sie, so erhalten wir das gesuchte Resultat. Stellen wir aber die Potenzen von $\cos.\zeta$ durch die Cosinusse der vielfachen Winkel dar, so erhalten wir

$$y = x + \tfrac{1}{2}x^2(2\cos.\zeta) + \tfrac{1}{3}x^3(2\cos.2\zeta + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{4}x^4(2\cos.3\zeta + 2\cos.\zeta) + \tfrac{1}{5}x^5(2\cos.4\zeta + 2\cos.2\zeta + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{6}x^6(2\cos.5\zeta + 2\cos.3\zeta + 2\cos.\zeta) + \text{etc.}$$

Zusatz 1.

§. 145. Setzt man $dz = \frac{(1 - x\cos.\zeta)\,dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$, so erhält man nach §. 63, wenn daselbst $A = 1$, $B = -\cos.\zeta$, $a = 1$ und $b = 1$ gesetzt wird:

$$z = -\cos.\zeta\, l\sqrt{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} + \sin.\zeta \text{ arc. tg. } \frac{x\sin.\zeta}{1 - x\cos.\zeta}.$$

Entwickelt man aber den Coefficienten von dx in eine Reihe, so erhält man, weil

$$\frac{1 - x\cos.\zeta}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} = 1 + x\cos.\zeta + x^2\cos.2\zeta + x^3\cos.3\zeta$$
$$+ x^4\cos.4\zeta + \text{etc.}$$

$$z = x + \tfrac{1}{2}x^2\cos.\zeta + \tfrac{1}{3}x^3\cos.2\zeta + \tfrac{1}{4}x^4\cos.3\zeta + \tfrac{1}{5}x^5\cos.4\zeta + \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 146. Weil $dz = \frac{dx\,(-x\cos.\zeta + \cos.^2\zeta + \sin.^2\zeta)}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$, so ist

$$z = -\cos.\zeta\, l\sqrt{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} + \sin.^2\zeta \,.\int\frac{dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}.$$

Für $y = \int\frac{dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$ erhält man demnach eine andere unendliche Reihe, die eine logarithmische Größe enthält. Nämlich

$$y = \frac{\cos. \zeta}{\sin.^2 \zeta} \, l \sqrt{1 - 2x \cos. z + x^2}$$

$$+ \frac{1}{\sin.^2 \zeta} (x + \tfrac{1}{2} x^2 \cos. z + \tfrac{1}{3} x^3 \cos. 2z + \tfrac{1}{4} x^4 \cos. 3z + \text{etc.})$$

Aufgabe 13.

§. 147. Das Integrale der irrationalen Differenzialformel $dy = x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ durch eine unendliche Reihe darzustellen.

Auflösung.

Es sey $a^{\frac{\mu}{\nu}} = c$, so wird $dy = c x^{m-1} dx \left(1 + \frac{b}{a} x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, wobey wir annehmen, daß c eine reelle Größe bezeichne.

Nun ist

$$\left(1 + \frac{b}{a} x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = 1 + \frac{\mu b}{1 \,.\, \nu \,.\, a} x^n + \frac{\mu (\mu - \nu) b^2}{1 \,.\, \nu \,.\, 2\nu \,.\, a^2} x^{2n} + \frac{\mu (\mu - \nu)(\mu - 2\nu) b^3}{1\nu \,.\, 2\nu \,.\, 3\nu \,.\, a^3} x^{3n} + \text{etc.},$$

also durch Integration

$$y = c \left(\frac{x^m}{m} + \frac{\mu \,.\, b}{\nu \,.\, a} \cdot \frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{\mu (\mu - \nu) b^2}{1\nu \,.\, 2\nu \,.\, a^2} \cdot \frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \frac{\mu (\mu - \nu)(\mu - 2\nu) b^3}{1\nu \,.\, 2\nu \,.\, 3\nu \,.\, a^3} \cdot \frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \ldots\right),$$

welche Reihe ins Unendliche fortgeht, außer, wenn $\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze positive Zahl ist.

Für den Fall, daß ν eine gerade Zahl ist, und a eine negative Größe bezeichnet, muß unser Ausdruck auf folgende Art dargestellt werden:

$$dy = x^{m-1} dx (b x^n - a)^{\frac{\mu}{\nu}} = b^{\frac{\mu}{\nu}} x^{m + \frac{\mu n}{\nu} - 1} dx \left(1 - \frac{a}{b} x^{-n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Weil nun

$$\left(1 - \frac{a}{b} x^{-n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = 1 - \frac{\mu a}{1\nu \,.\, b} x^{-n} + \frac{\mu (\mu - \nu) a^2}{1\nu \,.\, 2\nu \,.\, b^2} x^{-2n} - \frac{\mu (\mu - \nu)(\mu - 2\nu) a^3}{1\nu \,.\, 2\nu \,.\, 3\nu \,.\, b^3} x^{-3n} + \text{etc.},$$

finden wir durch Integration

$$= b^{\frac{\mu}{\nu}} \left(\frac{\nu x^{m+\frac{\mu n}{\nu}}}{m\nu + \mu n} - \frac{\mu a}{1\nu \,.\, b} \,.\, \frac{\nu x^{m+\frac{(\mu-\nu)n}{\nu}}}{m\nu + (\mu-\nu)n} + \frac{\mu(\mu-\nu)a^2}{1\nu \,.\, 2\nu \,.\, b^2} \,.\, \frac{\nu x^{m+\frac{(\mu-2\nu)n}{\nu}}}{m\nu + (\mu-2\nu)n} - \text{ꝛc.} \right).$$

Sind a und b positive Zahlen, so kann man beyde Entwicklungen brauchen.

Beyspiel 1.

§. 148. Das Integral der Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ urch eine Reihe darzustellen.

Aus dem bereits Gelehrten erhellet, daß $y = \text{arc. sin. } x$, wel- er Winkel demnach durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden ll. Weil

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \text{ꝛc.}$$

ist

$$= x + \frac{1}{2} \,.\, \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \,.\, \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \,.\, \frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \,.\, \frac{x^9}{9} + \text{ꝛc.},$$

beyde Werthe so bestimmt sind, daß sie für $x = 0$ verschwinden.

Zusatz 1.

§. 149. Wenn also $x = 1$, so ist wegen $\text{arc. sin. } 1 = \frac{\pi}{2}$

$$= 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} + \text{ꝛc.}$$

Aber für $x = \frac{1}{2}$ findet man, weil $\text{arc. sin. } \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$,

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^3.3} + \frac{1.3}{2.4.2^5.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^7.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.2^9.9} + \text{ꝛc.}$$

Addirt man die zehn ersten Glieder dieser Reihe, so findet man 523598 77, und durch Multiplication mit 6 also $\pi = 3{\cdot}14159262$, nur die achte Ziffer unrichtig ist.

Zusatz 2.

§. 150. Ist die Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$ gegeben, und man setzt $= u^2$, so erhält man

$$dy = \frac{2udu}{\sqrt{u^2 - u^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1 - u^2}}, \text{ mithin}$$

$$y = 2 \text{ arc. sin. } u = 2 \text{ arc. sin. } \sqrt{x}.$$

Mittelst der Reihe aber wird

$$y = 2\left(u + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{u^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{u^7}{7} + \text{ꝛc.}\right) \text{ oder}$$

$$y = 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{7} + \text{ꝛc.}\right)\sqrt{x}.$$

Beyspiel 2.

§. 151. Man entwickle das Integrale der Formel $dy = dx\sqrt{2ax - x^2}$ durch eine Reihe.

Setzt man $x = u^2$, so wird $dy = 2u^2 du\sqrt{2a - u^2}$; setzt man aber in der Reductionsformel I. (§. 118) $n = 2$, $m = 1$, $a = 2a$, $b = -1$, $\mu = 1$ und $\nu = 2$, so erhält man

$$\int u^2 du\sqrt{2a - u^2} = -\tfrac{1}{3} u (2a - u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a \int du\sqrt{2a - u^2}.$$

Setzt man in der dritten Reductionsformel $m = 1$, $a = 2a$, $b = -1$, $n = 2$, $\mu = -1$ und $\nu = 2$, so erhält man

$$\int du\sqrt{2a - u^2} = \tfrac{1}{2} u\sqrt{2a - u^2} + a\int\frac{du}{\sqrt{2a - u^2}}.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{du}{\sqrt{2a - u^2}} = \text{arc. sin. } \frac{u}{\sqrt{2a}} = \text{arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}},$$

und daher

$$\int u^2 du\sqrt{2a - u^2} = -\tfrac{1}{4} u(2a - u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} au\sqrt{2a - u^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$$

$$= \tfrac{1}{4} u(u^2 - a)\sqrt{2a - u^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}},$$

folglich $y = \tfrac{1}{2}(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \text{ arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$.

Um aber die unendliche Reihe zu finden, setze man

$$dy = dx\sqrt{2ax} \cdot \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} dx\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} - \text{ꝛc.}\right)\sqrt{2a},$$

und demnach ist durch Integration

$$y = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2.a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4.a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8.a^3} - \text{ꝛc.}\right)\sqrt{2a}$$

oder

$$y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{5.2.a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^3}{7.4.a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{9.8.a^3} - \text{ꝛc.}\right) 2\sqrt{2ax}.$$

Zusatz 1.

§. 152. Dieses Integrale kann leichter gefunden werden, wenn man $x = a - v$ setzt, denn dann wird $dy = -dv\sqrt{a^2 - v^2}$, und nach der dritten Reductionsformel ist

$$\int dv\sqrt{a^2 - v^2} = \tfrac{1}{2}v\sqrt{a^2 - v^2} + \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}, \text{ demnach}$$

$$y = C - \tfrac{1}{2}v\sqrt{a^2 - v^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{v}{a} \text{ oder}$$

$$y = C - \tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{a - x}{a}.$$

Damit nun für $x = o$ auch $y = o$ werde, muß man $C = \frac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } 1$ setzen, wodurch

$$y = -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a}$$

erhalten wird. Bekanntlich ist aber

$$\text{arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}} = \tfrac{1}{2}\text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a}.$$

Zusatz 2.

§. 153. Setzen wir $x = \frac{a}{2}$, so wird $y = \frac{-a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi a^2}{6}$. Die Reihe aber gibt

$$y = 2a^2\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5.2^3} - \frac{1.1}{2.4.7.2^5} - \frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^7} - \text{ꝛc.}\right),$$

und hieraus folgern wir

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.5.2^2} - \frac{1.1}{2.4.7.2^4} - \frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^6} - \text{ꝛc.}\right).$$

Nach der obigen Entwicklung aber ist

$$\pi = 3\left(1 + \frac{1}{2.3.2^2} + \frac{1.3}{2.4.5.2^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^6} + \text{ꝛc.}\right).$$

Durch Verbindung beyder Resultate lassen sich noch andere verschiedene Reihen ableiten.

Beyspiel 3.

§. 154. **Die Formel** $dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ **mittelst einer Reihe zu integriren.**

Das Integrale ist $y = l(x + \sqrt{1+x^2})$, welches so bestimmt ist, daß es für $x = 0$ verschwindet. Weil aber

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{ꝛc.},$$

so wird eben dieses Integrale durch folgende Reihe ausgedrückt:

$$y = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

Beyspiel 4.

§. 155. **Das Integrale der Formel** $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **durch eine Reihe darzustellen.**

Die Integration gibt $y = l(x + \sqrt{x^2-1})$, welches für $x = 1$ verschwindet. Weil nun

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1.3}{2.4.x^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.x^7} + \text{ꝛc.},$$

so wird dieses Integrale auch seyn

$$y = C + lx - \frac{1}{2.2.x^2} - \frac{1.3}{2.4.4x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6} - \text{ꝛc.}$$

Damit dieses Integrale für $x = 1$ verschwinde, wird die Constante so bestimmt, daß

$$y = lx + \frac{1}{2.2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1.3}{2.4.4}\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6.6}\left(1 - \frac{1}{x^6}\right) + \text{ꝛc.}$$

Zusatz.

§. 156. Für $x = 1 + u$ wird

$$dy = \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{du}{\sqrt{2u}}\left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{du}{\sqrt{2u}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u^2}{4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{u^3}{8} + \ldots\right)$$

demnach erhält man durch Integration

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{ꝛc.}\right)$$

oder

$$y = \left(1 - \frac{1 . u}{2 . 3 . 2} + \frac{1 . 3 . u^2}{2 . 4 . 5 . 4} - \frac{1 . 3 . 5 . u^3}{2 . 4 . 6 . 7 . 8} + \text{2c.}\right)\sqrt{2u}.$$

Beyspiel 5.

§. 157. Das Integral der Formel $dy = \frac{dx}{(1-x)^n}$ in einer Reihe darzustellen.

Durch Integration erhält man

$$y = \frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}} - \frac{1}{n-1},$$

wenn man für $x=0$ auch $y=0$ setzt, oder

$$y = \frac{(1-x)^{-n+1} - 1}{n-1}.$$ Nun ist aber auch

$$dy = dx\left(1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 . 2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}x^3 + \text{2c.}\right),$$

daher kann jenes Integrale auch so ausgedrückt werden:

$$y = x + \frac{nx^2}{2} + \frac{n(n+1)x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{n(n+1)(n+2)x^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \text{2c.}$$

Hier wird aber offenbar auch $(n-1)y + 1 = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}$.

Anmerkung.

§. 158. Da solche Integrationen äußerst leicht sind, so halte ich es für überflüssig, länger dabey zu verweilen, und werde demnach eine andere weniger bekannte Methode, Reihen zu entwickeln, erörtern, welche in der Analysis oft von großem Nutzen seyn kann.

Aufgabe 14.

§. 159. Das Integral der Differenzialformel

$$dy = x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$$

nach einer zweyten Methode in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung.

Man setze $y = (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} . z$, so wird

$$dy = (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\left[dz(a+bx^n) + \frac{n\mu}{\nu}bx^{n-1}z\,dx\right],$$

demnach $x^{m-1}\,dx = dz(a+bx^n) + \frac{n\mu}{\nu} bx^{n-1} z\,dx$ oder

$$\nu x^{m-1}\,dx = \nu\,dz(a+bx^n) + n\mu.b\,x^{n-1} z\,dx.$$

Bevor wir noch die Reihe, durch welche der Werth von z bestimmt wird, aufsuchen, müssen wir bemerken, daß in dem Falle, wenn x verschwindet,

$$dy = a^{\frac{\mu}{\nu}-1} \cdot x^{m-1} \cdot dx = a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot dz,$$

so daß $dz = \frac{1}{a} x^{m-1}\,dx$ ist. Setzen wir also

$z = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{ꝛc.}$, so wird

$$\frac{dz}{dx} = mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1} + (m+3n)Dx^{m+3n-1} + \text{ꝛc.}$$

Substituiren wir diese Reihen statt z und $\frac{dz}{dx}$ in der Gleichung

$$\frac{\nu\,dz}{dx}(a+bx^n) + n\mu b x^{n-1} z - \nu x^{m-1} = o,$$

und ordnen die einzelnen Glieder nach den Potenzen von x, so erhalten wir die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} m\nu aAx^{m-1} & +(m+n)\nu aBx^{m+n-1} & +(m+2n)\nu aCx^{m+2n-1} + \text{ꝛc.} \\ -\nu & +m\nu bA & +(m+n)\nu bB \\ & +n\mu bA & +n\mu bB \end{matrix}\right\} = o.$$

Werden nun die einzelnen Glieder $= o$ gesetzt, so werden die angenommenen Coefficienten durch folgende Gleichungen bestimmt:

$m\nu aA - \nu = o$, also $A = \frac{1}{ma}$;

$(m+n)\nu aB + (m\nu + n\mu)bA = o$, » $B = \frac{-(m\nu+n\mu).b}{(m+n)\nu a} \cdot A$;

$(m+2n)\nu aC + [(m+n)\nu + n\mu]bB = o$, » $C = \frac{-[(m+n)\nu+n\mu]b}{(m+2n)\nu a} \cdot B$;

$(m+3n)\nu aD + [(m+2n)\nu + n\mu]bC = o$, » $D = \frac{-[(m+2n)\nu+n\mu]b}{(m+3n)\nu a} \cdot C$

und so kann jeder folgende Coefficient aus dem vorhergehenden leicht gefunden werden. Dann aber wird

$$y = (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot [Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \text{ꝛc.}].$$

Auflösung 2.

So wie wir hier die Reihe nach den steigenden Potenzen von x geordnet haben, so läßt sich auch eine Reihe aufstellen, die nach den fallenden Potenzen fortschreitet.

Wir setzen nämlich

$$z = Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{etc.},$$

so wird

$$\frac{dz}{dx} = (m-n)Ax^{m-n-1} + (m-2n)Bx^{m-2n-1} + (m-3n)Cx^{m-3n-1} + \text{etc.}$$

Durch Substitution dieser Reihen erhält man

$$\left.\begin{matrix} +(m-n)\nu bAx^{m-1} & +(m-n)\nu aAx^{m-n-1} & +(m-2n)\nu aBx^{m-2n-1} & +(m-3n)\nu aCx^{m-3n-1}+\ldots \\ +n\mu bA & +(m-2n)\nu bB & +(m-3n)\nu bC & +(m-4n)\nu bD \\ -\nu & +n\mu bB & +n\mu bC & +n\mu bD \end{matrix}\right\} = 0$$

Hier werden also die Coefficienten A, B, C etc. auf folgende Art bestimmt:

$$(m-n)\nu bA + n\mu bA - \nu = 0, \text{ folglich } A = \frac{\nu}{(m-n)\nu + n\mu} \cdot \frac{1}{b}$$

$$(m-n)\nu aA + (m-2n)\nu bB + n\mu bB = 0, \;\text{»}\; B = \frac{-(m-n)\nu}{(m-2n)\nu + n\mu} \cdot \frac{a}{b} \cdot A$$

$$(m-2n)\nu aB + (m-3n)\nu bC + n\mu bC = 0, \;\text{»}\; C = \frac{-(m-2n)\nu}{(m-3n)\nu + n\mu} \cdot \frac{a}{b} \cdot B$$

$$(m-3n)\nu aC + (m-4n)\nu bD + n\mu bD = 0, \;\text{»}\; D = \frac{-(m-3n)\nu}{(m-4n)\nu + n\mu} \cdot \frac{a}{b} \cdot C$$

wo wieder das Gesetz, nach welchem die Werthe der Coefficienten fortschreiten, klar ist.

Zusatz 1.

§. 160. Die erste Reihe ist deßhalb merkwürdig, weil sie in den Fällen, in welchen $(m+kn)\nu + n\mu = 0$ oder $-\frac{m}{n} - \frac{\mu}{\nu} = k$ wird, abbricht, und ein algebraisches Integrale darbietet. Die zweyte Reihe aber bricht ab, wenn $m - kn = 0$ oder $\frac{m}{n} = k$ wird, wo k eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 161. Beyde Reihen aber haben das Unbequeme, daß sie nicht immer brauchbar sind. Denn wird $m = 0$ oder $m + kn = 0$, so

$$z = \frac{x^m}{m} - \frac{x^{n-m}}{n-m} + \frac{x^{n+m}}{n+m} - \frac{x^{2n-m}}{2n-m} + \frac{x^{2n+m}}{2n+m} - \frac{x^{3n-m}}{3n-m} + \text{zc.}$$

Den Werth dieser Reihe findet man §. 84 entwickelt.

Beyspiel 7.

§. 141. **Die Formel** $dy = \frac{(1+2x)\,dx}{1+x+x^2}$ **mittelst einer Reihe zu integriren.**

Es ist offenbar das Integrale $y = l(1+x+x^2)$; um aber diesen Ausdruck in eine Reihe zu verwandeln, multiplicire man Zähler und Nenner der gegebenen Differenzialformel durch $1-x$, so wird $dy = \frac{(1+x-2x^2)\,dx}{1-x^3}$. Da nun

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \text{zc.},$$

so erhält man durch Integration

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9} + \text{zc.}$$

Zusatz 1.

§. 142. Auf dieselbe Weise läßt sich $y = l(1+x+x^2+x^3)$ in eine Reihe verwandeln. Denn da $y + l(1-x) = l(1-x^4)$, so wird

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{10}}{10} + \text{zc.}$$
$$\qquad - x^4 \qquad\qquad\qquad - \frac{x^8}{2}$$

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{3}{8}x^8 + \frac{x^9}{9} + \text{zc.}$$

Zusatz 2.

§. 143. Verwandelt man den Bruch $\frac{1+2x}{1+x+x^2}$ in eine recurrente Reihe, so findet man

$1 + x - 2x^2 + x^3 + x^4 - 2x^5 + x^6 + x^7 - 2x^8 + \text{zc.}$,

und durch Integration findet man dieselbe Reihe, wie vorhin.

Beyspiel 8.

§. 144. **Die Formel** $dy = \frac{dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$ **mittelst einer Reihe zu integriren.**

In §. 64 ist, wenn man $A=1$, $B=0$, $a=1$, $b=1$ setzt, das Integral dieser Formel

$$y = \frac{1}{\sin.\zeta} \text{ arc. tg. } \frac{x \sin.\zeta}{1 - x \cos.\zeta}.$$

Durch die Entwicklung in eine recurrente Reihe finden wir

$$\frac{1}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} = 1 + 2x\cos.\zeta + (4\cos.^2\zeta - 1)x^2$$
$$+ (8\cos.^3\zeta - 4\cos.\zeta)x^3 + (16\cos.^4\zeta - 12\cos.^2\zeta + 1)x^4$$
$$+ (32\cos.^5\zeta - 32\cos.^3\zeta + 6\cos.\zeta)x^5 + \text{etc.}$$

Multipliciren wir diese Reihe mit dx, und integriren sie, so erhalten wir das gesuchte Resultat. Stellen wir aber die Potenzen von $\cos.\zeta$ durch die Cosinusse der vielfachen Winkel dar, so erhalten wir

$$y = x + \tfrac{1}{2}x^2(2\cos.\zeta) + \tfrac{1}{3}x^3(2\cos.2\zeta + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{4}x^4(2\cos.3\zeta + 2\cos.\zeta) + \tfrac{1}{5}x^5(2\cos.4\zeta + 2\cos.2\zeta + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{6}x^6(2\cos.5\zeta + 2\cos.3\zeta + 2\cos.\zeta) + \text{etc.}$$

Zusatz 1.

§. 145. Setzt man $dz = \frac{(1 - x\cos.\zeta)\,dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$, so erhält man nach §. 63, wenn daselbst $A=1$, $B=-\cos.\zeta$, $a=1$ und $b=1$ gesetzt wird:

$$z = -\cos.\zeta\, l\sqrt{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} + \sin.\zeta \text{ arc. tg. } \frac{x\sin.\zeta}{1 - x\cos.\zeta}.$$

Entwickelt man aber den Coefficienten von dx in eine Reihe, so erhält man, weil

$$\frac{1 - x\cos.\zeta}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} = 1 + x\cos.\zeta + x^2\cos.2\zeta + x^3\cos.3\zeta$$
$$+ x^4\cos.4\zeta + \text{etc.}$$

$$z = x + \tfrac{1}{2}x^2\cos.\zeta + \tfrac{1}{3}x^3\cos.2\zeta + \tfrac{1}{4}x^4\cos.3\zeta + \tfrac{1}{5}x^5\cos.4\zeta + \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 146. Weil $dz = \frac{dx\,(-x\cos.\zeta + \cos.^2\zeta + \sin.^2\zeta)}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$, so ist

$$z = -\cos.\zeta\, l\sqrt{1 - 2x\cos.\zeta + x^2} + \sin.^2\zeta \,.\int\frac{dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}.$$

Für $y = \int\frac{dx}{1 - 2x\cos.\zeta + x^2}$ erhält man demnach eine andere unendliche Reihe, die eine logarithmische Größe enthält. Nämlich

$$y = \frac{\cos.\zeta}{\sin.^2\zeta}\, l\sqrt{1 - 2x\cos.z + x^2}$$
$$+ \frac{1}{\sin.^2\zeta}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\cos.z + \tfrac{1}{3}x^3\cos.2z + \tfrac{1}{4}x^4\cos.3z + \text{etc.}\right)$$

Aufgabe 13.

§. 147. **Das Integrale der irrationalen Differenzialformel $dy = x^{m-1}dx(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ durch eine unendliche Reihe darzustellen.**

Auflösung.

Es sey $a^{\frac{\mu}{\nu}} = c$, so wird $dy = cx^{m-1}dx\left(1 + \frac{b}{a}x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, wobey wir annehmen, daß c eine reelle Größe bezeichne.

Nun ist

$$\left(1 + \frac{b}{a}x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = 1 + \frac{\mu b}{1 . \nu . a}x^n + \frac{\mu(\mu - \nu)b^2}{1 . \nu . 2\nu . a^2}x^{2n}$$
$$+ \frac{\mu(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)b^3}{1\nu . 2\nu . 3\nu . a^3}x^{3n} + \text{etc.},$$

also durch Integration

$$y = c\left(\frac{x^m}{m} + \frac{\mu . b}{\nu . a}\cdot\frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{\mu(\mu-\nu)b^2}{1\nu . 2\nu . a^2}\cdot\frac{x^{m+2n}}{m+2n}\right.$$
$$\left. + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)b^3}{1\nu . 2\nu . 3\nu . a^3}\cdot\frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \ldots\right),$$

welche Reihe ins Unendliche fortgeht, außer, wenn $\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze positive Zahl ist.

Für den Fall, daß ν eine gerade Zahl ist, und a eine negative Größe bezeichnet, muß unser Ausdruck auf folgende Art dargestellt werden:

$$dy = x^{m-1}dx(bx^n - a)^{\frac{\mu}{\nu}} = b^{\frac{\mu}{\nu}}\, x^{m + \frac{\mu n}{\nu} - 1}\, dx\left(1 - \frac{a}{b}x^{-n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Weil nun

$$\left(1 - \frac{a}{b}x^{-n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = 1 - \frac{\mu a}{1\nu . b}x^{-n} + \frac{\mu(\mu - \nu)a^2}{1\nu . 2\nu . b^2}x^{-2n}$$
$$- \frac{\mu(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)a^3}{1\nu . 2\nu . 3\nu . b^3}x^{-3n} + \text{etc.},$$

finden wir durch Integration

$$= b^{\frac{\mu}{\nu}} \left(\frac{\nu x^{m + \frac{\mu n}{\nu}}}{m\nu + \mu n} - \frac{\mu a}{1\nu \, . \, b} \cdot \frac{\nu x^{m + \frac{(\mu - \nu) n}{\nu}}}{m\nu + (\mu - \nu) n} + \frac{\mu(\mu - \nu) a^2}{1\nu \, . \, 2\nu \, . \, b^2} \cdot \frac{\nu x^{m + \frac{(\mu - 2\nu) n}{\nu}}}{m\nu + (\mu - 2\nu) n} - \text{ꝛc.} \right).$$

Sind a und b positive Zahlen, so kann man beyde Entwicklungen brauchen.

Beyspiel 1.

§. 148. Das Integral der Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ durch eine Reihe darzustellen.

Aus dem bereits Gelehrten erhellet, daß $y = \text{arc. sin. } x$, welcher Winkel demnach durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden soll. Weil

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^8 + \text{ꝛc.},$$

ist

$$= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9} + \text{ꝛc.},$$

beyde Werthe so bestimmt sind, daß sie für $x = 0$ verschwinden.

Zusatz 1.

§. 149. Wenn also $x = 1$, so ist wegen $\text{arc. sin. } 1 = \frac{\pi}{2}$

$$= 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} + \text{ꝛc.}$$

Aber für $x = \frac{1}{2}$ findet man, weil $\text{arc. sin. } \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$,

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^3.3} + \frac{1.3}{2.4.2^5.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^7.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.2^9.9} + \text{ꝛc.}$$

Addirt man die zehn ersten Glieder dieser Reihe, so findet man 523598 77, und durch Multiplication mit 6 also $\pi = 3{\cdot}14159262$, nur die achte Ziffer unrichtig ist.

Zusatz 2.

§. 150. Ist die Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$ gegeben, und man setzt $= u^2$, so erhält man

$$dy = \frac{2udu}{\sqrt{u^2 - u^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1 - u^2}}, \text{ mithin}$$

$$y = 2 \text{ arc. sin.} u = 2 \text{ arc. sin.} \sqrt{x}.$$

Mittelst der Reihe aber wird

$$y = 2\left(u + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{u^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{u^7}{7} + \text{2c.}\right) \text{ oder}$$

$$y = 2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{7} + \text{2c.}\right)\sqrt{x}.$$

Beyspiel 2.

§. 151. Man entwickle das Integrale der Formel $dy = dx\sqrt{2ax - x^2}$ durch eine Reihe.

Setzt man $x = u^2$, so wird $dy = 2u^2 du\sqrt{2a - u^2}$; setzt man aber in der Reductionsformel I. (§. 118) $n = 2$, $m = 1$, $a = 2a$, $b = -1$, $\mu = 1$ und $\nu = 2$, so erhält man

$$\int u^2 du\sqrt{2a - u^2} = -\tfrac{1}{4} u (2a - u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} a \int du\sqrt{2a - u^2}.$$

Setzt man in der dritten Reductionsformel $m = 1$, $a = 2a$, $b = -1$, $n = 2$, $\mu = -1$ und $\nu = 2$, so erhält man

$$\int du\sqrt{2a - u^2} = \tfrac{1}{2} u\sqrt{2a - u^2} + a\int \frac{du}{\sqrt{2a - u^2}}.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{du}{\sqrt{2a - u^2}} = \text{arc. sin.} \frac{u}{\sqrt{2a}} = \text{arc. sin.} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}},$$

und daher

$$\int u^2 du\sqrt{2a - u^2} = -\tfrac{1}{4} u(2a - u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} au\sqrt{2a - u^2}$$
$$+ \tfrac{1}{2} a^2 \text{ arc. sin.} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$$
$$= \tfrac{1}{4} u(u^2 - a)\sqrt{2a - u^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \text{ arc. sin.} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}},$$

folglich $y = \tfrac{1}{2}(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \text{ arc. sin.} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}.$

Um aber die unendliche Reihe zu finden, setze man

$$dy = dx\sqrt{2ax} \cdot \left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} dx\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} - \text{2c.}\right)\sqrt{2a},$$

und demnach ist durch Integration

$$y = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2.a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4.a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8.a^3} - \text{etc.}\right)\sqrt{2a}$$

oder

$$y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{5.2.a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^3}{7.4.a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{9.8.a^3} - \text{etc.}\right) 2\sqrt{2ax}.$$

Zusatz 1.

§. 152. Dieses Integrale kann leichter gefunden werden, wenn man $x = a - v$ setzt, denn dann wird $dy = -dv\sqrt{a^2 - v^2}$, und nach der dritten Reductionsformel ist

$$\int dv\sqrt{a^2 - v^2} = \tfrac{1}{2}v\sqrt{a^2 - v^2} + \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}},$$ demnach

$$y = C - \tfrac{1}{2}v\sqrt{a^2 - v^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{v}{a}$$ oder

$$y = C - \tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - x^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{a - x}{a}.$$

Damit nun für $x = 0$ auch $y = 0$ werde, muß man $C = \frac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } 1$ setzen, wodurch

$$y = -\tfrac{1}{2}(a - x)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a}$$

erhalten wird. Bekanntlich ist aber

$$\text{arc. sin. } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}} = \tfrac{1}{2}\text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a}.$$

Zusatz 2.

§. 153. Setzen wir $x = \frac{a}{2}$, so wird $y = \frac{-a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi a^2}{6}$. Die Reihe aber gibt

$$y = 2a^2\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.5.2^3} - \frac{1.1}{2.4.7.2^5} - \frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^7} - \text{etc.}\right),$$

und hieraus folgern wir

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.5.2^2} - \frac{1.1}{2.4.7.2^4} - \frac{1.1.3}{2.4.6.9.2^6} - \text{etc.}\right).$$

Nach der obigen Entwicklung aber ist

$$\pi = 3\left(1 + \frac{1}{2.3.2^2} + \frac{1.3}{2.4.5.2^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^6} + \text{etc.}\right).$$

Durch Verbindung beyder Resultate lassen sich noch andere verschiedene Reihen ableiten.

Beyspiel 3.

§. 154. Die Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ mittelst einer Reihe zu integriren.

Das Integrale ist $y = l\,(x + \sqrt{1+x^2})$, welches so bestimmt ist, daß es für $x = 0$ verschwindet. Weil aber

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{etc.},$$

so wird eben dieses Integrale durch folgende Reihe ausgedrückt:

$$y = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Beyspiel 4.

§. 155. Das Integrale der Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ durch eine Reihe darzustellen.

Die Integration gibt $y = l\,(x + \sqrt{x^2-1})$, welches für $x = 1$ verschwindet. Weil nun

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1.3}{2.4.x^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.x^7} + \text{etc.},$$

so wird dieses Integrale auch seyn

$$y = C + lx - \frac{1}{2.2.x^2} - \frac{1.3}{2.4.4x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6} - \text{etc.}$$

Damit dieses Integrale für $x = 1$ verschwinde, wird die Constante so bestimmt, daß

$$y = lx + \frac{1}{2.2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1.3}{2.4.4}\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6.6}\left(1 - \frac{1}{x^6}\right) + \text{etc.}$$

Zusatz.

§. 156. Für $x = 1 + u$ wird

$$dy = \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{du}{\sqrt{2u}}\left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{du}{\sqrt{2u}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u^2}{4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{u^3}{8} + \ldots\right)$$

demnach erhält man durch Integration

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7.8} + \text{etc.}\right)$$

oder

$$y = \left(1 - \frac{1 . u}{2 . 3 . 2} + \frac{1 . 3 . u^2}{2 . 4 . 5 . 4} - \frac{1 . 3 . 5 . u^3}{2 . 4 . 6 . 7 . 8} + \text{rc.}\right)\sqrt{2u}.$$

Beyspiel 5.

§. 157. Das Integral der Formel $dy = \frac{dx}{(1-x)^n}$ in einer Reihe darzustellen.

Durch Integration erhält man

$$y = \frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}} - \frac{1}{n-1},$$

wenn man für $x = 0$ auch $y = 0$ setzt, oder

$$y = \frac{(1-x)^{-n+1} - 1}{n-1}.$$ Nun ist aber auch

$$dy = dx\left(1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 . 2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}x^3 + \text{rc.}\right),$$

daher kann jenes Integrale auch so ausgedrückt werden:

$$y = x + \frac{nx^2}{2} + \frac{n(n+1)x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{n(n+1)(n+2)x^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \text{rc.}$$

Hier wird aber offenbar auch $(n-1)y + 1 = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}$.

Anmerkung.

§. 158. Da solche Integrationen äußerst leicht sind, so halte ich es für überflüssig, länger dabey zu verweilen, und werde demnach eine andere weniger bekannte Methode, Reihen zu entwickeln, erörtern, welche in der Analysis oft von großem Nutzen seyn kann.

Aufgabe 14.

§. 159. Das Integral der Differenzialformel

$$dy = x^{m-1}dx(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$$

nach einer zweyten Methode in eine Reihe zu verwandeln.

Auflösung.

Man setze $y = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} . z$, so wird

$$dy = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\left[dz(a + bx^n) + \frac{n\mu}{\nu}bx^{n-1}zdx\right],$$

demnach $x^{m-1}\,dx = dz(a + bx^n) + \frac{n\mu}{\nu} bx^{n-1} z\,dx$ oder

$$\nu x^{m-1}\,dx = \nu\,dz(a + bx^n) + n\mu.bx^{n-1} z\,dx.$$

Bevor wir noch die Reihe, durch welche der Werth von z bestimmt wird, aufsuchen, müssen wir bemerken, daß in dem Falle, wenn x verschwindet,

$$dy = a^{\frac{\mu}{\nu}-1} . x^{m-1} . dx = a^{\frac{\mu}{\nu}} . dz,$$

so daß $dz = \frac{1}{a} x^{m-1}\,dx$ ist. Setzen wir also

$$z = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{rc.},$$ so wird

$$\frac{dz}{dx} = mAx^{m-1} + (m+n)Bx^{m+n-1} + (m+2n)Cx^{m+2n-1} + (m+3n)Dx^{m+3n-1} + \text{rc.}$$

Substituiren wir diese Reihen statt z und $\frac{dz}{dx}$ in der Gleichung

$$\frac{\nu dz}{dx}(a + bx^n) + n\mu bx^{n-1} z - \nu x^{m-1} = o,$$

und ordnen die einzelnen Glieder nach den Potenzen von x, so erhalten wir die Gleichung

$$\left.\begin{array}{lll} m\nu aAx^{m-1} & +(m+n)\nu aBx^{m+n-1} & +(m+2n)\nu aCx^{m+2n-1} + \text{rc.} \\ -\nu & + m\nu bA & +(m+n)\nu bB \\ & + n\mu bA & + n\mu bB \end{array}\right\} = o.$$

Werden nun die einzelnen Glieder $= o$ gesetzt, so werden die angenommenen Coefficienten durch folgende Gleichungen bestimmt:

$m\nu aA - \nu = o,$ also $A = \frac{1}{ma};$

$(m+n)\nu aB + (m\nu + n\mu)bA = o,$ » $B = \frac{-(m\nu + n\mu).b}{(m+n)\nu a}.A;$

$(m+2n)\nu aC + [(m+n)\nu + n\mu]bB = o,$ » $C = \frac{-[(m+n)\nu + n\mu]b}{(m+2n)\nu a}.B;$

$(m+3n)\nu aD + [(m+2n)\nu + n\mu]bC = o,$ » $D = \frac{-[(m+2n)\nu + n\mu]b}{(m+3n)\nu a}.C$

und so kann jeder folgende Coefficient aus dem vorhergehenden leicht gefunden werden. Dann aber wird

$$y = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.[Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \text{rc.}].$$

Auflösung 2.

So wie wir hier die Reihe nach den steigenden Potenzen von x geordnet haben, so läßt sich auch eine Reihe aufstellen, die nach den fallenden Potenzen fortschreitet.

Wir setzen nämlich

$$z = Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{ꝛc.},$$

so wird

$$\frac{dz}{dx} = (m-n)Ax^{m-n-1} + (m-2n)Bx^{m-2n-1} + (m-3n)Cx^{m-3n-1} + \text{ꝛc.}$$

Durch Substitution dieser Reihen erhält man

$$\left.\begin{array}{llll} +(m-n)\nu bAx^{m-1} & +(m-n)\nu aAx^{m-n-1} & +(m-2n)\nu aBx^{m-2n-1} & +(m-3n)\nu aCx^{m-3n-1} + .. \\ +n\mu bA & +(m-2n)\nu bB & +(m-3n)\nu bC & +(m-4n)\nu bD \\ -\nu & +n\mu bB & +n\mu bC & +n\mu bD \end{array}\right\} = 0$$

Hier werden also die Coefficienten A, B, C ꝛc. auf folgende Art bestimmt:

$$(m-n)\nu bA + n\mu bA - \nu = 0, \text{ folglich } A = \frac{\nu}{(m-n)\nu + n\mu} \cdot \frac{1}{b}$$

$$(m-n)\nu aA + (m-2n)\nu bB + n\mu bB = 0, \text{ » } B = \frac{-(m-n)\nu}{(m-2n)\nu + n\mu} \cdot \frac{a}{b} \cdot A$$

$$(m-2n)\nu aB + (m-3n)\nu bC + n\mu bC = 0, \text{ » } C = \frac{-(m-2n)\nu}{(m-3n)\nu + n\mu} \cdot \frac{a}{b} \cdot B$$

$$(m-3n)\nu aC + (m-4n)\nu bD + n\mu bD = 0, \text{ » } D = \frac{-(m-3n)\nu}{(m-4n)\nu + n\mu} \cdot \frac{a}{b} \cdot C$$

wo wieder das Gesetz, nach welchem die Werthe der Coefficienten fortschreiten, klar ist.

Zusatz 1.

§. 160. Die erste Reihe ist deßhalb merkwürdig, weil sie in den Fällen, in welchen $(m + kn)\nu + n\mu = 0$ oder $-\frac{m}{n} - \frac{\mu}{\nu} = k$ wird, abbricht, und ein algebraisches Integrale darbietet. Die zweyte Reihe aber bricht ab, wenn $m - kn = 0$ oder $\frac{m}{n} = k$ wird, wo k eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 161. Beyde Reihen aber haben das Unbequeme, daß sie nicht immer brauchbar sind. Denn wird $m = 0$ oder $m + kn = 0$, so

wird die erstere unbrauchbar; wird aber

$$(m - kn)\nu + n\mu = o \quad \text{oder} \quad \frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu} = k,$$

so wird die zweyte Reihe unbrauchbar, weil ihre Glieder unendlich werden.

Zusatz 3.

§. 162. Übrigens gewähren diese beyden Reihen doch den Vortheil, daß, so oft die eine keine Anwendung findet, jedes Mahl die andere sicher gebraucht werden kann, jene Fälle ausgenommen, in welchen sowohl $\frac{-m}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu} + \frac{m}{n}$ ganze positive Zahlen sind. Weil aber dann $\nu = 1$ ist, so bieten diese Fälle ganze rationale Functionen dar, bey welchen die Integration keine Schwierigkeit hat.

Zusatz 4.

§. 163. Beyde Reihen lassen sich für z zugleich auf folgende Weise verbinden. Es sey die erstere Reihe $= P$, die zweyte $= Q$, damit sowohl $z = P$ als $z = Q$ gesetzt werden könne. Durch Verbindung beyder Reihen erhält man dann $z = \alpha P + \beta Q$, wenn nur $\alpha + \beta = 1$.

Anmerkung.

§. 164. Daraus aber, daß wir zwey Reihen für z entwickelten, können wir keineswegs die Gleichheit beyder Reihen folgern; denn es ist ja nicht nöthig, daß die daraus erhaltenen Werthe für y einander gleich werden, wenn sie sich nur durch eine constante Größe von einander unterscheiden. Bezeichnen wir die zuerst gefundene Reihe durch P, die zweyte aber durch Q, so wird, weil bey der ersten

$$y = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} P,$$

bey der zweyten aber $y = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} Q$,

offenbar $(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} (P - Q)$ eine constante Größe, und daher

$$P - Q = C (a + bx^n)^{\frac{-\mu}{\nu}}.$$

Jede der beyden Reihen stellt nämlich nur ein particulares Integrale dar, weil sie keine constante Größe enthält, welche nicht schon in der

Differenzialformel vorkäme. Übrigens kann nach derselben Methode auch der vollständige Werth von z gefunden werden, denn außer der angenommenen Reihe P oder Q kann man

$$z = P + \alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n} + \text{rc.}$$

setzen, und nach gemachter Substitution bestimmt man die Reihe P wie oben.

Für die zweyte neue Reihe aber muß man setzen.

$$\left.\begin{array}{lllll} n\nu a\beta x^{n-1} & +2n\nu a\gamma x^{2n-1} & +3n\nu a\delta x^{3n-1} & +4n\nu a\varepsilon x^{4n-1} & +\ldots \\ n\mu b\alpha & +n\nu b\beta & +2n\nu b\gamma & +3n\nu b\delta & \\ & +n\mu b\beta & +n\mu b\gamma & +n\mu b\delta & \end{array}\right\} = 0,$$

woraus sich folgende Bestimmungen ergeben:

$$\beta = \frac{-\mu}{\nu} \cdot \frac{b}{a} \cdot \alpha; \quad \gamma = \frac{-(\mu+\nu)\,b}{2\nu a} \cdot \beta; \quad \delta = \frac{-(\mu+2\nu)\,b}{3\nu a} \cdot \gamma;$$

$$\varepsilon = \frac{-(\mu+3\nu)\,b}{4\nu a} \cdot \delta \cdot \text{rc.}$$

Auf diese Art erhält man

$$z = P + \alpha\left[1 - \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{b}{a}\, x^n + \frac{\mu(\mu+\nu)}{\nu \cdot 2\nu} \cdot \frac{b^2}{a^2}\, x^{2n} - \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{\nu \cdot 2\nu \cdot 3\nu} \cdot \frac{b^3}{a^3}\, x^{3n} + \text{rc.}\right]$$

oder $z = P + \alpha\left[1 + \frac{b}{a}x^n\right]^{\frac{-\mu}{\nu}}$, folglich $y = P(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} + \alpha a^{\frac{\mu}{\nu}}$, welches das vollständige Integrale ist, indem die willkürliche Constante α dabey erscheint.

Beyspiel 1.

§. 165. Die Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ auf diese Weise durch eine Reihe zu integriren.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allgemeinen Formel, so ist $a = 1$, $b = -1$, $m = 1$, $n = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 2$.

Setzt man demnach $y = z\sqrt{1-x^2}$, so gibt die erste Auflösung

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{rc.}, \quad \text{wobey}$$

$A = 1$, $B = \frac{2}{3} \cdot A$, $C = \frac{4}{5} \cdot B$, $D = \frac{6}{7} \cdot C$, $E = \frac{8}{9} \cdot D$, rc.

Hieraus folgt

$$y = \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \text{ꝛc.}\right)\sqrt{1-x^2},$$

welches Integrale für $x = 0$ verschwindet. Es ist demnach $y = \text{arc. sin.} x$; die zweyte Methode ist hier unbrauchbar, weil $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu} = 1$ ist.

Zusatz 1.

§. 166. Für $x = 1$ scheint $y = 0$ zu werden, weil $\sqrt{1-x^2} = 0$ ist. Allein man muß erwägen, daß in diesem Falle die Summe der unendlichen Reihe unendlich werde, so daß man ohne Anstand $y = \frac{\pi}{2}$ setzen kann. Setzen wir $x = \frac{1}{2}$, so wird $y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, und demnach

$$\frac{\pi}{6} = \left(1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2.4}{3.5.4^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7.4^3} + \text{ꝛc.}\right).\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Zusatz 2.

§. 167. Auf ähnliche Weise findet man aus der Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ die Reihe

$$y = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \text{ꝛc.}\right)\sqrt{1+x^2},$$

und es ist $y = l\,(x + \sqrt{1+x^2})$.

Beyspiel 2.

§. 168. Man bestimme das Integrale von $dy = \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ nach derselben Methode durch eine Reihe.

Es ist also

$m = 0,\; n = 2,\; \mu = 1,\; \nu = 2,\; a = 1$ und $b = -1$,

daher muß die zweyte Reihe gebraucht werden, wobey man

$$z = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = Ax^{-2} + Bx^{-4} + Cx^{-6} + Dx^{-8} + \text{ꝛc.}$$

zu setzen hat.

Man findet $A = 1,\; B = \frac{2}{3}.A,\; C = \frac{4}{5}.B,\; D = \frac{6}{7}.C$ ꝛc. Hieraus erhalten wir demnach

$$y = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3.x^4} + \frac{2.4}{3.5.x^6} + \frac{2.4.6}{3.5.7.x^8} + \text{ꝛc.}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

Aber die Integration gibt $y = l\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, welcher Werth mit dem vorigen übereinstimmt, denn beyde verschwinden für $x = 1$.

Zusatz 1.

§. 169. Da aber diese Reihe nur convergirt, wenn $x > 1$ genommen wird, für diesen Fall aber der Ausdruck $\sqrt{1-x^2}$ imaginär wird, so ist diese Reihe unbrauchbar.

Zusatz 2.

§. 170. Ist $dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ gegeben, so erhält man für y dieselbe Reihe, nur mit $-\sqrt{-1}$ multiplicirt; es wird nämlich

$$y = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3 \cdot x^4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot x^6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^8} + \text{rc.}\right)\sqrt{x^2-1}.$$

Für $x = \frac{1}{u}$ wird $dy = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$ und $y = C - \text{arc. sin. } u$,

$$\text{oder} \quad y = C - \text{arc. sin. } \frac{1}{x}:$$

wobey $C = 0$ gesetzt werden muß, weil jene Reihe für $x = \infty$ verschwindet, so daß also

$$y = -\text{arc. sin. } \frac{1}{x}$$

ist, welche Gleichung mit obigem Resultate übereinstimmt, wenn $\frac{1}{x} = v$ gesetzt wird.

Beyspiel 3.

§. 171. Die Formel $dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx^4}}$ mittelst einer Reihe zu integriren.

Hier ist $m = 1$, $n = 4$, $\mu = 1$, $\nu = 2$. Setzt man demnach

$$y = z\sqrt{a+bx^4},$$

so gibt die erste Auflösung

$$z = Ax + Bx^5 + Cx^9 + Dx^{13} + \text{rc.}, \quad \text{wobey}$$

$$A = \frac{1}{a};\; B = -\frac{3b}{5a} \cdot A;\; C = -\frac{7b}{9a} \cdot B;\; D = -\frac{11b}{13a} \cdot C \text{ rc.},$$

so daß

$$y = \left(\frac{x}{a} - \frac{3bx^5}{5a^2} + \frac{3 \cdot 7 \cdot b^2x^9}{5 \cdot 9 \cdot a^3} - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot b^3x^{13}}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot a^4} + \text{rc.}\right)\sqrt{a+bx^4}.$$

Hier findet aber auch die zweyte Auflösung Statt, wenn

$$z = Ax^{-3} + Bx^{-7} + Cx^{-11} + Dx^{-15} + \text{zc.}$$

gesetzt wird, wobey

$$A = -\frac{1}{b}, \; B = -\frac{3a}{5b}.A, \; C = -\frac{7a}{9b}.B, \; D = -\frac{11a}{13b}.C \text{ zc.}$$

Hieraus folgt

$$y = -\left(\frac{1}{bx^3} - \frac{3.a}{5.b^2x^7} + \frac{3.7.a^2}{5.9.b^3x^{11}} - \frac{3.7.11.a^3}{5.9.13.b^4x^{15}} + \text{zc.}\right)\sqrt{a+bx^4};$$

die erstere Reihe verschwindet für $x = 0$, die letztere aber für $x = \infty$.

Zusatz 1.

§. 172. Der Unterschied der beyden Reihen ist beständig, nämlich

$$\left\{\begin{matrix} + \frac{x}{a} - \frac{3.bx^5}{5.a^2} + \frac{3.7.b^2x^9}{5.9.a^3} - \frac{3.7.11.b^3x^{13}}{5.9.13.a^4} + \text{zc.} \\ + \frac{1}{bx^3} - \frac{3.a}{5.b^2x^7} + \frac{3.7.a^2}{5.9.b^3x^{11}} - \frac{3.7.11.a^3}{5.9.13.b^4x^{15}} + \text{zc.} \end{matrix}\right\}\sqrt{a+bx^4} = \text{Const.}$$

Zusatz 2.

§. 173. Addirt man diese beyden Reihen, so erhält man

$$\frac{a+bx^4}{abx^3} - \frac{3}{5}.\frac{a^3+b^3x^{12}}{a^2b^2x^7} + \frac{3.7}{5.9}.\frac{a^5+b^5x^{20}}{a^3b^3x^{11}} - \text{zc.} = \frac{C}{\sqrt{a+bx^4}},$$

wo für C immer dieselbe Größe erhalten wird, welchen Werth wir auch dem x beylegen.

Zusatz 3.

§. 174. Für $a = 1$ und $b = 1$ gibt diese Reihe, mit $\sqrt{1+x^4}$ multiplicirt, immer eine constante Größe, nämlich

$$\left(\frac{1+x^4}{x^3} - \frac{3}{5}.\frac{1+x^{12}}{x^7} + \frac{3.7}{5.7}.\frac{1+x^{20}}{x^{11}} - \text{zc.}\right)\sqrt{1+x^4} = C.$$

Da also für $x = 1$

$$C = \left(1 - \frac{3}{5} + \frac{3.7}{5.9} - \frac{3.7.11}{5.9.13} + \text{zc.}\right) 2\sqrt{2}$$

wird, so bezeichnet dieser Ausdruck auch den Werth dieser Reihe, für jeden Werth von x.

Zusatz 4.

§. 175. Diese letzte Reihe, bey welcher die Zeichen wechseln, läßt sich durch Differenzen leicht in eine andere umstalten, bey welcher alle

chen übereinstimmen; man findet nämlich für dieselbe Constante

$$= \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1.3}{5.9} + \frac{1.3.5}{5.9.13} + \frac{1.3.5.7}{5.9.13.17} + \text{rc.}\right)\sqrt{2},$$

che Reihe schnell genug convergirt. Man erhält näherungsweise $= \frac{13}{7}$.

Anmerkung.

§. 176. Die hier gezeigte Methode besteht darin, daß man irgend willkürliche Reihe annimmt, und sie aus der Natur der Sache be- mt. Diese Methode findet vorzüglich ihre Anwendung bey der Auf- ng der Differenzialgleichungen, obgleich sie auch bey gegenwärtigen ersuchungen oft mit Nutzen gebraucht wird. Mit Hülfe dieser Me- e können wir auch die reciproken Werthe transcendenter Größen, z. B. der Exponentialgrößen, und der Sinusse oder Cosinusse der nkel durch Reihen darstellen. Sind gleichwohl diese Reihen schon auf m andern Wege gefunden worden, so wird es dennoch gut seyn, sie ch Integration abzuleiten, weil wir dabey auf andere schöne Bemer- gen geleitet werden.

Aufgabe 15.

§. 177. Die Exponentialgröße $y = a^x$ in eine ihe zu verwandeln.

Auflösung.

Nehmen wir beyderseits die Logarithmen, so erhalten wir $ly = xla$, d durch Differenziation $\frac{dy}{y} = dxla$ oder $\frac{dy}{dx} = yla$; wir müssen nnach den Werth von y durch eine Reihe ausdrücken. Da das voll- ndige Integral eine größere Ausdehnung hat, so bemerken wir für sen Fall, daß $y = 1$ für $x = 0$ werden müsse, und nehmen daher gende Reihe für y an:

$$y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{rc.};$$

raus folgt

$$\frac{dy}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{rc.}$$

Substituiren wir diese Werthe in der Gleichung $\frac{dy}{dx} - yla = 0$, finden wir

$$\left.\begin{array}{l} A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ꝛc.} \\ - la - A.la - B.la - C.la - D.la - \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = 0,$$

woraus sich folgende Bestimmungen der Coefficienten ergeben:

$$A = la, \quad B = \tfrac{1}{2}A.la, \quad C = \tfrac{1}{3}B.la, \quad D = \tfrac{1}{4}C.la \text{ ꝛc.}$$

und so erhalten wir die Reihe

$$y = a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{x^4(la)^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.},$$

welche aus der Einleitung in die Analysis schon bekannt ist.

Anmerkung.

§. 178. Bey Sinussen und Cosinussen der Winkel muß man bis zu den Differenzialien des zweyten Grades gehen, aus welchen dann die das Integrale darstellende Reihe zu entwickeln ist. Da aber die zweyfache Integration eine doppelte Bestimmung erheischt, so muß die Reihe so angenommen werden, daß sie zweyen der Natur der Sache entsprechenden Bedingungen Genüge leistet. Allein diese Methode erstreckt sich auch auf andere Untersuchungen, die sogar bey algebraischen Größen Statt finden. Mit einem Beyspiele dieser Art wollen wir beginnen.

Aufgabe 16.

§. 179. Den Ausdruck $y = [x + \sqrt{1 + x^2}]^n$ in eine Reihe zu verwandeln, die nach den Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung.

Weil $ly = nl[x + \sqrt{1 + x^2}]$, so ist $\frac{dy}{y} = \frac{ndx}{\sqrt{1 + x^2}}$; um nun das Wurzelzeichen wegzuschaffen, nehme man die Quadrate, so erhält man

$$(1 + x^2)\,dy^2 = n^2 y^2 dx^2.$$

Differenzirt man diese Gleichung nochmahls, indem man dx als constant betrachtet, und dividirt gleich durch $2dy$, so erhält man

$$d^2y\,(1 + x^2) + x\,dx\,dy - n^2 y\,dx^2 = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung muß nun y in eine Reihe entwickelt werden.

Zuerst ist klar, daß für $x = 0$: $y = 1$, und daß, wenn x unendlich klein genommen wird, $y = (1 + x)^n = 1 + nx$ werde. Man nehme also folgende Reihe an:

$y = 1 + nx + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + Ex^6 + \text{etc.}$,
so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = n + 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + 5Dx^4 + 6Ex^5 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A + 6Bx + 12Cx^2 + 20Dx^3 + 30Ex^4 + \text{etc.}$$

Nach gemachter Substitution bekommen wir

$$\left.\begin{array}{l} 2A + 6Bx + 12Cx^2 + 20Dx^3 + 30Ex^4 + 42Fx^5 + \text{etc.} \\ \quad + 2A + 6B + 12C + 20D + \text{etc.} \\ + nx + 2A + 3B + 4C + 5D + \text{etc.} \\ - n^2 - n^3 - An^2 - Bn^2 - Cn^2 - Dn^2 - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$A = \frac{n^2}{2};\ B = \frac{n(n^2-1)}{2 \cdot 3};\ C = \frac{A(n^2-4)}{3 \cdot 4};\ D = \frac{B(n^2-9)}{4 \cdot 5};\ \text{etc.}$$

so daß man hat

$$y = 1 + nx + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}x^4 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}x^5$$
$$+ \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \text{etc.}$$

Zusatz 1.

§ 180. So wie $y = [x + \sqrt{1+x^2}]^n$ ist, so erhalten wir, wenn $z = [-x + \sqrt{1+x^2}]^n$ gesetzt wird, eine ähnliche Reihe für z, bey welcher x nur negativ genommen wird; wir folgern demnach

$$\frac{y+z}{2} = 1 + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}x^4 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \text{etc.}$$

$$\frac{y-z}{2} = nx + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}x^5$$
$$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 181. Für $x = \sqrt{-1} . \sin.\varphi$ wird $\sqrt{1+x^2} = \cos.\varphi$, daher

$$y = (\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)^n = \cos.n\varphi + \sqrt{-1}\sin.n\varphi \text{ und}$$
$$z = (\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)^n = \cos.n\varphi - \sqrt{-1}\sin.n\varphi,$$

und hieraus folgern wir

$$\cos. n\varphi = 1 - \frac{n^2}{1.2}\sin.^2\varphi + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}\sin.^4\varphi$$
$$- \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2\,.\,3.4\,.\,5.6}\sin.^6\varphi +$$
$$\sin. n\varphi = n\sin.\varphi - \frac{n(n^2-1)}{1\,.\,2.3}\sin.^3\varphi + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\,.\,2.3\,.\,4.5}\sin$$
$$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\,.\,2.3\,.\,4.5\,.\,6.7}\sin.^7\varphi +$$

Zusatz 3.

§. 182. Diese Reihen gehören zur Multiplication der Win und haben das Eigenthümliche, daß die erstere nur in den Fällen, welchen n eine gerade Zahl ist, die zweyte aber für jedes ungerad abbricht.

Aufgabe 17.

§. 183. Den Sinus und Cosinus eines gegeben Winkels φ durch eine unendliche Reihe darzustelle

Auflösung.

Es sey $y = \sin.\varphi$ und $z = \cos.\varphi$, so ist

$$dy = d\varphi\sqrt{1-y^2} \quad \text{und} \quad dz = - d\varphi\sqrt{1-z^2}.$$

Nimmt man die Quadrate, so erhält man

$$dy^2 = d\varphi^2(1-y^2) \quad \text{und} \quad dz^2 = d\varphi^2(1-z^2).$$

Durch nochmahliges Differenziren findet man, wenn $d\varphi$ constant betrachtet wird:

$$d^2y = -y\,d\varphi^2 \quad \text{und} \quad d^2z = -z\,d\varphi^2,$$

und so müssen nun y und z aus derselben Gleichung bestimmt werd

Da nun für $y = \sin.\varphi$, bey dem Verschwinden von φ, y = wird, für $z = \cos.\varphi$ aber $z = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ oder $z = 1 + o\varphi$, nehme man folgende Reihen an:

$$y = \varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 + C\varphi^7 + \text{etc.}$$
$$\text{und} \quad z = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \text{etc.}$$

Nach gehöriger Substitution findet man

$$\left.\begin{matrix} 2\,.\,3\,.\,A\varphi + 4\,.\,5\,.\,B\varphi^3 + 6\,.\,7\,.\,C\varphi^5 + \text{etc.} \\ + \quad 1 \quad + \quad A \quad + \quad B \end{matrix}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 1\,.\,2\,.\,\alpha + 3\,.\,4\,.\,\beta\varphi^2 + 5\,.\,6\,.\,\gamma\varphi^4 + \text{etc.} \\ + \quad 1 \quad + \quad \alpha \quad + \quad \beta \end{matrix}\right\} = 0;$$

Hieraus folgt

$$A = \frac{-1}{2.3};\quad B = \frac{-A}{4.5};\quad C = \frac{-B}{6.7};\quad D = \frac{-C}{8.9};\quad \text{2c.}$$

$$\alpha = \frac{-1}{1.2};\quad \beta = \frac{-\alpha}{3.4};\quad \gamma = \frac{-\beta}{5.6};\quad \delta = \frac{-\gamma}{7.8};\quad \text{2c.}$$

wodurch wir die wohlbekannten Reihen erhalten:

$$\sin.\varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{2c.}$$

$$\cos.\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{2c.}$$

Anmerkung.

§. 184. Es war nicht gerade nothwendig, bis zu den Differenzialien des zweyten Grades zu gehen: denn aus den Differenzialien der Formeln $y = \sin.\varphi$ und $z = \cos.\varphi$, nämlich aus $dy = z\,d\varphi$ und $dz = -y\,d\varphi$ werden dieselben Reihen auf eine leichte Weise abgeleitet. Man nehme wie vorhin die Reihen

$$y = \varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 + C\varphi^7 + \text{2c. und}$$
$$z = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \text{2c.},$$

so findet man durch Substitution aus der erstern

$$\left.\begin{matrix} 1 + 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 + 7C\varphi^6 + \text{2c.} \\ -1 - \alpha \quad - \beta \quad - \gamma \end{matrix}\right\} = 0,$$ und aus der zweyten Reihe

$$\left.\begin{matrix} 2\alpha\varphi + 4\beta\varphi^3 + 6\gamma\varphi^5 + \text{2c.} \\ 1 \quad + A \quad + B \end{matrix}\right\} = 0,$$

woraus sich folgende Bestimmungen ergeben:

$$\alpha = -\frac{1}{2};\quad A = \frac{\alpha}{3};\quad \beta = -\frac{A}{4};\quad B = \frac{\beta}{5};\quad \gamma = -\frac{B}{6};\quad C = \frac{\gamma}{7};\quad \text{2c.}$$

folglich

$$\alpha = -\frac{1}{2};\quad \beta = +\frac{1}{2.3.4};\quad \gamma = \frac{-1}{2.3.4.5.6};\quad \text{2c.}$$

$$A = -\frac{1}{2.3};\quad B = +\frac{1}{2.3.4.5};\quad C = \frac{-1}{2.......7};\quad \text{2c.}$$

welche Werthe mit den obigen übereinstimmen. Hieraus sieht man, daß man öfter zwey Gleichungen zugleich leichter durch Reihen entwickeln könne, als wenn man jede einzeln für sich behandelt.

Aufgabe 18.

§. 185. Den Werth der Größe y, welcher der Gleichung $\frac{m\,dy}{\sqrt{a+by^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{f+gx^2}}$ Genüge leistet, durch eine Reihe darzustellen.

Auflösung.

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$\frac{m}{\sqrt{b}}\, l\,[\sqrt{a+by^2} + y\sqrt{b}] = \frac{n}{\sqrt{g}}\, l\,[\sqrt{f+gx^2} + x\sqrt{g}] + C.$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f+gx^2}+x\sqrt{g}}{h}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - \frac{a}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f+gx^2}-x\sqrt{g}}{k}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}},$$

wenn die Constanten h und k so genommen werden, daß $hk = f$ wird.

Wird x unendlich klein, so wird

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f}+x\sqrt{g}}{h}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - \frac{a}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f}-x\sqrt{g}}{k}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right]$$

$$+ \frac{nx}{2m\sqrt{f}}\left[\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} + a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right];$$

oder, wenn $y = A + Bx$ gesetzt wird, so wird $B = \frac{n\sqrt{A^2b+a}}{m\sqrt{f}}$, so daß die Constante B bestimmt wird aus der Constanten

$$A = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right],$$

und umgekehrt

$$\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} = A\sqrt{b} + \sqrt{a+bA^2} \quad \text{und}$$

$$a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} = -A\sqrt{b} + \sqrt{a+bA^2}.$$

Um nun die Reihe zu bestimmen, differenzire man das Quadrat der gegebenen Gleichung, nämlich

$$m^2(f + gx^2) \, . \, dy^2 = n^2(a + by^2) \, . \, dx^2,$$

von neuem, indem man dx constant nimmt, so erhält man nach der Division durch $2dy$ die Gleichung

$$m^2 d^2y(f + gx^2) + m^2 gx dx dy - n^2 by dx^2 = 0.$$

Nun nehme man für y folgende Reihe an:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ꝛc.},$$

so erhält man durch Substitution

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2m^2fC & + 6m^2fDx & + 12m^2fEx^2 & + 20m^2fFx^3 & + \text{ꝛc.} \\ & + 2m^2gC & + 6m^2gD & & + \text{ꝛc.} \\ + m^2gB & + 2m^2gC & + 3m^2gD & & + \text{ꝛc.} \\ - n^2bA & - n^2bB & - n^2bC & - n^2bD & - \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Werden also A und B gegeben, so werden die übrigen Buchstaben folgender Maßen bestimmt:

$$C = \frac{n^2b}{2m^2f} \, . \, A;$$

$$D = \frac{n^2b - m^2g}{2 \, . \, 3 \, . \, m^2f} \, . \, B; \quad E = \frac{n^2b - 4m^2g}{3 \, . \, 4 \, . \, m^2f} \, . \, C;$$

$$F = \frac{n^2b - 9m^2g}{4 \, . \, 5 \, . \, m^2f} \, . \, D; \quad G = \frac{n^2b - 16m^2g}{5 \, . \, 6 \, . \, m^2f} \, . \, E;$$

$$H = \frac{n^2b - 25m^2g}{6 \, . \, 7 \, . \, m^2f} \, . \, F; \quad I = \frac{n^2b - 36m^2g}{7 \, . \, 8 \, . \, m^2f} \, . \, G;$$

und daher ist die Reihe für y bekannt.

Beyspiel 1.

§. 186. **Die transcendente Function $c^{\text{arc. sin.} x}$ durch eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe auszudrücken.**

Setzt man $y = c^{\text{arc. sin.} x}$, so ist

$$ly = \text{arc. sin.} x \, lc \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx \, . \, lc}{\sqrt{1 - x^2}},$$

demnach $dy^2(1 - x^2) = y^2 \, . \, (lc)^2 \, . \, dx^2$, und durch Differenziation

$$d^2y(1 - x^2) - xdxdy - ydx^2(lc)^2 = 0.$$

Nimmt man nun x unendlich klein, so wird $y = c^x = 1 + xlc$; man nehme demnach folgende Reihe an:

$$y = 1 + xlc + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + \text{ꝛc.},$$

Aufgabe 18.

§. 185. Den Werth der Größe y, welcher der Gleichung $\frac{m\,dy}{\sqrt{a+by^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{f+gx^2}}$ Genüge leistet, durch eine Reihe darzustellen.

Auflösung.

Die Integration dieser Gleichung gibt

$$\frac{m}{\sqrt{b}}\, l\,[\sqrt{a+by^2} + y\sqrt{b}] = \frac{n}{\sqrt{g}}\, l\,[\sqrt{f+gx^2} + x\sqrt{g}] + C.$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f+gx^2}+x\sqrt{g}}{h}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - \frac{a}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f+gx^2}-x\sqrt{g}}{k}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}},$$

wenn die Constanten h und k so genommen werden, daß $hk = f$ wird.

Wird x unendlich klein, so wird

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f}+x\sqrt{g}}{h}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - \frac{a}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f}-x\sqrt{g}}{k}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right]$$

$$+ \frac{nx}{2m\sqrt{f}}\left[\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} + a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right];$$

oder, wenn $y = A + Bx$ gesetzt wird, so wird $B = \frac{n\sqrt{A^2b+a}}{m\sqrt{f}}$, so daß die Constante B bestimmt wird aus der Constanten

$$A = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left[\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} - a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right],$$

und umgekehrt

$$\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} = A\sqrt{b} + \sqrt{a+bA^2} \text{ und}$$

$$a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}} = -A\sqrt{b} + \sqrt{a+bA^2}.$$

Um nun die Reihe zu bestimmen, differenzire man das Quadrat der gegebenen Gleichung, nämlich

$$m^2(f + gx^2) \,.\, dy^2 = n^2(a + by^2) \,.\, dx^2,$$

von neuem, indem man dx constant nimmt, so erhält man nach der Division durch $2dy$ die Gleichung

$$m^2 d^2y(f + gx^2) + m^2 gx\,dx\,dy - n^2 by\,dx^2 = 0.$$

Nun nehme man für y folgende Reihe an:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.},$$

so erhält man durch Substitution

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2m^2fC & + 6m^2fDx & + 12m^2fEx^2 & + 20m^2fFx^3 & + \text{etc.} \\ & & + 2m^2gC & + 6m^2gD & + \text{etc.} \\ & + m^2gB & + 2m^2gC & + 3m^2gD & + \text{etc.} \\ - n^2bA & - n^2bB & - n^2bC & - n^2bD & - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Werden also A und B gegeben, so werden die übrigen Buchstaben folgender Maßen bestimmt:

$$C = \frac{n^2b}{2\,m^2f} \,.\, A;$$

$$D = \frac{n^2b - m^2g}{2\,.\,3\,.\,m^2f} \,.\, B; \quad E = \frac{n^2b - 4m^2g}{3\,.\,4\,.\,m^2f} \,.\, C;$$

$$F = \frac{n^2b - 9m^2g}{4\,.\,5\,.\,m^2f} \,.\, D; \quad G = \frac{n^2b - 16m^2g}{5\,.\,6\,.\,m^2f} \,.\, E;$$

$$H = \frac{n^2b - 25m^2g}{6\,.\,7\,.\,m^2f} \,.\, F; \quad I = \frac{n^2b - 36m^2g}{7\,.\,8\,.\,m^2f} \,.\, G;$$

und daher ist die Reihe für y bekannt.

Beyspiel 1.

§. 186. Die transcendente Function $c^{\text{arc. sin.}\,x}$ durch eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe auszudrücken.

Setzt man $y = c^{\text{arc. sin.}\,x}$, so ist

$$ly = \text{arc. sin.}\,x\,lc \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx\,.\,lc}{\sqrt{1 - x^2}},$$

demnach $dy^2(1 - x^2) = y^2 \,.\, (lc)^2 \,.\, dx^2$, und durch Differenziation

$$d^2y(1 - x^2) - x\,dx\,dy - y\,dx^2(lc)^2 = 0.$$

Nimmt man nun x unendlich klein, so wird $y = c^x = 1 + xlc$; man nehme demnach folgende Reihe an:

$$y = 1 + xlc + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + \text{etc.},$$

so erhält man durch Substitution

$$\left.\begin{array}{lllll} 1.2.A + 2.3.Bx + 3.4.Cx^2 + 4.5.Dx^3 + 5.6.Ex^4 \text{ etc.} \\ \qquad\qquad -1.2.A \quad -2.3.B \quad -3.4.C \\ -lc \quad -2A \quad -3B \quad -4C \\ -(lc)^2 - (lc)^3 - A(lc)^2 \quad -B(lc)^2 \quad -C(lc)^2 \end{array}\right\} = 0,$$

wodurch wir folgende Werthe für die übrigen Coefficienten erhalten:

$$A = \frac{(lc)^2}{1.2}; \quad C = \frac{4+(lc)^2}{3.4}.A; \quad E = \frac{16+(lc)^2}{5.6}.C;$$

$$B = \frac{[1+(lc)^2]\,lc}{2.3}; \quad D = \frac{9+(lc)^2}{4.5}.B; \quad F = \frac{25+(lc)^2}{6.7}.D.$$

Setzen wir der Kürze wegen $lc = \gamma$, so erhalten wir

$$c^{\text{arc. sin. } x} = 1 + \gamma x + \frac{\gamma^2}{1.2}x^2 + \frac{\gamma(1+\gamma^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{\gamma^2(4+\gamma^2)}{1.2.3.4}x^4$$
$$+ \frac{\gamma(1+\gamma^2)(9+\gamma^2)}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{\gamma^2(4+\gamma^2)(16+\gamma^2)}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \text{etc.}$$

B e y s p i e l 2.

§. 187. Es sey $x = \sin.\varphi$; man suche eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe für $\sin. n\varphi$.

Man setze $y = \sin. n\varphi$, und bemerke, daß, wenn φ unendlich klein wird, $x = \varphi$ und $y = n\varphi = nx$ werde, das heißt $y = 0 + nx$, welches die Anfangsglieder der gesuchten Reihe sind. Nun ist aber

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } nd\varphi = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ also } \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

oder, wenn man quadrirt,

$$(1-x^2)\,dy^2 = n^2dx^2(1-y^2), \text{ folglich}$$
$$d^2y(1-x^2) - x\,dx\,dy + n^2y\,dx^2 = 0.$$

Man nehme demnach folgende Reihe an:

$$y = nx + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + \text{etc.},$$

so erhält man durch Substitution

$$\left.\begin{array}{llll} 2.3.Ax + 4.5.Bx^3 + 6.7.Cx^5 + 8.9.Dx^7 + \text{etc.} \\ \qquad -2.3.A \quad -4.5.B \quad -6.7.C \\ -n \quad -3A \quad -5B \quad -7C \\ +n^3 \quad +n^2A \quad +n^2B \quad +n^2C \end{array}\right\} = 0,$$

woraus sich folgende Bestimmungen ergeben:

$$A = \frac{-n(n^2-1)}{2.3}; \quad B = \frac{-(n^2-9)A}{4.5}; \quad C = \frac{-(n^2-25)B}{6.7}; \text{ etc.}$$

Es ist demnach

$$y = nx - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}.x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \text{etc.}$$

oder

$$\sin. n\varphi = n \sin.\varphi - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}\sin.^3\varphi + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin.^5\varphi - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7}\sin.^7\varphi + \text{etc.}$$

Anmerkung.

§. 188. Weil diese Reihe nur dann abbricht, wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist für die Fälle, wo n gerade ist, zu bemerken, daß man dann die Reihe bequem durch das Product aus $\sin.\varphi$ in eine andere nach den Potenzen der Cosinusse von φ fortschreitende Reihe darstellen kann. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\cos.\varphi = u \quad \text{und} \quad \sin.n\varphi = z\sin.\varphi = z\sqrt{1-u^2},$$

so erhält man, weil $d\varphi = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$, durch Differenziation

$$\frac{-ndu\cos.n\varphi}{\sqrt{1-u^2}} = dz\sqrt{1-u^2} - \frac{zudu}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{oder}$$

$$-ndu\cos.n\varphi = dz(1-u^2) - zudu;$$

betrachtet man du als constant, und differenzirt diese Gleichung noch ein Mahl, so wird

$$\frac{-n^2du^2\sin.n\varphi}{\sqrt{1-u^2}} = d^2z(1-u^2) - 3ududz - zdu^2 = -n^2zdu^2,$$

weil $\frac{\sin.n\varphi}{\sqrt{1-u^2}} = z$ ist. Es muß demnach die gesuchte Reihe für $z = \frac{\sin.n\varphi}{\sin.\varphi}$ aus folgender Gleichung entwickelt werden:

$$d^2z(1-u^2) - 3ududz - zdu^2 + n^2zdu^2 = 0,$$

wobey zu bemerken ist, daß wegen $u = \cos.\varphi$ für ein unendlich klein werdendes u, in welchem Falle $\varphi = 90°$ ist, entweder $z = 0$, wenn n eine gerade Zahl ist, oder $z = 1$, wenn $n = 4\alpha + 1$; oder $z = -1$, wenn $n = 4\alpha - 1$ werde. Diese einzelnen Fälle müssen für sich betrachtet werden.

Für alle diese Fälle sey $\varphi = 90^\circ - \omega$, so wird, wenn ω verschwindet:

$$u = \cos.\varphi = \omega,\ \sin.\varphi = 1;\ \sin.n\varphi = \sin.(90^\circ n - n\omega) = z.$$

Nun wird für die einzelnen Fälle

I.	wenn	$n = 4\alpha;$	$z =$	$-\sin.n\omega = -nu;$
II.	wenn	$n = 4\alpha + 1;$	$z =$	$\cos.n\omega = 1;$
III.	wenn	$n = 4\alpha + 2;$	$z =$	$\sin.n\omega = +nu;$
IV.	wenn	$n = 4\alpha + 3;$	$z =$	$-\cos.n\omega = -1;$

woraus dann die bereits bekannten Reihen abgeleitet werden.

Kapitel IV.

...on der Integration der Formeln, welche logarithmische und Exponentialgrößen enthalten.

Aufgabe 19.

§. 189. Das Integral der Formel $Xdxlx$ zu be...mmen, wenn X eine algebraische Function von x ...zeichnet.

Auflösung.

Man suche das Integrale $\int X\,dx$, welches gleich Z seyn soll. ...il das Differenzial von Zlx gleich $dZlx + Z\frac{dx}{x}$, so ist

$$Zlx = \int dZ.lx + \int Z\frac{dx}{x}, \text{ und demnach}$$

$$\int dZ.lx = \int X\,dx\,lx = Zlx - \int Z\frac{dx}{x}.$$

Auf diese Art ist die Integration der gegebenen Formel auf die ...tegration des Ausdruckes $Z\frac{dx}{x}$ zurückgeführt, welcher, wenn Z ...e algebraische Function von x ist, keine Logarithmen mehr enthält, ...d daher nach den früheren Regeln behandelt werden kann. Läßt sich ...r $\int X\,dx$ nicht algebraisch darstellen, so nützt uns die vorige Reduc...n nichts, und wir müssen uns mit der bloßen Andeutung des In...rales $\int X\,dx\,lx$ begnügen, und den Werth desselben durch Nähe...ng darstellen; der einzige Fall $X = \frac{1}{x}$ ist ausgenommen, denn ...n wird offenbar $\int \frac{dx}{x} lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C$.

Zusatz 1.

§. 190. Wenn die Formel $X\,dx\,lV$ gegeben ist, wobey V ...end eine Function von x bezeichnet, so findet man auf dieselbe ...ise, wenn $\int X\,dx = Z$ bekannt ist, das Integrale jenes Ausdruckes $ZlV - \int Z\frac{dV}{V}$, wodurch dasselbe auf eine algebraische Formel ...ückgeführt wird, sobald Z algebraisch ist.

Zusatz 2.

§. 191. Für den besonderen Fall $\frac{dx}{x} lx$ kann man bemerken, daß, wenn für $lx = u$ die Größe U irgend eine algebraische Function von u ist, die Integration der Formel $U \frac{dx}{x}$ keiner Schwierigkeit unterworfen sey, weil sie wegen $\frac{dx}{x} = du$ in $U du$ übergeht, deren Integration nach dem früheren Kapitel bewerkstelligt werden kann.

Anmerkung.

§. 192. Diese Reduction stützt sich auf den Satz, daß, weil $d.xy = ydx + xdy$, umgekehrt $xy = \int ydx + \int xdy$, folglich $\int ydx = xy - \int xdy$ werde, wodurch demnach im Allgemeinen die Integration der Formel ydx auf die Integration des Ausdruckes xdy zurückgeführt wird. Wenn demnach irgend eine Formel Vdx gegeben wird, und es läßt sich die Function V in zwey solche Factoren, nämlich $V = P.Q$, auflösen, daß das Integrale $\int Pdx = S$ angegeben werden kann, so wird wegen $Pdx = dS$ offenbar $Vdx = PQdx = QdS$, und demnach $\int Vdx = QS - \int SdQ$. Diese Reduction findet ihre vorzügliche Anwendung, wenn die Formel $\int SdQ$ einfacher ist, als die gegebene $\int Vdx$, und dann läßt sich dieselbe auf demselben Wege auf einen noch einfacheren Ausdruck zurückleiten. Indessen geschieht es öfters, daß uns diese Reduction endlich auf einen Ausdruck führt, der dem gegebenen ähnlich ist, in welchem Falle die Integration auf dieselbe Weise durchgeführt wird. Würden wir z. B. durch weitere Rechnung auf die Gleichung

$\int SdQ = T + n\int Vdx$ geleitet, so wäre auch

$\int Vdx = QS - T - n\int Vdx$, und demnach $\int Vdx = \frac{QS - T}{n+1}$.

Eine solche Reduction leistet daher vorzüglich dann gute Dienste, wenn sie auf einen einfacheren Ausdruck, oder auf denselben Ausdruck führt. Nach diesem Princip wollen wir nun die vorzüglicheren Fälle behandeln, in welchen die Formel $Xdxlx$ entweder die Integration gestattet, oder durch eine Reihe bequem dargestellt werden kann.

Beyspiel 1.

§. 193. Das Integral der Differenzialformel $x^n dxlx$ zu bestimmen, wenn n was immer für eine Zahl bezeichnet.

durch $\alpha\varphi + \beta$ ausdrücken würden, so wie auch früher der Ausdruck arc. sin. x in demselben Sinne zu nehmen ist, als wenn man für x irgend eine Function setzen würde. Betrachten wir also solche Formeln, in welchen Sinusse oder Cosinusse im Nenner erscheinen. Die einfachsten sind folgende:

$$\text{I. } \frac{d\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{II. } \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}; \quad \text{III. } \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{IV. } \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi};$$

deren Integrale vorzüglich wichtig sind. Bey der ersten Formel wenden wir folgende Transformationen an:

$$\frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\sin.\varphi^2} = \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{1 - \cos.\varphi^2} = \frac{-dx}{1 - x^2},$$

wenn $\cos.\varphi = x$ gesetzt wird; dadurch wird

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi}.$$

Für die zweyte Formel setzen wir

$$\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{1 - \sin.\varphi^2} = \frac{dx}{1 - x^2} \text{ für } \sin.\varphi = x,$$

$$\text{also } \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}.$$

Die Integration der dritten und vierten Formel wird offenbar durch Logarithmen bewerkstelligt, es wird daher gut seyn, sich folgende Integrale zu merken:

$$\text{I. } \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi} = l\, \frac{\sqrt{1-\cos.\varphi}}{\sqrt{1+\cos.\varphi}} = l\, \text{tg.}\, \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\text{II. } \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi} = l\, \frac{\sqrt{1+\sin.\varphi}}{\sqrt{1-\sin.\varphi}} = l\, \text{tg.}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\text{III. } \int \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\sin.\varphi} = l\, \sin.\varphi = \int \frac{d\varphi}{\text{tg.}\varphi} = \int d\varphi \,.\, \text{cotg.}\varphi,$$

$$\text{IV. } \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -l\, \cos.\varphi = \int d\varphi \,.\, \text{tg.}\varphi.$$

Hieraus erhalten wir durch Addition von III. und IV.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi} = l\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = l\, \text{tg.}\varphi.$$

Aufgabe 28.

§. 249. Die Integrale der Formeln

$$\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} \text{ und } \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi^m}{\sin.\varphi^n} \text{ zu bestimmen.}$$

$$\int \frac{dx}{x}\, l\,\frac{1}{1-x} = x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{1}{25}x^5 + \text{2c.},$$

und daher

$$\int \frac{dx}{1-x}\, l x = l\,\frac{1}{1-x}\,.\,l x - x - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{1}{25}x^5 - \text{2c.},$$

welches Integrale für $x = 0$ verschwindet.

Denn obgleich $l x$ dann unendlich wird, so verschwindet dennoch $l\,\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \text{2c.}$ für sich, also auch wenn dieser Ausdruck mit $l(x)$ multiplicirt wird, denn es ist allgemein $x^n\, l x = 0$ für $x = 0$, so lange n eine positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 1.

§. 197. Setzen wir $1 - x = u$, so wird

$$\frac{dx}{1-x}\, l x = \frac{-du}{u}\, l(1-u) = \frac{du}{u}\, l\,\frac{1}{1-u},\ \text{und daher}$$

$$\int \frac{dx}{1-x}\, l x = C + u + \tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{9}u^3 + \tfrac{1}{16}u^4 + \text{2c.}$$

Damit dieses Integral für $x = 0$ oder $u = 1$ verschwinde, muß man C gleich $-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \text{2c.} = -\frac{1}{6}\pi^2$ setzen.

Zusatz 2.

§. 198. Setzt man also $1 - x = u$ oder $x + u = 1$, so werden folgende Ausdrücke einander gleich seyn:

$$-\, l x\,.\, l u - x - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{16}x^4 - \text{2c.} =$$
$$= -\tfrac{1}{6}\pi^2 + u + \tfrac{1}{4}u^2 + \tfrac{1}{9}u^3 + \text{2c.}\ \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{6}\pi^2 - l x\,.\, l u =$$
$$= x + u + \tfrac{1}{4}(x^2 + u^2) + \tfrac{1}{9}(x^3 + u^3) + \tfrac{1}{16}(x^4 + u^4) + \text{2c.}$$

Zusatz 3.

§. 199. Diese Reihe wird dann sehr schnell convergiren, wenn wir $x = u = \frac{1}{2}$ setzen, und wir finden für diesen Fall

$$\tfrac{1}{6}\pi - (l\,2)^2 = 1 + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.9} + \frac{1}{8.16} + \frac{1}{16.25} + \frac{1}{32.36} + \text{2c.};$$

wir können demnach die Reihe

$$x + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{1}{25}x^5 + \text{2c.}$$

nicht allein für $x = 1$, sondern auch für $x = \frac{1}{2}$ summiren. Im ersten Falle ist die Summe gleich $\frac{\pi^2}{6}$, im andern aber $= \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}(l\,2)^2$.

Zusatz 2.

§. 251. Der Grund der vorhin erwähnten Ausnahme liegt darin, il die Formel $\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{n-2}}{\cos.\varphi^{n}}$ für sich integrabel ist, denn das In- ral derselben ist $= \frac{1}{n-1} \,.\, \frac{\sin.\varphi^{n-1}}{\cos.\varphi^{n-1}}$, und wir erhalten demnach für se Fälle folgende Formeln:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \mathrm{tg}.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} = \tfrac{1}{2}\, \frac{\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^2} = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{tg}.\varphi^2,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^4} = \tfrac{1}{3}\, \frac{\sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^3} = \tfrac{1}{3}\, \mathrm{tg}.\varphi^3,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^5} = \tfrac{1}{4}\, \frac{\sin.\varphi^4}{\cos.\varphi^4} = \tfrac{1}{4}\, \mathrm{tg}.\varphi^4.$$

Beyspiel 1.

§. 252. Die Formel $\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi}$ zu integriren.

Die erste Reduction gibt

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi} = \frac{-1}{m-1}\, \sin.\varphi^{m-1} + \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{m-2}}{\cos.\varphi}.$$

Fangen wir nun mit den bekannten Fällen an, so erhalten wir

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \mathrm{l}\, \mathrm{tg}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\,\mathrm{l}\cos.\varphi = \mathrm{l}\sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi} = -\sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + \mathrm{l}\sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^4}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{3}\sin.\varphi^3 - \sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^5}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{4}\sin.\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + \mathrm{l}\sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^6}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{5}\sin.\varphi^5 - \tfrac{1}{3}\sin.\varphi^3 - \sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^7}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{6}\sin.\varphi^6 - \tfrac{1}{4}\sin.\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + \mathrm{l}\sec.\varphi$$

rc.

Zusatz 1.

§. 202. Wenn $dy = \frac{du}{u\sqrt{u}} l \frac{1}{1-u}$, so finden wir auf ähnliche Weise $y = -\frac{2}{\sqrt{u}} l \frac{1}{1-u} + \int \frac{2du}{(1-u)\sqrt{u}}$;
für $u = x^2$ aber wird

$$\int \frac{2du}{(1-u)\sqrt{u}} = 4\int \frac{dx}{1-x^2} = 2l\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \text{folglich}$$

$$y = 2l\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u}} l \frac{1}{1-u}.$$

Weil aber auch

$$dy = \frac{du}{u\sqrt{u}}(u + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{4}u^4 + \text{etc.}),$$

so ist auch

$$y = 2\sqrt{u} + \frac{2}{2.3} u\sqrt{u} + \frac{2}{3.5} u^2\sqrt{u} + \frac{2}{4.7} u^3\sqrt{u} + \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 203. Durch Multiplication mit $\frac{\sqrt{u}}{2}$ erhalten wir demnach

$$u + \frac{u^2}{2.3} + \frac{u^3}{3.5} + \frac{u^4}{4.7} + \frac{u^5}{5.9} + \text{etc.} = \sqrt{u}.l\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}} + l(1-u),$$

welche Summe auch gleich

$$(1+\sqrt{u})\,l\,(1+\sqrt{u}) + (1-\sqrt{u})\,l\,(1-\sqrt{u});$$

für $u = 1$ wird $(1-\sqrt{u})l(1-\sqrt{u}) = 0$, und demnach

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{6.11} + \text{etc.} = 2l2.$$

Aufgabe 20.

§. 204. Das Integrale der Formel $dy = dP.(lx)^n$ zu bestimmen, wenn P eine Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Mit Hülfe der oben angezeigten Reduction finden wir

$$y = P(lx)^n - \int P d.(lx)^n = P(lx)^n - n\int \frac{Pdx}{x}(lx)^{n-1}.$$

Setzen wir nun $\int \frac{Pdx}{x} = Q$, so erhalten wir auf demselben Wege

$$\int \frac{Pdx}{x}(lx)^{n-1} = Q(lx)^{n-1} - (n-1)\int \frac{Qdx}{x}(lx)^{n-2}.$$

Führen wir die Rechnung so weiter fort, und setzen

$$\int \frac{P\,dx}{x} = Q; \int \frac{Q\,dx}{x} = R; \int \frac{R\,dx}{x} = S, \int \frac{S\,dx}{x} = T$$

u. s. w., so erhalten wir für das gesuchte Integral die Gleichung

$$\int dP \,.\, (lx)^n = P(lx)^n - nQ(lx)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)R(lx)^{n-2} - n(n-1)(n-2)S(lx)^{n-3} + \text{etc.};$$

wenn der Exponent n eine ganze positive Zahl bezeichnet, so wird das Integrale durch eine endliche Reihe ausgedrückt.

Beyspiel 1.

§. 205. Die Formel $x^m dx (lx)^2$ zu integriren.

Hier ist $n = 2$ und $P = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, also

$$Q = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} \quad \text{und} \quad R = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3};$$

wir erhalten demnach

$$\int x^m dx (lx)^2 = x^{m+1} \left[\frac{(lx)^2}{m+1} - \frac{2\,lx}{(m+1)^2} + \frac{2\,.\,1}{(m+1)^3}\right],$$

welches Integrale für $x = 0$ verschwindet, so lange $m + 1 > 0$.

Zusatz 1.

§. 206. Für $x = 1$ erhalten wir $\int x^m dx (lx)^2 = \frac{2\,.\,1}{(m+1)^3}$.
Aus dem Vorhergehenden aber wissen wir, daß, wenn das $\int x^m dx\, lx$ so bestimmt wird, daß es für $x = 0$ verschwindet,

$$\int x^m dx\, lx = \frac{-1}{(m+1)^2}$$

werde, sobald $x = 1$ gesetzt wird.

Zusatz 2.

§. 207. Für $m = -1$ erhält man $\frac{dx}{x}(lx)^2$; es ist demnach das Integrale dieses Ausdruckes $\int \frac{dx}{x}(lx)^2 = \frac{1}{3}(lx)^3$, welcher Fall allein in der allgemeinen Formel auszuschließen ist.

Beyspiel 2.

§. 208. Die Formel $x^{m-1} dx (lx)^3$ zu integriren.

Hier ist $n = 3$ und $P = \frac{x^m}{m}$, daher

$$Q = \frac{x^m}{m^2}, \quad R = \frac{x^m}{m^3} \quad \text{und} \quad S = \frac{x^m}{m^4},$$

folglich ist das gesuchte Integrale

$$\int x^{m-1} dx (lx)^3 = x^m \left[\frac{(lx)^3}{m} - \frac{3(lx)^2}{m^2} + \frac{3.2.lx}{m^3} - \frac{3.2.1}{m^4} \right];$$

welches Integrale für $x = o$ verschwindet, wenn $m > o$ ist.

Zusatz 1.

§. 209. Bestimmt man das Integrale so, daß es für $x = o$ verschwindet, und setzt dann $x = 1$, so erhält man:

$$\int x^{m-1} dx = \frac{1}{m}; \int x^{m-1} dx\, lx = -\frac{1}{m^2};$$

$$\int x^{m-1} dx (lx)^2 = +\frac{1.2}{m^3} \text{ und } \int x^{m-1} dx (lx)^3 = -\frac{1.2.3}{m^4}.$$

Zusatz 2.

§. 210. Ist $m = o$, so wird das Integrale $\int \frac{dx}{x} (lx)^3 = \frac{1}{4}(lx)^4$, welches nicht so bestimmt werden kann, daß es für $x = o$ verschwindet, denn man müßte eine unendliche Größe als Constante hinzufügen. Allein das Integrale verschwindet für $x = 1$.

Beyspiel 3.

§. 211. Die Formel $x^{m-1} dx (lx)^n$ zu integriren.

Da hier $P = \frac{x^m}{m}$, so ist $Q = \frac{x^m}{m^2}$, $R = \frac{x^m}{m^3}$, $S = \frac{x^m}{m^4}$, rc.

Wir erhalten demnach für das gesuchte Integrale

$$\int x^{m-1} dx (lx)^n =$$

$$= x^m \left[\frac{(lx)^n}{m} - \frac{n(lx)^{n-1}}{m^2} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{m^3} - \frac{n(n-1)(n-2)(lx)^{n-3}}{m^4} + \ldots \right].$$

Für $m = o$ aber ist $\int \frac{dx}{x} (lx)^n = \frac{1}{n+1} (lx)^{n+1}$.

Zusatz 1.

§. 212. Ist $m > o$, so verschwindet das angezeigte Integrale für $x = o$; setzt man dann $x = 1$, so findet man das Integrale

$$\int x^{m-1} dx (lx)^n = \pm \frac{1.2.3\ldots n}{m^{n+1}},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Zusatz 2.

§. 213. Diese Zweydeutigkeit fällt weg, wenn man $-l\left(\frac{1}{x}\right)$ statt lx schreibt; denn führt man dann die Integration auf dieselbe Art durch, und setzt $x=1$, so wird.

$$\int x^{m-1}\,dx\left(l\,\frac{1}{x}\right)^n = \mp\,\frac{1.2.3\ldots n}{m^{n+1}}.$$

Anmerkung.

§. 214. Ist der Exponent n eine gebrochene Zahl, so wird das gefundene Integrale durch eine unendliche Reihe ausgedrückt. Wäre z. B. $n = -\frac{1}{2}$, so findet man:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{lx}} = x^m\left[\frac{1}{m\sqrt{lx}} + \frac{1}{2m^2(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{4m^3(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5}{8m^4(lx)^{\frac{7}{2}}} + \ldots\right].$$

Läßt man x von o bis 1 wachsen, so läßt sich diese Reihe auch so darstellen:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{l\frac{1}{x}}} = \frac{x^m}{\sqrt{l\frac{1}{x}}}\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2lx} + \frac{1.3}{4m^3(lx)^2} + \frac{1.3.5}{8m^4(lx)^3} + \ldots\right].$$

Ist der Exponent n negativ, obgleich eine ganze Zahl, so schreitet dennoch das gefundene Integrale ins Unendliche fort; aber man kann in diesem Falle die Integration auf einem andern Wege bewerkstelligen, auf welchem man dieselbe endlich auf die Formel $\int\frac{T\,dx}{lx}$ zurückführt, deren Integration durch keinen Kunstgriff einfacher gemacht werden kann. Diese Reduction wollen wir in folgendem Probleme lehren.

Aufgabe 21.

§. 215. Die Integration der Formel $dy = \frac{X\,dx}{(lx)^n}$ auf immer einfachere Ausdrücke zurück zu leiten.

Auflösung.

Man bringe den vorgelegten Ausdruck auf folgende Form:

$dy = Xx\,.\,\frac{dx}{x(lx)^n}$. Da nun $\int\frac{dx}{x(lx)^n} = \frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$, so wird

$$y = \frac{-Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{1}{(lx)^{n-1}}\,d\,.\,(Xx).$$

dieser Reductionsformel kann man sich zur Abkürzung der Rechnung im-mer bedienen, wenn weder $\mu = 1$ noch $\nu = 1$ ist.

Anmerkung.

§. 260. Ausdrücke von der Form $\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m \cdot \cos.\varphi^n}$ lassen sich im-durch folgende höchst einfache Methode auf einfachere zurückführen. Mul-tiplicirt man nämlich den Zähler durch $\sin.\varphi^2 + \cos.\varphi^2 = 1$, so er-hält man

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m \cdot \cos.\varphi^n} = \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{m-2} \cdot \cos.\varphi^n} + \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m \cdot \cos.\varphi^{n-2}};$$

auf diese Art fährt man fort, bis endlich im Nenner nur eine einzige Potenz zurück bleibt, so ist z. B.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi \cdot \cos.\varphi} = \int \frac{d\varphi \cdot \sin.\varphi}{\cos.\varphi} + \int \frac{d\varphi \cdot \cos.\varphi}{\sin.\varphi} = l.\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2 \cdot \cos.\varphi^2} = \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2} + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} - \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Wäre die Formel $\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^n \cdot \cos.\varphi^n}$ gegeben, so kann man daher die Formel $\sin.\varphi \cdot \cos.\varphi = \frac{1}{2}\sin.2\varphi$ benützen, man erhält nämlich

$$\int \frac{2^n\, d\varphi}{\sin.(2\varphi)^n} = 2^{n-1} \int \frac{d\omega}{\sin.\omega^n},$$

wenn $\omega = 2\varphi$ gesetzt wird, welche Formel nach den bekannten Vor-schriften aufgelöst wird. Hält man sich also an diese Methode, so bleibt rücksichtlich der Formel $d\varphi \cdot \sin.\varphi^n \cdot \cos.\varphi^m$, so lange m und n ganze positive oder negative Zahlen sind, nichts mehr zu wünschen übrig: be-zeichnen dagegen m und n gebrochene Zahlen, so lassen sich weiter keine Vorschriften ertheilen, weil dann die Fälle, in welchen die Inte-gration gelingt, sich gleichsam von selbst ergeben.

Wie man aber die Integrale, welche sich nicht darstellen lassen, durch unendliche Reihen ausdrücken könne, wollen wir im nächsten Ka-pitel genauer aus einander setzen.

Nun aber wollen wir die gebrochenen Ausdrücke betrachten, de-ren Nenner $a + b\cos.\varphi$ oder eine Potenz dieses Binomes ist, denn solche Formeln kommen in der Theorie der Astronomie sehr häufig vor.

Aufgabe 30.

§. 261. Die Differenzialformel $\frac{d\varphi}{a + b\cos.\varphi}$ zu inte-griren.

$$y = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^n} =$$

$$\frac{-x^m}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{m\,x^m}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{m^2\,x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots$$

$$+ \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx}.$$

Zusatz.

§. 218. Setzen wir für n nach und nach die Zahlen 2, 3, 4..., erhalten wir folgende Reductionsformeln:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^2} = \frac{-x^m}{lx} + \frac{m}{1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^3} = \frac{-x^m}{2(lx)^2} - \frac{m\,x^m}{2.1\,(lx)} + \frac{m^2}{2.1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^4} = \frac{-x^m}{3(lx)^3} - \frac{m\,x^m}{3.2\,(lx)^2} - \frac{m^2\,x^m}{3.2.1.lx} + \frac{m^3}{3.2.1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx}.$$

Anmerkung.

§. 219. Diese Integrationen hängen demnach von der Formel $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx}$ ab, welche für $x^m = z$, also

$$x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}\,dz \quad \text{und} \quad lx = \frac{1}{m}\,lz$$

die äußerst einfache Form $\int \frac{dz}{lz}$ zurückgeführt wird. Könnte n dieses Integrale angeben, so würde dieß in der Analysis von größ- Nutzen seyn; allein noch hat man dasselbe durch keinen Kunstgriff er mittelst Logarithmen, noch mittelst Winkeln darstellen können. ten (§. 227.) werden wir zeigen, wie sich dieses Integrale durch eine he ausdrücken läßt. Es scheint also, daß die Formel $\int \frac{dz}{lz}$ eine ndere Gattung von transcendenten Functionen darbiethet, deren wickelung einer genauern Betrachtung allerdings würdig ist. Die- e transcendente Größe kommt aber auch häufig vor bey den Integra- len der Exponentialgrößen enthaltenden Ausdrücke, welche den Ge- stand des gegenwärtigen Kapitels ausmachen, besonders da diesel- mit den logarithmischen Größen in so enger Verbindung stehen, daß eine Gattung dieser Größen leicht in die andere verwandelt werden 1. So z. B. wird die eben betrachtete Formel $\frac{dz}{lz}$, wenn $lz = x$, $z = e^x$ und $dz = e^x\,dx$ gesetzt wird, umgestaltet in die Expo-

nentialgröße $e^x \frac{dx}{x}$, deren Integration also denselben Schwierigkeiten unterworfen ist. Wir wollen demnach nur solche integrable Formeln entwickeln, welche sich durch keine leichte Substitution auf eine algebraische Form zurückführen lassen. Wäre z. B. V irgend eine Function von v und $v = a^x$, so würde die Formel $V dx$ wegen $x = \frac{lv}{la}$ und $dx = \frac{dv}{v la}$ übergehen in $\frac{V dv}{v la}$, welcher Ausdruck rücksichtlich der Variablen v algebraisch ist. Wir übergehen demnach hier die Ausdrücke von der Form $\frac{a^x dx}{\sqrt{1 + a^{2x}}}$, weil diese für $a^x = y$ keine Schwierigkeit darbieten.

Aufgabe 22.

§. 220. Man bestimme das Integrale der Differenzialformel $a^x X dx$, bey welcher X irgend eine Function von x bezeichnet.

Auflösung 1.

Weil $d.a^x = a^x dx la$ ist, so ist umgekehrt $\int a^x dx = \frac{1}{la} a^x$; zerlegt man demnach den gegebenen Ausdruck in die Factoren $X . a^x dx$, so erhält man durch Reduction:

$$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la} \int a^x dX.$$

Setzen wir ferner $dX = P dx$, damit

$$\int a^x P dx = \frac{1}{la} a^x P - \frac{1}{la} \int a^x dP$$

werde, so finden wir die Reductionsformel:

$$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^2} \int a^x dP.$$

Für $dP = Q dx$ finden wir ferner

$$\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^3} a^x Q - \frac{1}{(la)^3} \int a^x dQ,$$

und so kann man weiter gehen, indem man $dQ = R dx$, $dR = S dx$, etc. setzt, bis man endlich auf einen Ausdruck kommt, der entweder an und für sich integrabel ist, oder in der möglich einfachsten Gestalt erscheint.

$$A = \frac{-b}{a^2 - b^2};\quad B = \frac{-ab}{2a(a^2-b^2)};\quad m = \frac{2a^2+b^2}{2a(a^2-b^2)}$$

gefunden wird; und auf ähnliche Art kann man zu den höheren Potenzen fortgehen, obgleich diese Arbeit nicht gar angenehm ist.

Folgende Methode aber scheint am leichtesten zum Resultate zu führen. Man betrachte nämlich die allgemeinere Form $\frac{d\varphi(f+g\cos.\varphi)}{(a+b\cos.\varphi)^{n+1}}$, und setze

$$\int\frac{d\varphi(f+g\cos.\varphi)}{(a+b\cos.\varphi)^{n+1}} = \frac{A\sin.\varphi}{(a+b\cos.\varphi)^n} + \int\frac{d\varphi(B+C\cos.\varphi)}{(a+b\cos.\varphi)^n}.$$

Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man

$$f + g\cos.\varphi = A\cos.\varphi(a+b\cos.\varphi) + nAb\sin.\varphi^2 \\ + (B+C\cos.\varphi)(a+b\cos.\varphi),$$

welche Gleichung wegen $\sin.\varphi^2 = 1 - \cos.\varphi^2$ folgende Form erhält:

$$\left.\begin{array}{llll} -f & - & g\cos.\varphi + & Ab\cos.\varphi^2 \\ +nAb & + & Aa\cos.\varphi - & nAb\cos.\varphi^2 \\ +Ba & + & Bb\cos.\varphi + & Cb\cos.\varphi^2 \\ & + & Ca\cos.\varphi & \end{array}\right\} = 0,$$

woraus man, wenn die einzelnen Glieder $= 0$ gesetzt werden, folgende Gleichungen erhält:

$$A = \frac{ag-bf}{n(a^2-b^2)};\quad B = \frac{af-bg}{a^2-b^2} \text{ und } C = \frac{(n-1)(ag-bf)}{n(a^2-b^2)}.$$

Man erhält demnach auf diese Weise folgende Reductionsformel:

$$\int\frac{d\varphi(f+g\cos.\varphi)}{(a+b\cos.\varphi)^{n+1}} = \frac{(ag-bf)\sin.\varphi}{n(a^2-b^2)(a+b\cos.\varphi)^n} \\ + \frac{1}{n(a^2-b^2)}\int\frac{d\varphi[n(af-bg)+(n-1)(ag-bf)\cos.\varphi]}{(a+b\cos.\varphi)^n},$$

wodurch man endlich auf die Formel $\int\frac{d\varphi(b+k\cos.\varphi)}{a+b\cos.\varphi}$ geleitet wird, deren Integrale $= \frac{k}{b}\varphi + \frac{b^2-ak}{b}\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}$ nach dem Vorhergehenden bekannt ist. Übrigens aber ist klar, daß immer $k = 0$ seyn werde.

Anmerkung 2.

§. 265. Man stößt öfter auch auf Formeln, in welchen überdieß die Exponentialgröße $e^{\alpha\varphi}$, welche den Winkel φ im Exponenten bey sich führt, erscheint. Wir müssen nun die Behandlungsweise dieser For-

Setzen wir hier für n nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3..., so erhalten wir, da im ersten Falle die Integration bekannt ist, folgende Integrale:

$$\int a^x dx = \frac{1}{la} \cdot a^x,$$

$$\int a^x x dx = \frac{1}{la} a^x x - \frac{1}{(la)^2} \cdot a^x,$$

$$\int a^x x^2 dx = \frac{1}{la} a^x x^2 - \frac{2}{(la)^2} a^x x + \frac{2.1}{(la)^3} \cdot a^x,$$

$$\int a^x x^3 dx = \frac{1}{la} a^x x^3 - \frac{3}{(la)^2} a^x x^2 + \frac{3.2}{(la)^3} a^x x - \frac{3.2.1}{(la)^4} \cdot a^x$$

u. s. w.

Wir schließen demnach allgemein für jeden Werth des Exponenten n:

$$\int a^x x^n dx =$$

$$= a^x \left[\frac{x^n}{la} - \frac{n \cdot x^{n-1}}{(la)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(la)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{(la)^4} + \ldots\right]$$

zu welchem Ausdrucke noch eine willkürliche Constante hinzugefügt werden muß, um das Integrale vollständig zu erhalten.

Zusatz.

§. 224. Soll dieses Integrale so bestimmt werden, daß es für $x=0$ verschwindet, so erhält man:

$$\int a^x dx = \frac{1}{la} a^x - \frac{1}{la},$$

$$\int a^x x dx = a^x \left[\frac{x}{la} - \frac{1}{(la)^2}\right] + \frac{1}{(la)^2},$$

$$\int a^x x^2 dx = a^x \left[\frac{x^2}{la} - \frac{2x}{(la)^2} + \frac{2.1}{(la)^3}\right] - \frac{2.1}{(la)^3},$$

$$\int a^x x^3 dx = a^x \left[\frac{x^3}{la} - \frac{3x^2}{(la)^2} + \frac{3.2.x}{(la)^3} - \frac{3.2.1}{(la)^4}\right] + \frac{3.2.1}{(la)^4}$$

u. s. w.

Beyspiel 2.

§. 225. Das Integrale der Formel $\frac{a^x dx}{x^n}$ für jeden ganzen positiven Werth von n zu bestimmen.

Hier können wir bequem die zweyte Auflösung anwenden, indem wir daselbst $X = \frac{1}{x^n}$, also $P = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ setzen, wodurch die Reductionsformel

$$\int\frac{a^x dx}{x^n}=\frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{la}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}$$

erhalten wird. Es ist demnach klar, daß diese Formel für $n=1$ zu keinem Resultate führt, denn es findet dann der oben erwähnte Fall $\int\frac{a^x dx}{x}$ Statt, welcher eine besondere Gattung von transcendenten Functionen in sich begreift. Betrachten wir diese als bekannt, so finden wir folgende Integrale:

$$\int\frac{a^x dx}{x^2}=C-\frac{a^x}{1.x}+\frac{la}{1}\int\frac{a^x dx}{x},$$

$$\int\frac{a^x dx}{x^3}=C-\frac{a^x}{2.x^2}-\frac{a^x la}{2.1.x}+\frac{(la)^2}{2.1}\int\frac{a^x dx}{x},$$

$$\int\frac{a^x dx}{x^4}=C-\frac{a^x}{3.x^3}-\frac{a^x la}{3.2.x^2}-\frac{a^x (la)^2}{3.2.1.x}+\frac{(la)^3}{3.2.1}\int\frac{a^x dx}{x},$$

und daher allgemein:

$$\int\frac{a^x dx}{x^n}=$$

$$=C-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x la}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}-\frac{a^x (la)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}}-\ldots$$

$$-\frac{a^x (la)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.x}+\frac{(la)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}\int\frac{a^x dx}{x}.$$

Zusatz 1.

§. 226. Betrachten wir also die transcendente Größe $\int\frac{a^x dx}{x}$ als bekannt, so können wir die Formel $a^x x^m dx$ integriren, es mag m eine positive oder negative ganze Zahl seyn. In jenen Fällen hängt übrigens die Integration nicht von dieser neuen transcendenten Größe ab.

Zusatz 2.

§. 227. Bezeichnet m eine gebrochene Zahl, so ist keine der beyden Auflösungen zureichend, sondern jede derselben gibt für das Integrale eine unendliche Reihe.

Wäre z. B. $m=-\frac{1}{2}$, so erhalten wir nach der ersten Auflösung

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=a^x\left[\frac{1}{la}+\frac{1}{2x(la)^2}+\frac{1.3}{4x^2(la)^3}+\frac{1.3.5}{8x^3(la)^4}+\ldots\right]:\sqrt{x}+C,$$

nach der zweyten Auflösung aber:

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{x}}=C+\frac{a^x}{\sqrt{x}}\left[\frac{2x}{1}-\frac{4x^2 la}{1.3}+\frac{8x^3(la)^2}{1.3.5}-\frac{16x^4(la)^3}{1.3.5.7}+\ldots\right].$$

Anmerkung.

§. 253. In den übrigen Fällen rücksichtlich des Nenners wird Integration durch folgende Reductionen zu Stande gebracht:

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi} - m\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{2} . \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^2} - \frac{m-1}{2}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{3} . \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^3} - \frac{m-2}{3}\int \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi^m}{\cos.\varphi^2},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{4} . \frac{\sin.\varphi^{m+r}}{\cos.\varphi^4} - \frac{m-3}{4}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^3}.$$

Beyspiel 2.

§. 254. Die Formel $\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n}$ zu integriren.

Nach der zweyten Reduction erhalten wir, weil $m = 0$ ist:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{n-1} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^{n-2}}.$$

Weil nun die einfachsten Fälle

$$\int d\varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \text{l tg.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

bekannt sind, so lassen sich alle folgenden Fälle auf diese zurückfüh[ren]

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{2} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{3} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} + \frac{2}{3} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{4} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{1 . 3}{2 . 4} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \frac{1 . 3}{2 . 4}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^6} = \frac{1}{5} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^5} + \frac{1 . 4}{3 . 5} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} + \frac{2 . 4}{3 . 5} . \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}.$$

Zusatz 1.

§. 255. Auf ähnliche Weise werden folgende Integrationen [er]halten:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = \text{l tg.}\,\tfrac{1}{2}\varphi; \quad \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2} = -\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^3} = -\frac{1}{2} . \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\ldots a^x x^n dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}\, la}{1(n+2)} + \frac{x^{n+3}\,(la)^2}{1.2\,(n+3)} + \frac{x^{n+4}\,(la)^3}{1.2.3\,(n+4)} + \ldots;$$

obey zu bemerken ist, daß, wenn n eine ganze negative Zahl ist, wenn ämlich $n = -k$, lx statt $\frac{x^{n+k}}{n+k}$ gesetzt werden müsse.

Beyspiel 3.

§. 230. **Das Integrale der Formel $\frac{a^x dx}{1-x}$ durch eine endliche Reihe darzustellen.**

Nach der ersten Auflösung erhalten wir, wegen

$$X = \frac{1}{1-x};\quad P = \frac{dX}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2};\quad Q = \frac{dP}{dx} = \frac{1.2}{(1-x)^3};$$

$$R = \frac{dQ}{dx} = \frac{1.2.3}{(1-x)^4};\ \text{etc.}$$

gende Reihe:

$$\int \frac{a^x dx}{1-x} =$$

$$a^x \left[\frac{1}{(1-x)la} - \frac{1}{(1-x)^2(la)^2} + \frac{1.2}{(1-x)^3(la)^3} - \frac{1.2.3}{(1-x)^4(la)^4} + \ldots\right].$$

Verwandelt man a^x oder $\frac{1}{1-x}$ in eine Reihe, so werden noch dere Reihen gefunden. Die bequemste Form aber wird durch die Anhme einer Reihe erhalten. Der Kürze wegen nehmen wir e statt a, nit $le = 1$ werde, und setzen $dy = \frac{e^x dx}{1-x}$ oder

$$(1-x) - 1 - x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots = 0.$$

Nun nehme man für y folgende Reihe an:

$$= \int \frac{e^x dx}{1-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots,$$

erhält man durch Substitution:

$$\left.\begin{array}{llllll} B & + 2Cx & + 3Dx^2 & + 4Ex^3 & + 5Fx^4 & + \ldots \\ & - B & - 2C & - 3D & - 4E & \\ -1 & - 1 & - \frac{1}{2} & - \frac{1}{6} & - \frac{1}{24} & \end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

$B = 1$, $\qquad E = \frac{1}{4}(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6})$,

$C = \frac{1}{2}(1 + 1)$, $\qquad F = \frac{1}{5}(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24})$

$D = \frac{1}{3}(1 + 1 + \frac{1}{2})$, $\qquad$ u. s. w.

Aufgabe 23.

§. 231. Das Integrale der Differenzialformel $dy = x^{nx} dx$ durch eine unendliche Reihe darzustellen.

Auflösung.

Am bequemsten gelangt man zum Ziele, wenn man die Exponentialgröße x^{nx} in eine unendliche Reihe verwandelt. Es ist nämlich

$$x^{nx} = 1 + nxlx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{1.2} + \frac{n^3x^3(lx)^3}{1.2.3} + \frac{n^4x^4(lx)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Multiplicirt man diese Reihe mit dx, und integrirt die einzelnen Glieder, so erhält man:

$$\int dx = x;$$

$$\int x\,dx\,lx = x^2\left(\frac{lx}{2} - \frac{1}{2^2}\right);$$

$$\int x^2\,dx\,(lx)^2 = x^3\left[\frac{(lx)^2}{3} - \frac{2lx}{3^2} + \frac{2.1}{3^3}\right];$$

$$\int x^3\,dx\,(lx)^3 = x^4\left[\frac{(lx)^3}{4} - \frac{3(lx)^2}{4^2} + \frac{3.2\,lx}{4^3} - \frac{3.2.1}{4^4}\right];$$

$$\int x^4\,dx\,(lx)^4 = x^5\left[\frac{(lx)^4}{5} - \frac{4(lx)^3}{5^2} + \frac{4.3(lx)^2}{5^3} - \frac{4.3.2\,lx}{5^4} + \frac{4.3.2.1}{5^5}\right]$$

u. s. w.

Substituirt man diese Reihen, und ordnet das Resultat nach den Potenzen von lx, so wird das gesuchte Integrale durch folgende unendlich viele unendliche Reihen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} y = \int x^{nx}dx = &+ x\left(1 - \frac{nx}{2^2} + \frac{n^2x^2}{3^3} - \frac{n^3x^3}{4^4} + \frac{n^4x^4}{5^5} - \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{nx^2\,lx}{1}\left(\frac{1}{2^1} - \frac{nx}{3^2} + \frac{n^2x^2}{4^3} - \frac{n^3x^3}{5^4} + \frac{n^4x^4}{6^5} - \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{n^2x^3(lx)^2}{1.2}\left(\frac{1}{3^1} - \frac{nx}{4^2} + \frac{n^2x^2}{5^3} - \frac{n^3x^3}{6^4} + \frac{n^4x^4}{7^5} - \text{etc.}\right) \\ &+ \frac{n^3x^4(lx)^3}{1.2.3}\left(\frac{1}{4^1} - \frac{nx}{5^2} + \frac{n^2x^2}{6^3} - \frac{n^3x^3}{7^4} + \frac{n^4x^4}{8^5} - \text{etc.}\right) \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

welches Integrale so bestimmt ist, daß es für $x = 0$ verschwindet.

Zusatz.

§. 232. Führt man nach diesem Gesetze die Integration durch, und setzt $x = 1$, so ist der Werth des Integrals $\int x^{nx} dx$ gleich folgender Reihe:

$$1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \frac{n^4}{5^5} - \frac{n^5}{6^6} + \text{etc.},$$

welche wegen der schönen Form ihrer Glieder allerdings merkwürdig ist.

Anmerkung.

§. 233. Auf dieselbe Weise findet man das Integrale folgender Formel:

$$y = \int x^{nx} x^m dx = \int x^m dx \left(1 + nx\,lx + \frac{n^2 x^2 (lx)^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^3 x^3 (lx)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}\right).$$

Durch Integration der einzelnen Glieder findet man:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

$$\int x^{m+1} dx\, lx = x^{m+2}\left(\frac{lx}{m+2} - \frac{1}{(m+2)^2}\right);$$

$$\int x^{m+2} dx\,(lx)^2 = x^{m+3}\left(\frac{(lx)^2}{m+3} - \frac{2\,lx}{(m+3)^2} + \frac{2 \cdot 1}{(m+3)^3}\right);$$

$$\int x^{m+3} dx\,(lx)^3 = x^{m+4}\left(\frac{(lx)^3}{m+4} - \frac{3\,(lx)^2}{(m+4)^2} + \frac{3 \cdot 2\,lx}{(m+4)^3} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(m+4)^4}\right)$$

etc.

Würde man demnach das Integrale so bestimmen, daß es für $x = 0$ verschwindet, und setzt dann $x = 1$, so wird der besondere Werth der Integralformel $\int x^{nx} x^m dx$ durch folgende merkwürdige Reihe ausgedrückt:

$$\frac{1}{m+1} - \frac{n}{(m+2)^2} + \frac{n^2}{(m+3)^3} - \frac{n^3}{(m+4)^4} + \frac{n^4}{(m+5)^5} - \text{etc.}$$

Es fällt von selbst in die Augen, daß diese Reihe unbrauchbar werde, sobald m eine ganze negative Zahl wird.

Andere Beyspiele von Exponentialformeln füge ich nicht bey, weil die Integrale derselben gewöhnlich in einer zu wenig eleganten Form erscheinen. Übrigens ist die Methode, sie zu behandeln, hier hinreichend aus einander gesetzt. Inzwischen verdienen dennoch jene Formeln, welche an und für sich die Integration zulassen, und welche in der Form $e^x (dP + P dx)$, dessen Integrale offenbar $e^x P$ ist, enthalten sind, eine besondere Aufmerksamkeit. Allein in diesen Fällen ist es schwer, Regeln für die Bestimmung des Integrals anzugeben, und gewöhnlich kömmt das meiste auf ein glückliches Errathen an. Wäre z. B. die Formel $\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}$ gegeben, so ist es leicht zu vermuthen, daß das Integrale, wenn es anders möglich ist, die Form $\frac{e^x z}{1+x}$ haben werde. Das Dif-

ferenziale dieses Ausdruckes ist $\frac{e^x [dz(1+x)+xzdx]}{(1+x)^2}$, welches, mit der gegebenen Differenzialformel verglichen,

$$dz(1+x)+xzdx = xdx$$

gibt, wobey sogleich in die Augen fällt, daß $z = 1$ sey; wäre dieß nicht für sich klar, so könnte dieß mit Hülfe der Regeln nicht so leicht ausgemittelt werden. Wir gehen daher zu einer andern Gattung von transcendenten Größen, die bereits in der Analysis aufgenommen sind, über, welche entweder Winkel, Sinusse oder Tangenten enthalten.

Kapitel V.

[Vo]n der Integration der Formeln, welche Winkel oder Sinusse der Winkel enthalten.

Aufgabe 24.

§. 234. Die Differenzialformel $X dx \text{ arc. sin. } x$ zu [in]tegriren.

Auflösung.

Da $d \,.\, \text{arc. sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, so zerlege man die gegebene [Fo]rmel in die Factoren $\text{arc. sin. } x \,.\, X dx$. Wenn nun $X dx$ die In[teg]ration zuläßt, und $\int X dx = P$ ist, so wird das gesuchte Integrale

$$\int X dx \text{ arc. sin. } x = P \text{ arc. sin. } x - \int \frac{P dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

[un]d so ist die ganze Rechnung zurückgeführt auf die Integration einer [al]gebraischen Formel, wozu die Vorschriften schon oben gelehrt wor[de]n sind.

Wäre übrigens $X = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, so würde offenbar das Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ arc. sin. } x = \tfrac{1}{2} (\text{arc. sin. } x)^2$$

[sei]n, in welchem einzigen Falle das Quadrat des Winkels im Integrale [ers]cheint.

Beyspiel 1.

§. 235. Die Formel $dy = x^n dx \text{ arc. sin. } x$ zu inte[gr]iren.

Weil $P = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist, so erhalten wir

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ arc. sin. } x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[W]ir erhalten daher mit Hülfe des §. 120 für die verschiedenen Werthe [vo]n n folgende Integrale:

$\int dx \text{ arc. sin. } x = x \text{ arc. sin. } x + \sqrt{1-x^2} - 1,$

$\int x dx \text{ arc. sin. } x = \tfrac{1}{2} x^2 \text{ arc. sin. } x + \tfrac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{4} \text{ arc. sin. } x,$

$$\int x^2\,dx\ \text{arc.sin.}\,x = \tfrac{1}{3}x^3\ \text{arc.sin.}\,x + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3})\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3},$$

$$\int x^3\,dx\ \text{arc.sin.}\,x = \tfrac{1}{4}x^4\ \text{arc.sin.}\,x + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}\,x\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$- \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\ \text{arc.sin.}\,x,$$

welche so genommen sind, daß sie für $x = o$ verschwinden.

Beyspiel 2.

§. 236. Die Formel $dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}\ \text{arc.sin.}\,x$ zu integriren.

Da $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} = P$ ist, so wird das gesuchte Integral seyn

$$y = C - \sqrt{1-x^2}\ \text{arc.sin.}\,x + \int\frac{dx\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

und so erhält man

$$y = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{arc.sin.}\,x = C - \sqrt{1-x^2}\ \text{arc.sin.}\,x + x.$$

Beyspiel 3.

§. 237. Die Formel $dy = \dfrac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{arc.sin.}\,x$ zu integriren.

Hier ist $P = \displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, und hieraus folgt

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{arc.sin.}\,x - \int\frac{x\,dx}{1-x^2}\ \text{oder}$$

$$y = \int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{arc.sin.}\,x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{arc.sin.}\,x + l\sqrt{1-x^2},$$

welches Integrale für $x = o$ verschwindet.

Anmerkung.

§. 238. Auf ähnliche Weise integrirt man die Formel

$$dy = X\,dx\ \text{arc.cos.}\,x.$$

Denn da $d.\text{arc.cos.}\,x = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, so erhalten wir, wenn $\int X dx = P$ gesetzt wird:

$$y = P\ \text{arc.cos.}\,x + \int\frac{P\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wäre die Formel $dy = X dx \text{ arc. tg. } x$ gegeben, so würden wir, weil $d . \text{arc. tg. } x = \frac{dx}{1+x^2}$, für $\int X dx = P$ folgendes Integrale erhalten:

$$y = \int X dx \text{ arc. tg. } x = P \text{ arc. tg. } x - \int \frac{P dx}{1+x^2}.$$

Wenn sich also das Integrale $\int X dx$ algebraisch darstellen läßt, so wird jedes Mahl die Integration auf eine algebraische Formel zurückgeführt, und man kann die Arbeit als vollendet ansehen. In diesen Formeln erschien der Winkel, dessen Sinus, Cosinus oder Tangente $= x$ war; nun wollen wir auch solche Formeln betrachten, in welchen das Quadrat oder eine höhere Potenz dieses Winkels erscheint.

Aufgabe 25.

§. 239. Es bezeichne φ den Winkel, dessen Sinus oder Tangente irgend eine Function von x ist, so daß $d\varphi = u dx$ werde, und es sey die Formel $dy = X dx \varphi^n$ gegeben, deren Integrale zu bestimmen ist.

Auflösung.

Es sey $\int X dx = P$, so daß $dy = \varphi^n dP$ ist, so erhalten wir durch Integration

$$y = \varphi^n P - n \int \varphi^{n-1} P u dx.$$

Auf ähnliche Weise setze man $\int P u dx = Q$, so wird

$$\int \varphi^{n-1} P u dx = \varphi^{n-1} Q - (n-1) \int \varphi^{n-2} Q u dx,$$

und für $\int Q u dx = R$ erhält man

$$\int \varphi^{n-2} Q u dx = \varphi^{n-2} R - (n-2) \int \varphi^{n-3} R u dx.$$

Auf diese Art wird der Exponent von φ immer kleiner, bis man endlich auf einen Ausdruck kommt, der kein φ mehr enthält. Dieß wird immer möglich seyn, sobald n eine ganze positive Zahl ist, und man kann nach und nach die Integrale $\int X dx = P$, $\int P u dx = Q$, $\int Q u dx = R$ rc. setzen. Gelingen diese Integrationen nicht, so ist auch die gegebene Formel nicht integrabel.

Beyspiel.

§. 240. Es sey φ ein Winkel, dessen Sinus $= x$ ist, also $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; man integrire die Formel $dy = \varphi^n dx$.

Es ist demnach hier $X = 1$, $P = x$, $Q = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$,
$R = \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x$, $S = \int \frac{R\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$, $T = x$, u. s. w. Mittelst dieser Werthe erhält man nun

$$y = \int \varphi^n\,dx = \varphi^n x + n\varphi^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)\varphi^{n-2}x$$
$$- n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\sqrt{1-x^2} + \text{ic.}$$

Für die verschiedenen Werthe des Exponenten n erhalten wir:

$$\int \varphi\,dx = \varphi x + \sqrt{1-x^2} - 1,$$
$$\int \varphi^2\,dx = \varphi^2 x + 2\varphi\sqrt{1-x^2} - 2.1x,$$
$$\int \varphi^3\,dx = \varphi^3 x + 3\varphi^2\sqrt{1-x^2} - 3.2\varphi x - 3.2.1\sqrt{1-x^2} + 6$$
ic.,

welche Integrale so bestimmt sind, daß sie für $x = 0$ verschwinden.

Anmerkung.

§. 241. Wäre $X\,dx = u\,dx = d\varphi$, so würde das Integrale der Formel $\varphi^n\,d\varphi$ gleich $\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}$ seyn; eben so, wenn Φ irgend eine Function des Winkels φ bezeichnet, hat die Integration der Formel $\Phi u\,dx = \Phi\,d\varphi$ keine Schwierigkeit.

Weit ausgedehnter sind die Formeln, welche Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel enthalten, deren Integration durch die umgekehrte Rechnung von sehr ausgebreiteter Anwendung ist, indem vorzüglich die Theorie der Astronomie auf solchen Formeln beruht. Die ersten Grundsätze müssen aber aus der Differenzialrechnung genommen werden. Denn da

$$d.\sin.n\varphi = n\,d\varphi\cos.n\varphi;\quad d.\cos.n\varphi = -n\,d\varphi\sin.n\varphi;$$
$$d.\text{tg}.n\varphi = \frac{n\,d\varphi}{\cos.^2 n\varphi};\quad d.\text{cotg}.n\varphi = \frac{-n\,d\varphi}{\sin.^2 n\varphi};$$
$$d.\frac{1}{\sin.n\varphi} = \frac{-n\,d\varphi\cos.n\varphi}{\sin.^2 n\varphi};\quad d.\frac{1}{\cos.n\varphi} = \frac{n\,d\varphi\sin.n\varphi}{\cos.^2 n\varphi};$$

so erhalten wir folgende einfache Integrationen:

$$\int d\varphi\cos.n\varphi = \frac{1}{n}\sin.n\varphi;\quad \int d\varphi\sin.n\varphi = -\frac{1}{n}\cos.n\varphi;$$
$$\int \frac{d\varphi}{\cos.^2 n\varphi} = \frac{1}{n}\text{tg}.n\varphi;\quad \int \frac{d\varphi}{\sin.^2 n\varphi} = -\frac{1}{n}\text{cotg}.n\varphi;$$
$$\int \frac{d\varphi\cos.n\varphi}{\sin.^2 n\varphi} = -\frac{1}{n\sin.n\varphi};\quad \int \frac{d\varphi\sin.n\varphi}{\cos.^2 n\varphi} = \frac{1}{n\cos.n\varphi};$$

woraus sogleich die Integration der Differenzialausdrücke von der Form
$d\varphi(A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi + \text{rc.})$
erhellt, denn offenbar ist das Integrale

$$A\varphi + B\sin.\varphi + \tfrac{1}{2}C\sin.2\varphi + \tfrac{1}{3}D\sin.3\varphi + \tfrac{1}{4}E\sin.4\varphi + \text{rc.}$$

Hiebey können auch die in den Elementen aufgestellten Sätze über die Kreisfunctionen zu Hülfe genommen werden, nämlich:

$$\sin.\alpha\sin.\beta = \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha+\beta);$$
$$\cos.\alpha\cos.\beta = \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha+\beta);$$
$$\sin.\alpha\cos.\beta = \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha-\beta)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{2}\sin.(\beta-\alpha);$$

wodurch die Producte mehrerer Sinusse und Cosinusse in einfache Sinusse oder Cosinusse aufgelöst werden.

Aufgabe 26.

§. 242. Die Formel $d\varphi . \sin.\varphi^n$ zu integriren.

Auflösung.

Man bringe den gegebenen Ausdruck auf die Form
$\sin.\varphi^{n-1}\,d\varphi\sin.\varphi$, so ist, weil $\int d\varphi . \sin.\varphi = -\cos.\varphi$,

$$\int d\varphi . \sin.\varphi^n = -\sin.\varphi^{n-1}\cos.\varphi + (n-1) . \int d\varphi\sin.\varphi^{n-2}\cos.^2\varphi.$$

Da nun $\cos.^2\varphi = 1 - \sin.^2\varphi$ ist, so erhält man

$$\int d\varphi . \sin.^n\varphi =$$
$$= -\sin.\varphi^{n-1}\cos.\varphi + (n-1)\int d\varphi\sin.\varphi^{n-2} - (n-1)\int d\varphi\sin.^n\varphi,$$

wobey das letzte Glied den gegebenen Ausdruck selbst enthält; wir erhalten demnach folgende Reductionsformel:

$$\int d\varphi\sin.\varphi^n = -\frac{1}{n}\sin.\varphi^{n-1}\cos.\varphi + \frac{n-1}{n}\int d\varphi\sin.\varphi^{n-2},$$

wodurch die Integration auf die einfachere Formel $d\varphi\sin.\varphi^{n-2}$ gebracht wird.

Weil demnach die einfachsten Fälle

$$\int d\varphi . \sin.^0\varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \int d\varphi . \sin.\varphi = -\cos.\varphi$$

bekannt sind, so erhalten wir, wenn wir nach und nach zu den höheren Exponenten fortschreiten, folgende Formeln:

$\int d\varphi . \sin.\varphi^0 = \varphi,$
$\int d\varphi . \sin.\varphi = -\cos.\varphi,$
$\int d\varphi . \sin.\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}\sin.\varphi . \cos.\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3 = -\frac{1}{3}\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi - \frac{2}{3}\cos.\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^4 = -\frac{1}{4}\sin.\varphi^3 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^5 = -\frac{1}{5}\sin.\varphi^4 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.4}{3.5}\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi - \frac{2.4}{3.5}\cos.\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^6 = -\frac{1}{6}\sin.\varphi^5 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi^3 \,.\, \cos.\varphi$

$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi$

ꝛc.

Zusatz 1.

§. 243. Ist n eine ungerade Zahl, so wird das Integrale bloß durch Sinus und Cosinus ausgedrückt; ist aber n eine gerade Zahl, so enthält das Integrale überdieß den Winkel selbst, und daher ist die Function transcendent.

Zusatz 2.

§. 244. Für die Fälle, wo n eine ungerade Zahl ist, ist besonders noch zu bemerken, daß bey dem unendlichen Wachsen des Winkels oder Bogens φ das Integrale dennoch eine gewisse Gränze nicht überschreiten könne, da es doch, wenn n eine gerade Zahl ist, ohne Ende wächst.

Anmerkung.

§. 245. Auf ähnliche Weise behandelt man $d\varphi \,.\, \cos.\varphi^n$, welche auf die Form $\cos.\varphi^{n-1}\, d\varphi \,.\, \cos.\varphi$ gebracht, die Gleichung

$$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^n =$$
$$= \cos.\varphi^{n-1}\sin.\varphi + (n-1)\int d\varphi \cos.\varphi^{n-2}\sin.\varphi^2$$
$$= \cos.\varphi^{n-1}\sin.\varphi + (n-1)\int d\varphi \cos.\varphi^{n-2} - (n-1)\int d\varphi \cos.\varphi^n,$$

darbiethet, aus welcher die Reductionsformel

$$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^n = \frac{1}{n}\sin.\varphi \cos.\varphi^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^{n-2}$$

erhalten wird.

Da nun für $n=0$ und $n=1$ die Integration bekannt ist, so erhalten wir durch Fortschreiten auf die höheren Potenzen:

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^0 = \varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi = \sin.\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^2 = \frac{1}{2}\sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^3 = \frac{1}{3}\sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \frac{2}{3}\sin.\varphi,$

$d\varphi . \cos.\varphi^4 = \frac{1}{4}\sin.\varphi \cos.\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi,$

$d\varphi . \cos.\varphi^5 = \frac{1}{5}\sin.\varphi \cos.\varphi^4 + \frac{1.4}{3.5}\sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \frac{2.4}{3.5}\sin.\varphi,$

$d\varphi . \cos.\varphi^6 = \frac{1}{6}\sin.\varphi \cos.\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi \cos.\varphi^3$

$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi$

ꝛc.

Aufgabe 27.

§. 246. **Das Integrale der Formel** $d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ **bestimmen.**

Auflösung.

Um leichter zum Ziele zu kommen, betrachten wir das Product $\sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu$, durch dessen Differenziation

$$\mu d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1} - \nu d\varphi \sin.\varphi^{\mu+1} \cos.\varphi^{\nu-1}$$

halten wird.

Je nachdem nun im ersten Theile $\cos.\varphi^2 = 1 - \sin.\varphi^2$, oder zweyten $\sin.\varphi^2 = 1 - \cos.\varphi^2$ gesetzt wird, erhält man entweder

$$d . \sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu =$$

$$\mu d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1} - (\mu + \nu) d\varphi \sin.\varphi^{\mu+1} \cos.\varphi^{\nu-1}$$

er

$$d . \sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu =$$

$$- \nu d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu-1} + (\mu+\nu) d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1}.$$

Hiedurch erhalten wir folgende zwey Reductionsformeln:

$$\int d\varphi \sin.\varphi^{\mu+1} \cos.\varphi^{\nu-1} = - \frac{1}{\mu+\nu}\sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu$$

$$+ \frac{\mu}{\mu+\nu}\int d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu-1},$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1} = \frac{1}{\mu+\nu}\sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu$$

$$+ \frac{\nu}{\mu+\nu}\int d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu-1}.$$

her wird die gegebene Formel $\int d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ nach und nach mer auf einfachere Potenzen sowohl von $\sin.\varphi$, als auch von $\cos.\varphi$ ückgeführt, bis eine dieser Größen entweder ganz verschwindet, oder in der ersten Potenz erscheint, in welchem Falle die Integration

für sich klar ist, weil

$$\int d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi = \frac{1}{m+1} \sin.\varphi^{m+1} \text{ und}$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi \cos.\varphi^n = -\frac{1}{n+1} \cos.\varphi^{n+1} \text{ ist.}$$

Beyspiel.

§. 247. Die Formel $d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7$ zu integriren.

Nach der ersten Reductionsformel erhalten wir wegen $\mu = 7$ und $\nu = 8$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7 = -\tfrac{1}{15} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^8 + \tfrac{7}{15} \int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^7;$$

diesen letzteren Ausdruck wollen wir nach der zweyten Reductionsformel behandeln, wodurch

$$\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^7 = \tfrac{1}{13} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^6 + \tfrac{6}{13} \int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^5$$

erhalten wird.

Auf diesem Wege erhalten wir ferner

$$\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^5 = -\tfrac{1}{11} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^6 + \tfrac{5}{11} \int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^5,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^5 = \tfrac{1}{9} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^4 + \tfrac{4}{9} \int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^3,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^3 = -\tfrac{1}{7} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^4 + \tfrac{3}{7} \int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi^3,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi^3 = \tfrac{1}{5} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^2 + \tfrac{2}{5} \int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi = -\tfrac{1}{3} \sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \tfrac{1}{3} \int d\varphi \cos.\varphi \left(+\tfrac{1}{3} \sin.\varphi\right).$$

Hieraus finden wir das Integrale der gegebenen Formel, nämlich

$$\begin{aligned}\int d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7 = & -\tfrac{1}{15} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^8 \\ & + \frac{1.7}{15.13} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^6 - \frac{1.7.6}{15.13.11} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^6 \\ & + \frac{1.7.6.5}{15.13.11.9} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^4 - \frac{1.7.6.5.4}{15.13.11.9.7} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^4 \\ & + \frac{1.7.6.5.4.3}{15.13.11.9.7.5} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^2 - \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin.\varphi \cos.\varphi^2 \\ & + \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin.\varphi\end{aligned}$$

Anmerkung.

§. 248. In solchen Fällen ist es aber immer besser, das Product $\sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ in Sinusse oder Cosinusse der vielfachen Winkel aufzulösen, wo dann die einzelnen Theile sehr leicht integrirt werden können. Übrigens habe ich hier den Winkel bloß durch φ angedeutet, und die Sache würde nichts an Allgemeinheit gewinnen, wenn wir ihn auch

durch $\alpha\varphi + \beta$ ausdrücken würden, so wie auch früher der Ausdruck arc. sin. x in demselben Sinne zu nehmen ist, als wenn man für x irgend eine Function setzen würde. Betrachten wir also solche Formeln, bey welchen Sinusse oder Cosinusse im Nenner erscheinen. Die einfachsten sind folgende:

$$\text{I. } \frac{d\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{II. } \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}; \quad \text{III. } \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{IV. } \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi};$$

deren Integrale vorzüglich wichtig sind. Bey der ersten Formel wenden wir folgende Transformationen an:

$$\frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\sin.\varphi^2} = \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{1 - \cos.\varphi^2} = \frac{-dx}{1 - x^2},$$

wenn $\cos.\varphi = x$ gesetzt wird; dadurch wird

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi}.$$

Für die zweyte Formel setzen wir

$$\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{1 - \sin.\varphi^2} = \frac{dx}{1 - x^2} \text{ für } \sin.\varphi = x,$$

$$\text{also } \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}.$$

Die Integration der dritten und vierten Formel wird offenbar durch Logarithmen bewerkstelligt, es wird daher gut seyn, sich folgende Integrale zu merken:

$$\text{I. } \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi} = l\, \frac{\sqrt{1-\cos.\varphi}}{\sqrt{1+\cos.\varphi}} = l\, \text{tg.}\, \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\text{II. } \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi} = l\, \frac{\sqrt{1+\sin.\varphi}}{\sqrt{1-\sin.\varphi}} = l\, \text{tg.}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\text{III. } \int \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\sin.\varphi} = l \sin.\varphi = \int \frac{d\varphi}{\text{tg.}\varphi} = \int d\varphi \,.\, \text{cotg.}\varphi,$$

$$\text{IV. } \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\, l \cos.\varphi = \int d\varphi \,.\, \text{tg.}\varphi.$$

Hieraus erhalten wir durch Addition von III. und IV.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi} = l\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = l\, \text{tg.}\varphi.$$

Aufgabe 28.

§. 249. Die Integrale der Formeln

$$\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} \text{ und } \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi^m}{\sin.\varphi^n} \text{ zu bestimmen.}$$

für sich klar ist, weil

$$\int d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi = \frac{1}{m+1} \sin.\varphi^{m+1} \quad \text{und}$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi \cos.\varphi^n = -\frac{1}{n+1} \cos.\varphi^{n+1} \quad \text{ist.}$$

Beyspiel.

§. 247. Die Formel $d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7$ zu integriren.

Nach der ersten Reductionsformel erhalten wir wegen $\mu = 7$ und $\nu = 8$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7 = -\tfrac{1}{15} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^8 + \tfrac{7}{15} \int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^7;$$

diesen letzteren Ausdruck wollen wir nach der zweyten Reductionsformel behandeln, wodurch

$$\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^7 = \tfrac{1}{13} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^6 + \tfrac{6}{13} \int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^5$$

erhalten wird.

Auf diesem Wege erhalten wir ferner

$$\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^5 = -\tfrac{1}{11} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^6 + \tfrac{5}{11} \int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^5,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^5 = \tfrac{1}{9} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^4 + \tfrac{4}{9} \int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^3,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^3 = -\tfrac{1}{7} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^4 + \tfrac{3}{7} \int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi^3,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi^3 = \tfrac{1}{5} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^2 + \tfrac{2}{5} \int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi = -\tfrac{1}{3} \sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \tfrac{1}{3} \int d\varphi \cos.\varphi \; (+\tfrac{1}{3} \sin.\varphi).$$

Hieraus finden wir das Integrale der gegebenen Formel, nämlich

$$\int d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7 = -\tfrac{1}{15} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^8$$
$$+ \frac{1.7}{15.13} \sin.\varphi^7 \cos.\varphi^6 - \frac{1.7.6}{15.13.11} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^6$$
$$+ \frac{1.7.6.5}{15.13.11.9} \sin.\varphi^5 \cos.\varphi^4 - \frac{1.7.6.5.4}{15.13.11.9.7} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^4$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3}{15.13.11.9.7.5} \sin.\varphi^3 \cos.\varphi^2 - \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin.\varphi \cos.\varphi^2$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3} \sin.\varphi$$

Anmerkung.

§. 248. In solchen Fällen ist es aber immer besser, das Product $\sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ in Sinusse oder Cosinusse der vielfachen Winkel aufzulösen, wo dann die einzelnen Theile sehr leicht integrirt werden können. Übrigens habe ich hier den Winkel bloß durch φ angedeutet, und die Sache würde nichts an Allgemeinheit gewinnen, wenn wir ihn auch

durch $\alpha\varphi + \beta$ ausdrücken würden, so wie auch früher der Ausdruck arc. sin. x in demselben Sinne zu nehmen ist, als wenn man für x irgend eine Function setzen würde. Betrachten wir also solche Formeln, bey welchen Sinusse oder Cosinusse im Nenner erscheinen. Die einfachsten sind folgende:

$$\text{I. } \frac{d\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{II. } \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}; \quad \text{III. } \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{IV. } \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi};$$

deren Integrale vorzüglich wichtig sind. Bey der ersten Formel wenden wir folgende Transformationen an:

$$\frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\sin.\varphi^2} = \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{1 - \cos.\varphi^2} = \frac{-dx}{1 - x^2},$$

wenn $\cos.\varphi = x$ gesetzt wird; dadurch wird

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi}.$$

Für die zweyte Formel setzen wir

$$\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{1 - \sin.\varphi^2} = \frac{dx}{1 - x^2} \text{ für } \sin.\varphi = x,$$

$$\text{also } \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}.$$

Die Integration der dritten und vierten Formel wird offenbar durch Logarithmen bewerkstelligt, es wird daher gut seyn, sich folgende Integrale zu merken:

$$\text{I. } \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi} = l\, \frac{\sqrt{1-\cos.\varphi}}{\sqrt{1+\cos.\varphi}} = l\, \text{tg.}\, \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\text{II. } \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi} = l\, \frac{\sqrt{1+\sin.\varphi}}{\sqrt{1-\sin.\varphi}} = l\, \text{tg.}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\text{III. } \int \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{\sin.\varphi} = l\, \sin.\varphi = \int \frac{d\varphi}{\text{tg.}\varphi} = \int d\varphi \,.\, \text{cotg.}\varphi,$$

$$\text{IV. } \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\, l\, \cos.\varphi = \int d\varphi \,.\, \text{tg.}\varphi.$$

Hieraus erhalten wir durch Addition von III. und IV.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi} = l\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = l\, \text{tg.}\varphi.$$

Aufgabe 28.

§. 249. Die Integrale der Formeln

$$\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} \text{ und } \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi^m}{\sin.\varphi^n} \text{ zu bestimmen.}$$

Auflösung.

Man sieht sogleich, daß die eine Formel in die andere übergehe, sobald $\varphi = 90^\circ - \psi$ gesetzt wird, denn dann wird $\sin.\varphi = \cos.\psi$ und $\cos.\varphi = \sin.\psi$, wobey zu bemerken ist, daß $d\varphi = -d\psi$ ist. Es ist also hinreichend, die Integration der ersten Formel nachzuweisen.

Die erste in §. 246 aufgestellte Reductionsformel gibt für $\mu + 1 = m$ und $\nu - 1 = -n$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} = -\frac{1}{m-n} \cdot \frac{\sin.\varphi^{m-1}}{\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{m-2}}{\cos.\varphi^n},$$

wodurch im Zähler der Exponent von $\sin.\varphi$ immer um zwei Einheiten kleiner wird, so daß man endlich auf die Form

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n} \text{ oder auf die Form } \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{(n-1)\cos.\varphi^{n-1}}$$

kömmt: und so haben wir nur noch $\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n}$ zu bestimmen.

Die zweite Reductionsformel §. 246 aber gibt, wenn $\mu - 1 = m$ und $\nu - 1 = -n$ gesetzt wird:

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^{n-2}} = \frac{1}{m-n+2} \cdot \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^{n-1}} - \frac{n-1}{m-n+2}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n},$$

und hieraus folgt

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^{n-2}},$$

durch welche Reduction der Exponent von Cosinus φ im Nenner stets um zwey Einheiten vermindert wird, so daß man endlich auf

$$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m \text{ oder auf } \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi} \text{ kömmt.}$$

Die Integration des ersten Ausdruckes ist schon oben nachgewiesen worden, bey der Integration des zweyten Ausdruckes aber kömmt man, wenn $m > 1$ ist, mit Hülfe der erstern Reduction endlich auf

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \mathrm{l\,tg.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \text{ oder auf } \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\mathrm{l}\cos.\varphi.$$

Zusatz 1.

§. 250. Die erste Reduction ist nicht brauchbar, sobald $m = n$ wird, denn in diesem Falle läßt sich $\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^n}{\cos.\varphi^n}$ nicht auf $\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{n-2}}{\cos.\varphi^n}$ zurückführen. Die zweyte Reduction aber ist immer brauchbar; denn ist gleichwohl der Fall $n = +1$ ausgeschlossen, so läßt sich dennoch die Integration desselben nach der ersten Reduction bewerkstelligen.

Zusatz 2.

§. 251. Der Grund der vorhin erwähnten Ausnahme liegt darin, weil die Formel $\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{n-2}}{\cos.\varphi^n}$ für sich integrabel ist, denn das Integral derselben ist $= \frac{1}{n-1} \,.\, \frac{\sin.\varphi^{n-1}}{\cos.\varphi^{n-1}}$, und wir erhalten demnach für diese Fälle folgende Formeln:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = tg.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^2} = \frac{1}{2}\, tg.\varphi^2,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{3}\, tg.\varphi^3,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin.\varphi^4}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{4}\, tg.\varphi^4.$$

Beyspiel 1.

§. 252. Die Formel $\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi}$ zu integriren.

Die erste Reduction gibt

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi} = \frac{-1}{m-1}\sin.\varphi^{m-1} + \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{m-2}}{\cos.\varphi}.$$

Fangen wir nun mit den bekannten Fällen an, so erhalten wir

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = l\, tg.(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\, l\cos.\varphi = l\sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi} = -\sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + l\sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^4}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{3}\sin.\varphi^3 - \sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^5}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{4}\sin.\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + l\sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^6}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{5}\sin.\varphi^5 - \tfrac{1}{3}\sin.\varphi^3 - \sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^7}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{6}\sin.\varphi^6 - \tfrac{1}{4}\sin.\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + l\sec.\varphi$$

ꝛc.

Anmerkung.

§. 253. In den übrigen Fällen rücksichtlich des Nenners wird d Integration durch folgende Reductionen zu Stande gebracht:

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi} - m\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^2} - \frac{m-1}{2}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{3} \,.\, \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^3} - \frac{m-2}{3}\int \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi^m}{\cos.\varphi^2},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{4} \,.\, \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^4} - \frac{m-3}{4}\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^3}.$$

Beyspiel 2.

§. 254. Die Formel $\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n}$ zu integriren.

Nach der zweyten Reduction erhalten wir, weil $m = 0$ ist:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^{n-2}}.$$

Weil nun die einfachsten Fälle

$$\int d\varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = l\,\text{tg.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

bekannt sind, so lassen sich alle folgenden Fälle auf diese zurückführe:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{3} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} + \frac{2}{3} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{4} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^4} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^6} = \frac{1}{5} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^5} + \frac{1 \,.\, 4}{3 \,.\, 5} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} + \frac{2 \,.\, 4}{3 \,.\, 5} \,.\, \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}.$$

Zusatz 1.

§. 255. Auf ähnliche Weise werden folgende Integrationen e halten:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = l\,\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\varphi; \quad \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2} = -\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^3} = -\frac{1}{2} \,.\, \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^5} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^4} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^2} + \frac{1.3}{2.4}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Zusatz 2.

§. 256. Demnach ist

$$\int \frac{d\varphi.\sin.\varphi}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^{n-1}} \text{ und}$$

$$\int \frac{d\varphi.\cos.\varphi}{\sin.\varphi^n} = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{n-1}},$$

und ferner

$$\int \frac{d\varphi.\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^{n-2}},$$

$$\int \frac{d\varphi.\cos.\varphi^2}{\sin.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{n-2}},$$

$$\int \frac{d\varphi.\sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi.\sin.\varphi}{\cos.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi.\sin.\varphi}{\cos.\varphi^{n-2}},$$

$$\int \frac{d\varphi.\cos.\varphi^3}{\sin.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi.\cos.\varphi}{\sin.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi.\cos.\varphi}{\sin.\varphi^{n-2}}.$$

Mit Hülfe dieser Reductionen kann man nun weiter gehen.

Aufgabe 29.

§. 257. Das Integrale der Formel $\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m.\cos.\varphi^n}$ zu bestimmen.

Auflösung.

Die oben gebrauchten Reductionen lassen sich auch für diesen Zweck einrichten, wenn man in der vorhergehenden Aufgabe m negativ setzt, man erhält nämlich

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m.\cos.\varphi^n} = \frac{1}{m+n}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{m+1}.\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{m+1}{m+n}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{m+2}.\cos.\varphi^n};$$

setzt man nun m—2 statt m, so erhält man durch Umkehrung

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m.\cos.\varphi^n} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{m-1}.\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{m-2}.\cos.\varphi^n}.$$

Die zweyte dieser ähnliche Formel ist:

Es ist demnach hier $X = 1$, $P = x$, $Q = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$,
$R = \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x$, $S = \int \frac{R\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$, $T = x$,
u. s. w. Mittelst dieser Werthe erhält man nun

$$y = \int \varphi^n\,dx = \varphi^n x + n\varphi^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)\varphi^{n-2} x$$
$$- n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\sqrt{1-x^2} + \text{etc.}$$

Für die verschiedenen Werthe des Exponenten n erhalten wir:

$$\int \varphi\,dx = \varphi x + \sqrt{1-x^2} - 1,$$
$$\int \varphi^2\,dx = \varphi^2 x + 2\varphi\sqrt{1-x^2} - 2.1x,$$
$$\int \varphi^3\,dx = \varphi^3 x + 3\varphi^2\sqrt{1-x^2} - 3.2\varphi x - 3.2.1\sqrt{1-x^2} + 6$$
$$\text{etc.},$$

welche Integrale so bestimmt sind, daß sie für $x = 0$ verschwinden.

Anmerkung.

§. 241. Wäre $X\,dx = u\,dx = d\varphi$, so würde das Integrale der Formel $\varphi^n\,d\varphi$ gleich $\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}$ seyn; eben so, wenn Φ irgend eine Function des Winkels φ bezeichnet, hat die Integration der Formel $\Phi u\,dx = \Phi\,d\varphi$ keine Schwierigkeit.

Weit ausgedehnter sind die Formeln, welche Sinusse, Cosinusse und Tangenten der Winkel enthalten, deren Integration durch die umgekehrte Rechnung von sehr ausgebreiteter Anwendung ist, indem vorzüglich die Theorie der Astronomie auf solchen Formeln beruht. Die ersten Grundsätze müssen aber aus der Differenzialrechnung genommen werden. Denn da

$$d.\sin. n\varphi = n\,d\varphi\cos. n\varphi; \quad d.\cos. n\varphi = -n\,d\varphi\sin. n\varphi;$$
$$d.\text{tg}. n\varphi = \frac{n\,d\varphi}{\cos.^2 n\varphi}; \quad d.\text{cotg}. n\varphi = \frac{-n\,d\varphi}{\sin.^2 n\varphi};$$
$$d.\frac{1}{\sin. n\varphi} = \frac{-n\,d\varphi\cos. n\varphi}{\sin.^2 n\varphi}; \quad d.\frac{1}{\cos. n\varphi} = \frac{n\,d\varphi\sin. n\varphi}{\cos.^2 n\varphi};$$

so erhalten wir folgende einfache Integrationen:

$$\int d\varphi\cos. n\varphi = \frac{1}{n}\sin. n\varphi; \quad \int d\varphi\sin. n\varphi = -\frac{1}{n}\cos. n\varphi;$$
$$\int \frac{d\varphi}{\cos.^2 n\varphi} = \frac{1}{n}\text{tg}. n\varphi; \quad \int \frac{d\varphi}{\sin.^2 n\varphi} = -\frac{1}{n}\text{cotg}. n\varphi;$$
$$\int \frac{d\varphi\cos. n\varphi}{\sin.^2 n\varphi} = -\frac{1}{n\sin. n\varphi}; \quad \int \frac{d\varphi\sin. n\varphi}{\cos.^2 n\varphi} = \frac{1}{n\cos. n\varphi};$$

woraus sogleich die Integration der Differenzialausdrücke von der Form
$d\varphi(A + B \cos.\varphi + C \cos.2\varphi + D \cos.3\varphi + E \cos.4\varphi + \text{etc.})$
erhellt, denn offenbar ist das Integrale
$A\varphi + B \sin.\varphi + \frac{1}{2} C \sin.2\varphi + \frac{1}{3} D \sin.3\varphi + \frac{1}{4} E \sin.4\varphi + \text{etc.}$

Hiebey können auch die in den Elementen aufgestellten Sätze über die Kreisfunctionen zu Hülfe genommen werden, nämlich:

$$\sin.\alpha \sin.\beta = \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha+\beta);$$
$$\cos.\alpha \cos.\beta = \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos.(\alpha+\beta);$$
$$\sin.\alpha \cos.\beta = \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha-\beta)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{2}\sin.(\beta-\alpha);$$

wodurch die Producte mehrerer Sinusse und Cosinusse in einfache Sinusse oder Cosinusse aufgelöst werden.

Aufgabe 26.

§. 242. Die Formel $d\varphi . \sin.\varphi^n$ zu integriren.

Auflösung.

Man bringe den gegebenen Ausdruck auf die Form
$\sin.\varphi^{n-1}\, d\varphi \sin.\varphi$, so ist, weil $\int d\varphi . \sin.\varphi = -\cos.\varphi$,

$$\int d\varphi . \sin.\varphi^n = -\sin.\varphi^{n-1}\cos.\varphi + (n-1) . \int d\varphi \sin.\varphi^{n-2}\cos.^2\varphi.$$

Da nun $\cos.^2\varphi = 1 - \sin.^2\varphi$ ist, so erhält man

$$\int d\varphi . \sin.^n\varphi =$$
$$= -\sin.\varphi^{n-1}\cos.\varphi + (n-1)\int d\varphi \sin.\varphi^{n-2} - (n-1)\int d\varphi \sin.^n\varphi,$$

wobey das letzte Glied den gegebenen Ausdruck selbst enthält; wir erhalten demnach folgende Reductionsformel:

$$\int d\varphi \sin.\varphi^n = -\frac{1}{n}\sin.\varphi^{n-1}\cos.\varphi + \frac{n-1}{n}\int d\varphi \sin.\varphi^{n-2},$$

wodurch die Integration auf die einfachere Formel $d\varphi \sin.\varphi^{n-2}$ gebracht wird.

Weil demnach die einfachsten Fälle

$$\int d\varphi . \sin.^0\varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \int d\varphi . \sin.\varphi = -\cos.\varphi$$

bekannt sind, so erhalten wir, wenn wir nach und nach zu den höheren Exponenten fortschreiten, folgende Formeln:

$\int d\varphi . \sin.\varphi^0 = \varphi,$
$\int d\varphi . \sin.\varphi = -\cos.\varphi,$
$\int d\varphi . \sin.\varphi^2 = -\frac{1}{2}\sin.\varphi . \cos.\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3 = -\frac{1}{3}\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi - \frac{2}{3}\cos.\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^4 = -\frac{1}{4}\sin.\varphi^3 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^5 = -\frac{1}{5}\sin.\varphi^4 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.4}{3.5}\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi - \frac{2.4}{3.5}\cos.\varphi,$

$$\int d\varphi \,.\, \sin.\varphi^6 = -\frac{1}{6}\sin.\varphi^5 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.5}{4.6}\sin.\varphi^3 \,.\, \cos.\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi$$

ꝛc.

Zusatz 1.

§. 243. Ist n eine ungerade Zahl, so wird das Integrale bloß durch Sinus und Cosinus ausgedrückt; ist aber n eine gerade Zahl, so enthält das Integrale überdieß den Winkel selbst, und daher ist die Function transcendent.

Zusatz 2.

§. 244. Für die Fälle, wo n eine ungerade Zahl ist, ist besonders noch zu bemerken, daß bey dem unendlichen Wachsen des Winkels oder Bogens φ das Integrale dennoch eine gewisse Gränze nicht überschreiten könne, da es doch, wenn n eine gerade Zahl ist, ohne Ende wächst.

Anmerkung.

§. 245. Auf ähnliche Weise behandelt man $d\varphi \,.\, \cos.\varphi^n$, welche auf die Form $\cos.\varphi^{n-1}\, d\varphi \,.\, \cos.\varphi$ gebracht, die Gleichung

$$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^n =$$
$$= \cos.\varphi^{n-1}\sin.\varphi + (n-1)\int d\varphi \cos.\varphi^{n-2}\sin.\varphi^2$$
$$= \cos.\varphi^{n-1}\sin.\varphi + (n-1)\int d\varphi \cos.\varphi^{n-2} - (n-1)\int d\varphi \cos.\varphi^n,$$

darbiethet, aus welcher die Reductionsformel

$$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^n = \frac{1}{n}\sin.\varphi \cos.\varphi^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^{n-2}$$

erhalten wird.

Da nun für $n=0$ und $n=1$ die Integration bekannt ist, so erhalten wir durch Fortschreiten auf die höheren Potenzen:

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^0 = \varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi = \sin.\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^2 = \frac{1}{2}\sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$

$\int d\varphi \,.\, \cos.\varphi^3 = \frac{1}{3}\sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \frac{2}{3}\sin.\varphi,$

$$\int d\varphi \, . \cos.\varphi^4 = \tfrac{1}{4} \sin.\varphi \cos.\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4} \sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3}{2.4} \varphi,$$

$$\int d\varphi \, . \cos.\varphi^5 = \tfrac{1}{5} \sin.\varphi \cos.\varphi^4 + \frac{1.4}{3.5} \sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \frac{2.4}{3.5} \sin.\varphi,$$

$$\int d\varphi \, . \cos.\varphi^6 = \tfrac{1}{6} \sin.\varphi \cos.\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6} \sin.\varphi \cos.\varphi^3$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} \varphi$$

ꝛc.

Aufgabe 27.

§. 246. **Das Integrale der Formel** $d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ **zu bestimmen.**

Auflösung.

Um leichter zum Ziele zu kommen, betrachten wir das Product $\sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu$, durch dessen Differenziation

$$\mu \, d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1} - \nu \, d\varphi \sin.\varphi^{\mu+1} \cos.\varphi^{\nu-1}$$

erhalten wird.

Je nachdem nun im ersten Theile $\cos.\varphi^2 = 1 - \sin.\varphi^2$, oder im zweyten $\sin.\varphi^2 = 1 - \cos.\varphi^2$ gesetzt wird, erhält man entweder

$$d \, . \sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu =$$

$$= \mu \, d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1} - (\mu + \nu) \, d\varphi \sin.\varphi^{\mu+1} \cos.\varphi^{\nu-1}$$

oder

$$d \, . \sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu =$$

$$= - \nu \, d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu-1} + (\mu + \nu) \, d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1}.$$

Hiedurch erhalten wir folgende zwey Reductionsformeln:

$$\text{I.} \int d\varphi \sin.\varphi^{\mu+1} \cos.\varphi^{\nu-1} = - \frac{1}{\mu+\nu} \sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu$$

$$+ \frac{\mu}{\mu+\nu} \int d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu-1},$$

$$\text{II.} \int d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu+1} = \frac{1}{\mu+\nu} \sin.\varphi^\mu \cos.\varphi^\nu$$

$$+ \frac{\nu}{\mu+\nu} \int d\varphi \sin.\varphi^{\mu-1} \cos.\varphi^{\nu-1}.$$

Daher wird die gegebene Formel $\int d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ nach und nach immer auf einfachere Potenzen sowohl von $\sin.\varphi$, als auch von $\cos.\varphi$ zurückgeführt, bis eine dieser Größen entweder ganz verschwindet, oder nur in der ersten Potenz erscheint, in welchem Falle die Integration

für sich klar ist, weil

$$\int d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi = \frac{1}{m+1} \sin.\varphi^{m+1} \text{ und}$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi \cos.\varphi^n = -\frac{1}{n+1} \cos.\varphi^{n+1} \text{ ist.}$$

Beyspiel.

§. 247. Die Formel $d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7$ zu integriren.

Nach der ersten Reductionsformel erhalten wir wegen $\mu = 7$ und $\nu = 8$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7 = -\tfrac{1}{15}\sin.\varphi^7 \cos.\varphi^8 + \tfrac{7}{15}\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^7;$$

diesen letzteren Ausdruck wollen wir nach der zweyten Reductionsformel behandeln, wodurch

$$\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^7 = \tfrac{1}{13}\sin.\varphi^7 \cos.\varphi^6 + \tfrac{6}{13}\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^5$$

erhalten wird.

Auf diesem Wege erhalten wir ferner

$$\int d\varphi \sin.\varphi^6 \cos.\varphi^5 = -\tfrac{1}{11}\sin.\varphi^5 \cos.\varphi^6 + \tfrac{5}{11}\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^5,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^5 = \tfrac{1}{9}\sin.\varphi^5 \cos.\varphi^4 + \tfrac{4}{9}\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^3,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^4 \cos.\varphi^3 = -\tfrac{1}{7}\sin.\varphi^3 \cos.\varphi^4 + \tfrac{3}{7}\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi^3,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi^3 = \tfrac{1}{5}\sin.\varphi^3 \cos.\varphi^2 + \tfrac{2}{5}\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin.\varphi^2 \cos.\varphi = -\tfrac{1}{3}\sin.\varphi \cos.\varphi^2 + \tfrac{1}{3}\int d\varphi \cos.\varphi \; (+\tfrac{1}{3}\sin.\varphi).$$

Hieraus finden wir das Integrale der gegebenen Formel, nämlich

$$\int d\varphi \sin.\varphi^8 \cos.\varphi^7 = -\tfrac{1}{15}\sin.\varphi^7 \cos.\varphi^8$$
$$+ \frac{1.7}{15.13}\sin.\varphi^7 \cos.\varphi^6 - \frac{1.7.6}{15.13.11}\sin.\varphi^5 \cos.\varphi^6$$
$$+ \frac{1.7.6.5}{15.13.11.9}\sin.\varphi^5 \cos.\varphi^4 - \frac{1.7.6.5.4}{15.13.11.9.7}\sin.\varphi^3 \cos.\varphi^4$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3}{15.13.11.9.7.5}\sin.\varphi^3 \cos.\varphi^2 - \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3}\sin.\varphi \cos.\varphi^2$$
$$+ \frac{1.7.6.5.4.3.2}{15.13.11.9.7.5.3}\sin.\varphi$$

Anmerkung.

§. 248. In solchen Fällen ist es aber immer besser, das Product $\sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ in Sinusse oder Cosinusse der vielfachen Winkel aufzulösen, wo dann die einzelnen Theile sehr leicht integrirt werden können. Übrigens habe ich hier den Winkel bloß durch φ angedeutet, und die Sache würde nichts an Allgemeinheit gewinnen, wenn wir ihn auch

durch $\alpha\varphi + \beta$ ausdrücken würden, so wie auch früher der Ausdruck arc. sin. x in demselben Sinne zu nehmen ist, als wenn man für x irgend eine Function setzen würde. Betrachten wir also solche Formeln, bey welchen Sinusse oder Cosinusse im Nenner erscheinen. Die einfachsten sind folgende:

$$\text{I. } \frac{d\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{II. } \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}; \quad \text{III. } \frac{d\varphi\,.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}; \quad \text{IV. } \frac{d\varphi\,.\sin.\varphi}{\cos.\varphi};$$

deren Integrale vorzüglich wichtig sind. Bey der ersten Formel wenden wir folgende Transformationen an:

$$\frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = \frac{d\varphi\,.\sin.\varphi}{\sin.\varphi^2} = \frac{d\varphi\,.\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi^2} = \frac{-dx}{1-x^2},$$

wenn $\cos.\varphi = x$ gesetzt wird; dadurch wird

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x} = -\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi}.$$

Für die zweyte Formel setzen wir

$$\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{d\varphi\,.\cos.\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{d\varphi\,.\cos.\varphi}{1-\sin.\varphi^2} = \frac{dx}{1-x^2} \text{ für } \sin.\varphi = x,$$

$$\text{also } \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}.$$

Die Integration der dritten und vierten Formel wird offenbar durch Logarithmen bewerkstelligt, es wird daher gut seyn, sich folgende Integrale zu merken:

$$\text{I. } \int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+\cos.\varphi}{1-\cos.\varphi} = l\,\frac{\sqrt{1-\cos.\varphi}}{\sqrt{1+\cos.\varphi}} = l\,\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\text{II. } \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi} = l\,\frac{\sqrt{1+\sin.\varphi}}{\sqrt{1-\sin.\varphi}} = l\,\text{tg.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\text{III. } \int\frac{d\varphi\,.\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = l\sin.\varphi = \int\frac{d\varphi}{\text{tg.}\varphi} = \int d\varphi\,.\,\text{cotg.}\varphi,$$

$$\text{IV. } \int\frac{d\varphi\,.\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -l\cos.\varphi = \int d\varphi\,.\,\text{tg.}\varphi.$$

Hieraus erhalten wir durch Addition von III. und IV.

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\,.\cos.\varphi} = l\,\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = l\,\text{tg.}\varphi.$$

Aufgabe 28.

§. 249. Die Integrale der Formeln

$$\frac{d\varphi\,.\sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} \text{ und } \frac{d\varphi\,.\cos.\varphi^m}{\sin.\varphi^n} \text{ zu bestimmen.}$$

Auflösung.

Man sieht sogleich, daß die eine Formel in die andere übergehe, sobald $\varphi = 90^\circ - \psi$ gesetzt wird, denn dann wird $\sin.\varphi = \cos.\psi$ und $\cos.\varphi = \sin.\psi$, wobey zu bemerken ist, daß $d\varphi = -d\psi$ ist. Es ist also hinreichend, die Integration der ersten Formel nachzuweisen.

Die erste in §. 246 aufgestellte Reductionsformel gibt für $\mu + 1 = m$ und $\nu - 1 = -n$

$$\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} = -\frac{1}{m-n} . \frac{\sin.\varphi^{m-1}}{\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^{m-2}}{\cos.\varphi^n},$$

wodurch im Zähler der Exponent von $\sin.\varphi$ immer um zwei Einheiten kleiner wird, so daß man endlich auf die Form

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n} \text{ oder auf die Form } \int \frac{d\varphi . \sin.\varphi}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{(n-1)\cos.\varphi^{n-1}}$$

kömmt: und so haben wir nur noch $\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n}$ zu bestimmen.

Die zweite Reductionsformel §. 246 aber gibt, wenn $\mu - 1 = m$ und $\nu - 1 = -n$ gesetzt wird:

$$\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^{n-2}} = \frac{1}{m-n+2} . \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^{n-1}} - \frac{n-1}{m-n+2}\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n},$$

und hieraus folgt

$$\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{n-1} . \frac{\sin.\varphi^{m+1}}{\cos.\varphi^{n-1}} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi^{n-2}},$$

durch welche Reduction der Exponent von Cosinus φ im Nenner stets um zwey Einheiten vermindert wird, so daß man endlich auf

$$\int d\varphi . \sin.\varphi^m \text{ oder auf } \int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi} \text{ kömmt.}$$

Die Integration des ersten Ausdruckes ist schon oben nachgewiesen worden, bey der Integration des zweyten Ausdruckes aber kömmt man, wenn $m > 1$ ist, mit Hülfe der erstern Reduction endlich auf

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = l\,tg.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \text{ oder auf } \int \frac{d\varphi . \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -l\cos.\varphi.$$

Zusatz 1.

§. 250. Die erste Reduction ist nicht brauchbar, sobald $m = n$ wird, denn in diesem Falle läßt sich $\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^n}{\cos.\varphi^n}$ nicht auf $\int \frac{d\varphi . \sin.\varphi^{n-2}}{\cos.\varphi^n}$ zurückführen. Die zweyte Reduction aber ist immer brauchbar; denn ist gleichwohl der Fall $n = +1$ ausgeschlossen, so läßt sich dennoch die Integration desselben nach der ersten Reduction bewerkstelligen.

Zusatz 2.

§. 251. Der Grund der vorhin erwähnten Ausnahme liegt darin, weil die Formel $\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{n-2}}{\cos.\varphi^n}$ für sich integrabel ist, denn das Integral derselben ist $= \frac{1}{n-1} \,.\, \frac{\sin.\varphi^{n-1}}{\cos.\varphi^{n-1}}$, und wir erhalten demnach für diese Fälle folgende Formeln:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2} = \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \mathrm{tg}.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{2} \frac{\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}.\varphi^2,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{3} \frac{\sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}.\varphi^3,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^5} = \frac{1}{4} \frac{\sin.\varphi^4}{\cos.\varphi^4} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}.\varphi^4.$$

Beyspiel 1.

§. 252. Die Formel $\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi}$ zu integriren.

Die erste Reduction gibt

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^m}{\cos.\varphi} = \frac{-1}{m-1} \sin.\varphi^{m-1} + \int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^{m-2}}{\cos.\varphi}.$$

Fangen wir nun mit den bekannten Fällen an, so erhalten wir

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = l\,\mathrm{tg}.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{\cos.\varphi} = -\, l \cos.\varphi = l \sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^2}{\cos.\varphi} = -\sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^3}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + l \sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^4}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{3}\sin.\varphi^3 - \sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^5}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{4}\sin.\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + l \sec.\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^6}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{5}\sin.\varphi^5 - \tfrac{1}{3}\sin.\varphi^3 - \sin.\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi^7}{\cos.\varphi} = -\tfrac{1}{6}\sin.\varphi^6 - \tfrac{1}{4}\sin.\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin.\varphi^2 + l \sec.\varphi$$

ꝛc.

$A = 1 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{8} n^4 + \frac{10}{32} n^6 +$ ꝛc. oder

$A = 1 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1.3}{2.4} n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} n^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} n^8 +$ ꝛc.,

und so erhellt, daß $A = \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}}$.

Auf ähnliche Art findet man

$$B = n + \frac{3}{4} n^3 + \frac{10}{16} n^5 + \text{ꝛc.}$$
$$= \frac{2}{n}\left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1.3}{2.4} n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} n^6 + \text{ꝛc.}\right),$$

und daher $B = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - n^2}} - 1\right)$. Allein diesen so wie die folgenden Werthe kann man leichter auf folgende Art bestimmen. Da

$$\frac{1}{1 + n \cos.\varphi} = A - B \cos.\varphi + C \cos.2\varphi - D \cos.3\varphi + E \cos.4\varphi - \text{ꝛc.},$$

so multiplicire man durch $1 + n \cos.\varphi$, und weil

$$\cos.\varphi . \cos.\lambda\varphi = \frac{1}{2} \cos.(\lambda - 1)\varphi + \frac{1}{2} \cos.(\lambda + 1)\varphi,$$

so wird

$$\begin{aligned} 1 = A &- B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi - D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi - \text{ꝛc.} \\ &+ An \quad - \tfrac{1}{2}Bn \quad + \tfrac{1}{2}Cn \quad - \tfrac{1}{2}Dn - \text{ꝛc.} \\ - \tfrac{1}{2}Bn &+ \tfrac{1}{2}Cn \quad - \tfrac{1}{2}Dn \quad + \tfrac{1}{2}En \quad - \tfrac{1}{2}Fn + \text{ꝛc.}; \end{aligned}$$

woraus, weil wir A schon bestimmt haben, die übrigen Coefficienten auf folgende Art gefunden werden:

$$B = \frac{2}{n}(A - 1); \quad E = \frac{2D - Cn}{n};$$
$$C = \frac{2(B - An)}{n}; \quad F = \frac{2E - Dn}{n};$$
$$D = \frac{2C - Bn}{n}; \quad G = \frac{2F - En}{n};$$
ꝛc.

Sind demnach diese Coefficienten gefunden, so läßt sich das Integrale leicht angeben; denn da $\int d\varphi \cos.\lambda\varphi = \frac{1}{\lambda} \sin.\lambda\varphi$, so erhalten wir

$$\int \frac{d\varphi}{1 + n \cos.\varphi} = A\varphi - B \sin.\varphi + \tfrac{1}{2} C \sin.2\varphi - \tfrac{1}{3} D \sin.3\varphi + \tfrac{1}{4} E \sin.4\varphi - \text{ꝛc.},$$

welche Reihe nach den Sinussen der Bogen φ; 2φ; 3φ; ꝛc. fortschreitet, wie verlangt wurde.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^5} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^4} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi^2} + \frac{1.3}{2.4}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi}.$$

Zusatz 2.

§. 256. Demnach ist

$$\int \frac{d\varphi\,.\,\sin.\varphi}{\cos.\varphi^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^{n-1}} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{d\varphi\,.\,\cos.\varphi}{\sin.\varphi^n} = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{n-1}},$$

und ferner

$$\int \frac{d\varphi\,.\,\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^{n-2}},$$

$$\int \frac{d\varphi\,.\,\cos.\varphi^2}{\sin.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{n-2}},$$

$$\int \frac{d\varphi\,.\,\sin.\varphi^3}{\cos.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi\,.\,\sin.\varphi}{\cos.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi\,.\,\sin.\varphi}{\cos.\varphi^{n-2}},$$

$$\int \frac{d\varphi\,.\,\cos.\varphi^3}{\sin.\varphi^n} = \int\frac{d\varphi\,.\,\cos.\varphi}{\sin.\varphi^n} - \int\frac{d\varphi\,.\,\cos.\varphi}{\sin.\varphi^{n-2}}.$$

Mit Hülfe dieser Reductionen kann man nun weiter gehen.

Aufgabe 29.

§. 257. Das Integrale der Formel $\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m\,.\,\cos.\varphi^n}$ zu bestimmen.

Auflösung.

Die oben gebrauchten Reductionen lassen sich auch für diesen Zweck einrichten, wenn man in der vorhergehenden Aufgabe m negativ setzt, man erhält nämlich

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m\,.\,\cos.\varphi^n} = \frac{1}{m+n}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{m+1}\,.\,\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{m+1}{m+n}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{m+2}\,.\,\cos.\varphi^n};$$

setzt man nun $m-2$ statt m, so erhält man durch Umkehrung

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m\,.\,\cos.\varphi^n} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{m-1}\,.\,\cos.\varphi^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{m-2}\,.\,\cos.\varphi^n}.$$

Die zweyte dieser ähnliche Formel ist:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m\ .\ \cos.\varphi^n}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^{m-1}\ .\ \cos.\varphi^{n-1}}$$
$$+\frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^m\ .\ \cos.\varphi^{n-2}}.$$

Die einfachsten Ausdrücke von dieser Form sind:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi}=\mathrm{l\,tg.}\tfrac{1}{2}\varphi;\ \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi}=\mathrm{l\,tg.}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi);\ \int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi}=\mathrm{l\,tg.}\varphi$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2}=-\ \mathrm{cotg.}\varphi;\ \int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2}=\mathrm{tg.}\varphi;$$

und hieraus finden wir folgende zusammengesetztere Formeln:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^2}=\frac{1}{\cos.\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2\ .\ \cos.\varphi}=-\frac{1}{\sin.\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi};$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^3}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^2},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^4\ .\ \cos.\varphi}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^3}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2\ .\ \cos.\varphi};$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^5}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^4},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^6\ .\ \cos.\varphi}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^5}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^4\ .\ \cos.\varphi};$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^2}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^3\ .\ \cos.\varphi}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^2}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi};$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^4}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^3},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^5\ .\ \cos.\varphi}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^4}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^3\ .\ \cos.\varphi};$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^7}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\cos.\varphi^6}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi^5},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^7\ .\ \cos.\varphi}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sin.\varphi^6}+\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^5\ .\ \cos.\varphi};$$

rc.

$$\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2\ .\ \cos.\varphi^2}=\frac{1}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi}+2\int\frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2}$$
$$=-\frac{1}{\sin.\varphi\ .\ \cos.\varphi}+2\int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi^2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin.\varphi \,.\, \cos.\varphi^3} + \frac{4}{3} \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi^2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^4 \,.\, \cos.\varphi^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin.\varphi^3 \,.\, \cos.\varphi} + \frac{4}{3} \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^2 \,.\, \cos.\varphi^2}.$$

Und so werden was immer für zusammengesetzte Formeln auf einfachere zurückgeführt, deren Integration bekannt ist.

Zusatz 1.

§. 258. Die Exponenten von $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ können beyde zugleich um zwey Einheiten vermindert werden; denn durch die erste Reduction erhalten wir

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu} \,.\, \cos.\varphi^{\nu}} = \frac{-1}{\mu-1} \cdot \frac{1}{\sin.\varphi^{\mu-1} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-1}} + \frac{\mu+\nu-2}{\mu-1} \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu-2} \,.\, \cos.\varphi^{\nu}},$$

und diese Formel gibt nach der zweyten Reduction, weil $m = \mu - 2$ und $n = \nu$ ist:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu-2} \,.\, \cos.\varphi^{\nu}} = \frac{1}{\nu-1} \cdot \frac{1}{\sin.\varphi^{\mu-3} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-1}} + \frac{\mu+\nu-4}{\nu-1} \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu-2} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-2}},$$

woraus folgt

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu} \,.\, \cos.\varphi^{\nu}} =$$

$$= \frac{-1}{\mu-1} \cdot \frac{1}{\sin.\varphi^{\mu-1} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-1}} + \frac{\mu+\nu-2}{(\mu-1)(\nu-1)} \cdot \frac{1}{\sin.\varphi^{\mu-3} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-1}} + \frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-4)}{(\mu-1)\quad(\nu-1)} \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu-2} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-2}}.$$

Zusatz 2.

§. 259. Bringt man die ersten Glieder dieses Ausdruckes auf gemeinschaftliche Benennung, so erhält man

$$\int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu} \,.\, \cos.\varphi^{\nu}} = \frac{(\mu-1)\sin.\varphi^2 - (\nu-1)\cos.\varphi^2 - 1}{(\mu-1)(\nu-1)\sin.\varphi^{\mu-1} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-1}} + \frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-4)}{(\mu-1)\quad(\nu-1)} \int \frac{d\varphi}{\sin.\varphi^{\mu-2} \,.\, \cos.\varphi^{\nu-2}};$$

$$(1 + n\cos.\varphi)^\nu = A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi + \text{etc.}$$

gesetzt wird, nach den oben angegebenen Formeln

$$A = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}\,.\,\tfrac{1}{2}n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}n^4 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,6}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}n^6 + \text{etc.},$$

$$B = 2n\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}n^4 + \text{etc.}\right);$$

welche Reihen deutlicher auf folgende Art dargestellt werden:

$$A = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2\,.\,2}n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4}n^4 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6}n^6 + \text{etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}B = \frac{\nu}{2}n + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\,.\,2\,.\,4}n^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6}n^5 + \text{etc.}$$

Sind aber diese beyden Coefficienten A und B bestimmt, so lassen sich aus diesen die übrigen bequemer auf folgende Art finden.

Da $\nu l(1 + n\cos.\varphi) =$
$= l[A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi + \ldots]$, so nehme man die Differenzialien, wodurch man, wenn gleich durch $-d\varphi$ dividirt wird,

$$\frac{\nu n\sin.\varphi}{1 + n\cos.\varphi} = \frac{B\sin.\varphi + 2C\sin.2\varphi + 3D\sin.3\varphi + 4E\sin.4\varphi + \text{etc.}}{A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi + \text{etc.}}$$

erhält. Multiplicirt man nun übers Kreuz, so kömmt man wegen

$$\sin.\lambda\varphi\cos.\varphi = \tfrac{1}{2}\sin.(\lambda+1)\varphi + \tfrac{1}{2}\sin.(\lambda-1)\varphi \quad \text{und}$$
$$\sin.\varphi\cos.\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}\sin.(\lambda+1)\varphi - \tfrac{1}{2}\sin.(\lambda-1)\varphi$$

endlich auf folgende Gleichung:

$$\begin{array}{llllll}
0 = B\sin.\varphi & + 2C\sin.2\varphi & + 3D\sin.3\varphi & + 4E\sin.4\varphi & + 5F\sin.5\varphi & + \text{etc.} \\
 & + \tfrac{1}{2}Bn & + \tfrac{2}{2}Cn & + \tfrac{3}{2}Dn & + \tfrac{4}{2}En & \\
+ \tfrac{2}{2}Cn & + \tfrac{3}{2}Dn & + \tfrac{4}{2}En & + \tfrac{5}{2}Fn & + \tfrac{6}{2}Gn & \\
- \nu An & - \frac{\nu}{2}Bn & - \frac{\nu}{2}Cn & - \frac{\nu}{2}Dn & - \frac{\nu}{2}En & \\
+ \frac{\nu}{2}Cn & + \frac{\nu}{2}Dn & + \frac{\nu}{2}En & + \frac{\nu}{2}Fn & + \frac{\nu}{2}Gn, &
\end{array}$$

Auflösung.

Am bequemsten kömmt man zum Ziele, wenn man die gegebene Formel auf die gewöhnliche Form bringt, indem man $\cos.\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ setzt, damit $\sin.\varphi = \frac{2x}{1+x^2}$ rational werde. Hieraus folgt

$$d\varphi\,.\,\cos.\varphi = \frac{2\,dx(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \text{ und daher } d\varphi = \frac{2\,dx}{1+x^2}.$$

Weil nun $a + b\cos.\varphi = \frac{a+b+(a-b)x^2}{1+x^2}$, so wird unsere Formel

$$\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi} = \frac{2\,dx}{a+b+(a-b)x^2},$$

welche entweder einen Winkel oder einen Logarithmus darbietet, je nachdem $a>b$ oder $a<b$ ist.

Für den Fall $a>b$ finden wir

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc. tg. }\frac{(a-b)x}{\sqrt{a^2-b^2}},$$ für $a<b$ aber

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,.\,l\,\frac{\sqrt{b^2-a^2}+x(b-a)}{\sqrt{b^2-a^2}-x(b-a)}.$$ Nun ist aber

$$x = \sqrt{\frac{1-\cos.\varphi}{1+\cos.\varphi}} = \text{tg.}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sin.\varphi}{1+\cos.\varphi}.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhält man

$$2\text{ arc. tg. }\frac{(a-b)x}{\sqrt{a^2-b^2}} = \text{arc. tg. }\frac{2x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-(a-b)x^2}$$

$$= \text{arc. tg. }\frac{2\sin.\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)(1+\cos.\varphi)-(a-b)(1-\cos.\varphi)}$$

$$= \text{arc. tg. }\frac{\sin.\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a\cos.\varphi+b}.$$

Für $a>b$ erhalten wir demnach

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc. tg }\frac{\sin.\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a\cos.\varphi+b}$$ oder

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc. sin. }\frac{\sin.\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos.\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc. cos. }\frac{a\cos.\varphi+b}{a+b\cos.\varphi}.$$

Ist aber $a<b$, so wird

$$\int \frac{d\varphi}{a + b \cos.\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \, l \, \frac{\sqrt{(b+a)(1+\cos.\varphi)} + \sqrt{(b-a)(1-\cos.\varphi)}}{\sqrt{(b+a)(1+\cos.\varphi)} - \sqrt{(b-a)(1-\cos.\varphi)}}$$

oder

$$\int \frac{d\varphi}{a + b \cos.\varphi} = \frac{-1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \, l \, \frac{a \cos.\varphi + b + \sin.\varphi \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos.\varphi};$$

für $b = a$ ist das Integrale gleich $= \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \, tg. \frac{1}{2} \varphi$, und demnach

$$\int \frac{d\varphi}{1 + \cos.\varphi} = tg. \tfrac{1}{2} \varphi = \frac{\sin.\varphi}{1 + \cos.\varphi},$$

welche Integralien für $\varphi = b$ verschwinden.

Zusatz 1.

§. 262. Das Integral der Formel $\frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{a + b \cos.\varphi} = \frac{-d \,.\, \cos.\varphi}{a + b \cos.\varphi}$ ist gleich $\frac{1}{b} \, l \, \frac{a + b}{a + b \cos.\varphi}$, welches so bestimmt ist, daß es für $\varphi = 0$ verschwindet. Es ist demnach

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \sin.\varphi}{a + b \cos.\varphi} = \frac{1}{b} \, l \, \frac{a + b}{a + b \cos.\varphi}.$$

Zusatz 2.

§. 263. Die Formel $\frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{a + b \cos.\varphi}$ läßt sich in $\frac{d\varphi}{b} - \frac{a\, d\varphi}{b(a + b \cos.\varphi)}$ umstalten, und nach der Auflösung unserer Aufgabe finden wir folgendes Integrale:

$$\int \frac{d\varphi \,.\, \cos.\varphi}{a + b \cos.\varphi} = \frac{\varphi}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{d\varphi}{a + b \cos.\varphi}.$$

Anmerkung 1.

§. 264. Nachdem nun dieses Integrale bestimmt ist, können wir auch die Formel $\frac{d\varphi}{(a + b \cos.\varphi)^n}$ integriren, wobey n eine ganze Zahl bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung scheint die bequemste Form des Integrales folgende zu seyn:

$$\int \frac{d\varphi}{(a + b \cos.\varphi)^2} = \frac{A \sin.\varphi}{a + b \cos.\varphi} + m \int \frac{d\varphi}{a + b \cos.\varphi},$$

und man findet $A = \frac{-b}{a^2 - b^2}$ und $m = \frac{a}{a^2 + b^2}$. Ferner setze man

$$\int \frac{d\varphi}{(a + b \cos.\varphi)^3} = \frac{(A + B \cos.\varphi) \sin.\varphi}{(a + b \cos.\varphi)^2} + m \int \frac{d\varphi}{[a + b \cos.\varphi]^2},$$ wo

$$A = \frac{-b}{a^2 - b^2};\quad B = \frac{-ab}{2a(a^2 - b^2)};\quad m = \frac{2a^2 + b^2}{2a(a^2 - b^2)}$$

gefunden wird; und auf ähnliche Art kann man zu den höheren Potenzen fortgehen, obgleich diese Arbeit nicht gar angenehm ist.

Folgende Methode aber scheint am leichtesten zum Resultate zu führen. Man betrachte nämlich die allgemeinere Form $\frac{d\varphi(f + g\cos.\varphi)}{(a + b\cos.\varphi)^{n+1}}$, und setze

$$\int\frac{d\varphi(f + g\cos.\varphi)}{(a + b\cos.\varphi)^{n+1}} = \frac{A\sin.\varphi}{(a + b\cos.\varphi)^n} + \int\frac{d\varphi(B + C\cos.\varphi)}{(a + b\cos.\varphi)^n}.$$

Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man

$$f + g\cos.\varphi = A\cos.\varphi(a + b\cos.\varphi) + nAb\sin.\varphi^2$$
$$+ (B + C\cos.\varphi)(a + b\cos.\varphi),$$

welche Gleichung wegen $\sin.\varphi^2 = 1 - \cos.\varphi^2$ folgende Form erhält:

$$\left.\begin{array}{llll} -f & -g\cos.\varphi & + Ab\cos.\varphi^2 \\ +nAb & +Aa\cos.\varphi & - nAb\cos.\varphi^2 \\ +Ba & +Bb\cos.\varphi & + Cb\cos.\varphi^2 \\ & +Ca\cos.\varphi & \end{array}\right\} = 0,$$

woraus man, wenn die einzelnen Glieder $= 0$ gesetzt werden, folgende Gleichungen erhält:

$$A = \frac{ag - bf}{n(a^2 - b^2)};\quad B = \frac{af - bg}{a^2 - b^2}\quad \text{und}\quad C = \frac{(n-1)(ag - bf)}{n(a^2 - b^2)}.$$

Man erhält demnach auf diese Weise folgende Reductionsformel:

$$\int\frac{d\varphi(f + g\cos.\varphi)}{(a + b\cos.\varphi)^{n+1}} = \frac{(ag - bf)\sin.\varphi}{n(a^2 - b^2)(a + b\cos.\varphi)^n}$$
$$+ \frac{1}{n(a^2 - b^2)}\int\frac{d\varphi[n(af - bg) + (n-1)(ag - bf)\cos.\varphi]}{(a + b\cos.\varphi)^n},$$

wodurch man endlich auf die Formel $\int\frac{d\varphi(b + k\cos.\varphi)}{a + b\cos.\varphi}$ geleitet wird, deren Integrale $= \frac{k}{b}\varphi + \frac{b^2 - ak}{b}\int\frac{d\varphi}{a + b\cos.\varphi}$ nach dem Vorhergehenden bekannt ist. Übrigens aber ist klar, daß immer $k = 0$ seyn werde.

Anmerkung 2.

§. 265. Man stößt öfter auch auf Formeln, in welchen überdieß die Exponentialgröße $e^{\alpha\varphi}$, welche den Winkel φ im Exponenten bey sich führt, erscheint. Wir müssen nun die Behandlungsweise dieser For-

meln lehren, da die oben erklärte Methode der Reductionen dadurch erst in ihr volles Licht tritt. Denn durch jene Reduction kömmt man hier auf eine Formel, die der gegebenen ähnlich ist, woraus dann das Integral selbst bestimmt werden kann. Zu diesem Zwecke bemerke man, daß $\int e^{\alpha\varphi} d\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}$ sey.

Aufgabe 31.

§. 266. Das Integral der Differenzialformel $dy = e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^n$ zu bestimmen.

Auflösung.

Nimmt man $e^{\alpha\varphi} d\varphi$ als den Differenzialfactor, so erhält man

$$y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin.\varphi^n - \frac{n}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^{n-1} \cos.\varphi;$$

auf dieselbe Weise findet man

$$\int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^{n-1} \cos.\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin.\varphi^{n-1} \cos.\varphi$$
$$- \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \left[(n-1) \sin.\varphi^{n-2} \cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^n\right],$$

welche letzte Formel wegen $\cos.\varphi^2 = 1 - \sin.\varphi^2$ zurückgeführt wird auf

$$(n-1) \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^{n-2} - n \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^n.$$

Hieraus findet man demnach

$$\int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^n = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} \sin.\varphi^n - \frac{n}{\alpha^2} e^{\alpha\varphi} \sin.\varphi^{n-1} \cos.\varphi$$
$$+ \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^{n-2} - \frac{n^2}{\alpha^2} \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^n.$$

Verbinden wir diesen letzten Ausdruck mit dem ersten, so findet man

$$\int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^n = \frac{e^{\alpha\varphi} \sin \varphi^{n-1} (\alpha \sin.\varphi - n \cos.\varphi)}{\alpha^2 + n^2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2} \int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi^{n-2}.$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ ergibt sich demnach das Integrale von selbst. Es ist nämlich

$$\int e^{\alpha\varphi} d\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} - \frac{1}{\alpha} \text{ und}$$

$$\int e^{\alpha\varphi} d\varphi \sin.\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi} (\alpha \sin.\varphi - \cos.\varphi)}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\alpha^2 + 1};$$

und auf diese Ausdrücke werden alle folgenden, wo n eine ganze um eine Einheit wachsende Zahl bezeichnet, zurückgeführt.

Zusatz 1.

§. 267. So erhalten wir für $n=2$ folgendes Integrale:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^2 = \frac{e^{\alpha\varphi}\sin.\varphi\,(\alpha\sin.\varphi - 2\cos.\varphi)}{\alpha^2+4} + \frac{1\,.\,2}{\alpha(\alpha^2+4)}\,e^{\alpha\varphi} - \frac{1\,.\,2}{\alpha(\alpha^2+4)}.$$

Für $n=3$ aber

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^3 = \frac{e^{\alpha\varphi}\sin.\varphi^2\,(\alpha\sin.\varphi - 3\cos.\varphi)}{\alpha^2+9} + \frac{2\,.\,3\,.\,e^{\alpha\varphi}\,(\alpha\sin.\varphi - \cos.\varphi)}{(\alpha^2+1)\,(\alpha^2+9)} + \frac{2\,.\,3}{(\alpha^2+1)\,(\alpha^2+9)}.$$

Hier sind die Integralien so bestimmt, daß sie für $\varphi=0$ verschwinden.

Zusatz 2.

§. 268. Setzt man aber bey den so bestimmten Integralien $\alpha\varphi = -\infty$, damit $e^{\alpha\varphi}$ verschwinde, so erhält man allgemein

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^n = \frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^{n-2};$$

und hieraus erhält man für $\alpha\varphi = -\infty$:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi = \frac{-1}{\alpha}; \qquad \int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi = \frac{1}{\alpha^2+1};$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^2 = \frac{-1\,.\,2}{\alpha(\alpha^2+4)}; \qquad \int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^3 = \frac{1\,.\,2\,.\,3}{(\alpha^2+1)\,(\alpha^2+9)};$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^4 = \frac{-1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{\alpha(\alpha^2+4)(\alpha^2+16)}; \qquad \int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\sin.\varphi^5 = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)(\alpha^2+25)}$$

Zusatz 3.

§. 269. Ist demnach folgende unendliche Reihe

$$s = 1 + \frac{1\,.\,2}{\alpha^2+4} + \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{(\alpha^2+4)\,(\alpha^2+16)} + \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{(\alpha^2+4)\,(\alpha^2+16)\,(\alpha^2+36)} + \text{etc.}$$

gegeben, so erhält man

$$s = -\alpha\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,(1 + \sin.\varphi^2 + \sin.\varphi^4 + \sin.\varphi^6 + \text{etc.})$$ oder

$$s = -\alpha\int\frac{e^{\alpha\varphi}\,d\varphi}{\cos.\varphi^2},$$ wenn man nach der Integration $\alpha\varphi = -\infty$ setzt.

Aufgabe 32.

§. 270. Die Differenzialformel $e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,\cos.\varphi^n$ zu integriren.

Auflösung.

Schlägt man hier denselben Weg ein, wie vorhin, so erhält man

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^n = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha\varphi} \cos.\varphi^n + \frac{n}{\alpha}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \sin.\varphi \cos.\varphi^{n-1}.$$

Weil aber

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \sin.\varphi \cos.\varphi^{n-1} = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha\varphi} \sin.\varphi \cos.\varphi^{n-1}$$

$$- \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, (\cos.\varphi^n - (n-1) \cos.\varphi^{n-2} \sin.\varphi^2),$$

so wird, weil der letzte Ausdruck übergeht in

$$-(n-1)\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^{n-2} + n\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^n,$$

folgende Gleichung:

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^n = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha\varphi} \cos.\varphi^n + \frac{n}{\alpha^2}\, e^{\alpha\varphi} \sin.\varphi \cos.\varphi^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{\alpha^2}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^{n-2} - \frac{n^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^n,$$

und hieraus folgern wir

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^n = \frac{e^{\alpha\varphi} \cos.\varphi^{n-1} (\alpha \cos.\varphi + n \sin.\varphi)}{\alpha^2 + n^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi^{n-2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende ganz einfache Fälle:

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha\varphi} + C;$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi} (\alpha \cos.\varphi + \sin.\varphi)}{\alpha^2 + 1} + C;$$

worauf alle folgenden, wenn n eine ganze positive Zahl ist, zurückgeleitet werden können.

Anmerkung.

§. 271. Nachdem nun die einfachsten Fälle angegeben sind, so kann man das Integrale der vorgelegten Formeln, ja selbst das des noch allgemeineren Ausdruckes $e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ auf einem anderen Wege bestimmen; denn da das Product $\sin.\varphi^m \cos.\varphi^n$ sich in ein Aggregat mehrerer Sinusse oder Cosinusse, wo jedes Glied die Form $M \sin.\lambda\varphi$ oder $M \cos.\lambda\varphi$ hat, auflösen läßt, so wird die Integration auf eine der beyden Formen $e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \sin.\lambda\varphi$ oder $e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos.\lambda\varphi$ zurückgeführt. Setzen wir also $\lambda\varphi = \omega$, damit wir

$$e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, \sin.\lambda\varphi = \frac{1}{\lambda}\, e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega\, \sin.\omega \quad \text{und}$$

$$e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, \cos.\lambda\varphi = \frac{1}{\lambda}\, e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega\, \cos.\omega$$

erhalten, wovon die Integralien mit Hülfe der Bekannten bestimmt werden, wie folgt:

$$\int e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega\, \sin.\omega = \frac{\lambda e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, (\alpha \sin.\omega - \lambda \cos.\omega)}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda e^{\alpha\varphi}\, (\alpha \sin.\lambda\varphi - \lambda \cos.\lambda\varphi)}{\alpha^2 + \lambda^2},$$

$$\int e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega\, \cos.\omega = \frac{\lambda e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, (\alpha \cos.\omega + \lambda \sin.\omega)}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

$$= \frac{\lambda e^{\alpha\varphi}\, (\alpha \cos.\lambda\varphi + \lambda \sin.\lambda\varphi)}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

Hieraus erhalten wir endlich

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, \sin.\lambda\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}\, (\alpha \sin.\lambda\varphi - \lambda \cos.\lambda\varphi)}{\alpha^2 + \lambda^2} \quad \text{und}$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, \cos.\lambda\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}\, (\alpha \cos.\lambda\varphi + \lambda \sin.\lambda\varphi)}{\alpha^2 + \lambda^2}.$$

Hätten wir gleich allgemein statt $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ geschrieben $\sin.\lambda\varphi$ und $\cos.\lambda\varphi$, so wäre diese Reduction nicht nöthig gewesen; allein weil man hier auf keine Schwierigkeit stößt, so mußten wir die Kürze berücksichtigen.

Wir werden also hier vorzüglich untersuchen, wie die Coefficienten in jedem Falle aus denen des vorhergehenden Falles bestimmt werden können. Diesen Zweck können wir auf folgende Weise erreichen. Da

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu}} = A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + \text{etc.},$$

so setze man

$$\frac{1}{(1+n\cos.\varphi)^{\mu+1}} = A' + B'\cos.\varphi + C'\cos.2\varphi + D'\cos.3\varphi + \text{etc.};$$

wird diese Reihe mit $1 + n\cos.\varphi$ multiplicirt, so muß sie in die obige übergehen. Es ist aber das Product

$$\begin{array}{llll} A' & + B'\cos.\varphi & + C'\cos.2\varphi & + D'\cos.3\varphi + \text{etc.} \\ & + A'n & + \tfrac{1}{2}B'n & + \tfrac{1}{2}C'n \\ + \tfrac{1}{2}B'n & + \tfrac{1}{2}C'n & + \tfrac{1}{2}D'n & + \tfrac{1}{2}E'n, \end{array}$$

woraus wir folgern

$$B' = \frac{2(A-A')}{n}; \qquad C' = \frac{2(B-B') - 2A'n}{n};$$

$$D' = \frac{2(C-C') - B'n}{n}; \quad E' = \frac{2(D-D') - C'n}{n}; \quad \text{etc.}$$

wäre also der Coefficient A' bekannt, so würden wir auch die übrigen B', C', D', ... kennen. Wir wollen also untersuchen, wie A' aus A bestimmt werden könne. Da

$$A = 1 + \frac{\mu(\mu+1)}{2\,.\,2}n^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4}n^4 + \text{etc.},$$

$$A' = 1 + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2\,.\,2}n^2 + \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4}n^4 + \text{etc.}$$

ist, so behandle man n wie eine Veränderliche, und differenzire die erste mit n^{μ} multiplicirte Reihe, so erhält man

$$\frac{d\,.\,An^{\mu}}{dn} = \mu n^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2\,.\,2}n^{\mu+1} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4}n^{\mu+3} + \text{etc.},$$

welche Reihe offenbar $= \mu n^{\mu-1}A'$, deßhalb wird A' durch A so bestimmt, daß

$$A' = \frac{d\,.\,An^{\mu}}{d\,.\,n^{\mu}} = A + \frac{n\,dA}{\mu\,dn}.$$

Da wir also für $\mu = 1$ gefunden haben

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}, \text{ so ist wegen } \frac{dA}{dn} = \frac{n}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A' = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{n^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}};$$

dieß ist also der Werth von A für $\mu = 2$, und demnach wird wegen $\frac{dA}{dn} = \frac{3n}{(1-n^2)^{\frac{5}{2}}}$ für $\mu = 3$

$$A = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3n^2}{3(1-n^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{2}n^2}{(1-n^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Gehen wir auf diese Art weiter, so finden wir

$$\text{für } \mu = 1: \quad A = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}};$$

$$\text{»} \quad \mu = 2: \quad A = \frac{1}{(1-n^2)\sqrt{1-n^2}};$$

$$\text{»} \quad \mu = 3: \quad A = \frac{1 + \frac{1}{2}n^2}{(1-n^2)^2\sqrt{1-n^2}};$$

$$\text{»} \quad \mu = 4: \quad A = \frac{1 + \frac{3}{2}n^2}{(1-n^2)^3\sqrt{1-n^2}};$$

$$\text{»} \quad \mu = 5: \quad A = \frac{1 + 3n^2 + \frac{3}{8}n^4}{(1-n^2)^4\sqrt{1-n^2}}.$$

Zusatz 1.

§. 287. Auf dieselbe Weise werden auch die übrigen Coefficienten B', C', D', ꝛc. aus den ihnen entsprechenden B, C, D, ꝛc. bestimmt; und alle jene Relationen werden unter einander ähnlich seyn, nämlich so wie

$$A' = \frac{d \,.\, A n^\mu}{d \,.\, n^\mu} = A + \frac{n\,dA}{\mu\,dn}, \text{ eben so wird auch}$$

$$B' = \frac{d \,.\, B n^\mu}{d \,.\, n^\mu} = B + \frac{n\,dB}{\mu\,dn},$$

$$C' = \frac{d \,.\, C n^\mu}{d \,.\, n^\mu} = C + \frac{n\,dC}{\mu\,dn}.$$

. . . .

Zusatz 2.

§. 288. Früher aber fanden wir $B' = \frac{2(A - A')}{n}$, daher wird

$$B' = \frac{-2\,dA}{\mu\,dn} = B + \frac{n\,dB}{\mu\,dn}, \text{ und demnach}$$

$$\mu B\,dn + n\,dB + 2\,dA = 0.$$

Multiplicirt man durch $n^{\mu-1}$, so wird

$$d\,.\,Bn^{\mu} + 2n^{\mu-1}\,dA = 0,$$

also durch Integration

$$Bn^{\mu} = -2\int n^{\mu-1}\,dA = -2n^{\mu-1}A + 2(\mu-1)\int A\,n^{\mu-2}\,dn,$$

und daher $B = \frac{-2A}{n} + \frac{2(\mu-1)}{n^{\mu}}\int A\,n^{\mu-2}\,dn.$

Früher aber fanden wir

$$B = -2An - \frac{2(\mu-2)}{n}\int A\,n\,dn.$$

Zusatz 3.

§. 289. Setzen wir diese Werthe einander gleich, so erhalten wir eine Gleichung zwischen A und n, aus welcher A durch n ausgedrückt werden kann, denn es wird

$$n^{-\mu}\int n^{\mu-1}\,dA = An + \frac{(\mu-2)}{n}\int A\,n\,dn,$$

woraus nach zweymahliger Differenziation

$$(1-n^2)\,d^2A + \frac{dn\,dA}{n} - 2(\mu+1)\,n\,dn\,dA - \mu(\mu+1)\,A\,dn^2 = 0$$

hervorgeht.

Anmerkung 1.

§. 290. Vergleichen wir diese Werthe von A mit den obigen, wo μ eine ganze negative Zahl war, so finden wir folgende schöne Übereinstimmung.

Für die obigen Werthe:	Für gegenwärtige Formeln:
für $\nu = 0$: $A = 1$	für $\mu = 1$: $A = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$
» $\nu = 1$: $A = 1$	» $\mu = 2$: $A = \frac{1}{(1-n^2)\sqrt{1-n^2}}$
» $\nu = 2$: $A = 1 + \frac{1}{2}n^2$	» $\mu = 3$: $A = \frac{1+\frac{1}{2}n^2}{(1-n^2)^2\sqrt{1-n^2}}$
» $\nu = 3$: $A = 1 + \frac{3}{2}n^2$	» $\mu = 4$: $A = \frac{1+\frac{3}{2}n^2}{(1-n^2)^3\sqrt{1-n^2}}$
» $\nu = 4$: $A = 1 + 3n^2 + \frac{3}{8}n^4$	» $\mu = 5$: $A = \frac{1+3n^2+\frac{3}{8}n^4}{(1-n^2)^4\sqrt{1-n^2}}$

2c.;

hieraus schließen wir, daß, wenn

$$(1+n\cos.\varphi)^{\nu} = A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + \text{ꝛc.},$$

$$(1+n\cos.\varphi)^{-\nu-1} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi + \mathfrak{C}\cos.2\varphi + \text{ꝛc.},$$

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{(1-n^2)^{\nu}\sqrt{1-n^2}} \text{ sey.}$$

Da nun für die Fälle, in welchen ν eine ganze positive Zahl ist, der Werth von A leicht bestimmt werden kann, so können wir auch für jene Fälle, in welchen ν negativ ist, diesen Werth ohne Mühe angeben.

Anmerkung 2.

§. 291. Weil nun für $\mu = 1$ die Werthe der einzelnen Größen A, B, C u. s. w. gefunden sind, so ist, wenn man Kürze halber

$$\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n} = m \text{ setzt:}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}};\ B = \frac{2m}{\sqrt{1-n^2}};\ C = \frac{2m^2}{\sqrt{1-n^2}};\ D = \frac{2m^3}{\sqrt{1-n^2}};$$

und allgemein für jedes Glied $N = \frac{2m^{\lambda}}{\sqrt{1-n^2}}$.

Bezeichnen wir dasselbe Glied für den Fall, daß $\mu = 2$ ist, durch N', so ist $N' = \frac{d.Nn}{d.n}$. Nun ist aber

$$\frac{d.Nn}{dn} = \frac{2m^{\lambda}}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\lambda n m^{\lambda-1}\,dm}{dn\sqrt{1-n^2}}, \text{ mithin}$$

$$\frac{dm}{dn} = \frac{m}{n\sqrt{1-n^2}}, \text{ und hieraus folgern wir}$$

$$N' = \frac{2m^{\lambda}}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\lambda m^{\lambda}}{1-n^2} = \frac{2m^{\lambda}(1+\lambda\sqrt{1-n^2})}{(1-n^2)\sqrt{1-n^2}}.$$

Setzen wir demnach

$$\frac{1}{(1+n\cos.\varphi)^2} = A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi + \text{ꝛc.},$$

so erhält man

$$A = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}};\quad B = \frac{2m(1+\sqrt{1-n^2})}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}};\quad C = \frac{2m^2(1+2\sqrt{1-n^2})}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$D = \frac{2m^3(1+3\sqrt{1-n^2})}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}};\ \text{ꝛc.}$$

Bezeichnet aber der Exponent μ eine gebrochene Zahl, so scheinen die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. nicht anders als durch die oben entwickelten Reihen bestimmt werden zu können. Übrigens läßt sich der erste Coefficient A auf eine eigenthümliche Weise näherungsweise bestimmen, wie wir in der nächsten Aufgabe zeigen werden.

Aufgabe 35.

§. 292. **Für die Entwicklung der Formel $(1+n\cos.\varphi)^\nu$ in eine Reihe von der Gestalt**

$$A + B\cos.\varphi + C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi + E\cos.4\varphi + \text{ꝛc.}$$

den absoluten Werth von A so nahe als möglich zu bestimmen.

Auflösung.

Da nothwendig $n<1$ ist, so wird zwar die oben für A gefundene Reihe convergiren, sobald aber n nicht viel von der Einheit verschieden ist, muß man zu viele Glieder wirklich entwickeln, ehe man den Werth von A ein wenig genau bekömmt, besonders wenn ν eine etwas große positive oder negative Zahl ist. Weil jedoch, wenn man die Entwicklung von

$$(1+n\cos.\varphi)^{-\nu-1} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi + \mathfrak{C}\cos.2\varphi + \mathfrak{D}\cos.3\varphi + \text{ꝛc.}$$

setzt, A von $\mathfrak{A}$ abhängt, so daß $A = (1-n^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathfrak{A}$ ist, so wird man zur Bestimmung von A zwey Reihen haben:

$$A = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot 2}n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^4 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^6 + \text{ꝛc.}$$

und

$$A = (1-n^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\Big(1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2\cdot 2}n^2 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^4 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^6\Big)$$

wo man sich in jedem gegebenen Falle jener bedienen wird, die mehr convergirt. Weil aber dann die übrigen Coefficienten B, C, D, E, ꝛc. convergiren müssen, so steht uns noch ein anderer Weg zur näherungsweisen Bestimmung von A offen. Denn da diese Coefficienten wechselweise durch gerade und ungerade Potenzen von n bestimmt sind, so wird, was auch immer α für einen Winkel bedeuten mag:

$$(1 + n \cos.\alpha)^\nu = A + B\cos.\alpha + C\cos.2\alpha + D\cos.3\alpha + E\cos.4\alpha + \text{etc.}$$

und

$$(1 - n \cos.\alpha)^\nu = A - B\cos.\alpha + C\cos.2\alpha - D\cos.3\alpha + E\cos.4\alpha - \text{etc.}$$

Addirt man diese Ausdrücke, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(1 + n\cos.\alpha)^\nu + \tfrac{1}{2}(1 - n\cos.\alpha)^\nu = A + C\cos.2\alpha + E\cos.4\alpha + G\cos.6\alpha + \text{etc.},$$

wo, wenn für α, $90 - \alpha$ geschrieben wird:

$$\tfrac{1}{2}(1 + n\sin.\alpha)^\nu + \tfrac{1}{2}(1 - n\sin.\alpha)^\nu = A - C\cos.2\alpha + E\cos.4\alpha - G\cos.6\alpha + \text{etc.}$$

ist, und daher wird bey der Addition beyder Gleichungen die Hälfte beyder Glieder aufgehoben.

Wir wollen mehrere solche Ausdrücke bilden, und Kürze halber

$$\tfrac{1}{4}(1 + n\cos.\alpha)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 - n\cos.\alpha)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 + n\sin.\alpha)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 - n\sin.\alpha)^\nu = \mathfrak{A},$$

$$\tfrac{1}{4}(1 + n\cos.\beta)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 - n\cos.\beta)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 + n\sin.\beta)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 - n\sin.\beta)^\nu = \mathfrak{B},$$

$$\tfrac{1}{4}(1 + n\cos.\gamma)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 - n\cos.\gamma)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 + n\sin.\gamma)^\nu + \tfrac{1}{4}(1 - n\sin.\gamma)^\nu = \mathfrak{C}$$

etc.

setzen; die Coefficienten B, C, D, ... aber wollen wir durch die Symbole (1), (2), (3), (4), etc. bezeichnen, um auf diese Weise die vom Anfange der Reihe nach so weit abstehenden Glieder bequemer darstellen zu können.

Wir erhalten also

$$\mathfrak{A} = A + (4)\cos.4\alpha + (8)\cos.8\alpha + (12)\cos.12\alpha + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = A + (4)\cos.4\beta + (8)\cos.8\beta + (12)\cos.12\beta + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = A + (4)\cos.4\gamma + (8)\cos.8\gamma + (12)\cos.12\gamma + \text{etc.}$$

etc.,

woraus wir folgende Annäherungen ableiten:

I. Setzen wir $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{8}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{A} = A - (8) + (16) - (24) + \text{etc.}, \quad \text{daher}$$
$$A = \mathfrak{A} + (8) - (16) + (24) - \text{etc.}$$

gegebenen Ausdruck in $y = \int \frac{X\,dx\,\sqrt[2\lambda]{(x-b)^{\mu-\nu}}}{\sqrt[2\lambda]{(a-x)^{\mu}\,(x-b)^{\mu}}}$, wo beyde Facto
denselben Exponenten haben. Setzen wir nun wie vorhin

$$x = \tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}(a-b)\cos.\varphi,$$

so erhalten wir

$$y = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{\frac{2\lambda-\mu-\nu}{2\lambda}} \int X\,d\varphi\,\sin.\varphi^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda}}\,(1-\cos.\varphi)^{\frac{\mu-\nu}{2\lambda}},$$

wobey man φ ohne Ende fortwachsend denken, und die Integrat
durch Intervalle ausführen kann. Nach diesen Bemerkungen wird di
Näherungsmethode kaum eine fernere Schwierigkeit darbiethen.

$(1 + nf)^\nu$ erscheint, wobey f alle jene Sinusse und Cosinusse umfäßt, so findet man für B:

$$2\left(\frac{\nu+2}{n}\right)\int n\,dn\,(1+nf)^\nu - 2n\,(1+nf)^\nu = \frac{2-2(1-\nu nf)(1+nf)^\nu}{(\nu+1)\,n f^2}.$$

Zusatz 2.

§. 294. Wie man aus den bekannten Coefficienten A, B alle folgenden ableiten könne, haben wir schon oben gezeigt. Sind aber diese gefunden, so ist die Integration der Formel $d\varphi\,(1 + n\cos.\varphi)^\nu$ für sich klar.

Aufgabe 36.

§. 295. Das Integrale der Formel $d\varphi\,l.(1 + n\cos.\varphi)$ durch eine nach den Sinussen der Winkel φ, 2φ, 3φ, ꝛc. fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Auflösung.

Weil

$$l.(1 + n\cos.\varphi) = n\cos.\varphi - \tfrac{1}{2}n^2\cos.^2\varphi + \tfrac{1}{3}n^3\cos.^3\varphi - \tfrac{1}{4}n^4\cos.^4\varphi + \text{ꝛc.},$$

so findet man, wenn diese Potenzen auf einfache Cosinusse zurückgeführt werden:

$$l.(1 + n\cos.\varphi) =$$

$$\begin{aligned}
&= n\cos.\varphi - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}n^2\cos.2\varphi + \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{4}n^3\cos.3\varphi - \tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{8}n^2\cos.4\varphi\\
&- \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}.\tfrac{3}{4}n^3 - \tfrac{1}{4}.\tfrac{4}{8}n^4 \qquad + \tfrac{1}{5}.\tfrac{5}{16}n^5\\
&- \tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{8}n^4 + \tfrac{1}{5}.\tfrac{10}{16}n^5 - \tfrac{1}{6}.\tfrac{15}{32}n^6\\
&- \tfrac{1}{6}.\tfrac{10}{32}n^6 + \tfrac{1}{7}.\tfrac{35}{64}n^7\\
&- \tfrac{1}{8}.\tfrac{35}{128}n^8.
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$l.(1 + n\cos.\varphi) = -A + B\cos.\varphi - C\cos.2\varphi + D\cos.3\varphi - \text{ꝛc.},$$

so erhalten wir

$$A = \frac{1}{2}.\frac{n^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{n^4}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{n^6}{6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{n^8}{8} + \text{ꝛc.}$$

Betrachten wir nun n als veränderlich, so wird

$$\frac{n\,dA}{dn} = \tfrac{1}{2}n^2 + \frac{1.3}{2.4}n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}n^6 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}} - 1,$$

daher $dA = \dfrac{dn}{n\sqrt{(1-n^2)}} - \dfrac{dn}{n}$;

daher erhält man durch Integration:

$$A = l \,.\, \frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n} - l n + C = l \,.\, \frac{2-2\sqrt{(1-n^2)}}{n^2};$$

denn verschwindet hier n, so wird $A = l\,.\,1 = 0$.

Dann aber wird

$$\tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} n + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{n^3}{3} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{n^5}{5} + \text{etc.},$$

daher durch Differenziation

$$\frac{n^2 dB}{2 dn} = \tfrac{1}{2} n^2 + \frac{1.3}{2.4} n^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} n^6 + \text{etc.} = \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}} - 1,$$

$$\text{also} \quad \tfrac{1}{2} dB = \frac{dn}{n^2 \sqrt{(1-n^2)}} - \frac{dn}{n^2};$$

und durch Integration

$$\tfrac{1}{2} B = -\frac{\sqrt{(1-n^2)}}{n} + \frac{1}{n} + C = \frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n},$$

wenn das Integrale so bestimmt wird, daß es für $n = 0$ verschwindet.

Wir erhalten demnach für die beyden ersten Glieder

$$A = l \,.\, \frac{2-2\sqrt{(1-n^2)}}{n^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{2-2\sqrt{(1-n^2)}}{n},$$

so daß $A = l \,.\, \frac{B}{n}$ ist. Um die übrigen Coefficienten zu finden, differenziiren wir die angenommene Gleichung

$$-\frac{n\, d\varphi \sin.\varphi}{1 + n \cos.\varphi} = - Bd\varphi \sin.\varphi + 2C\, d\varphi \sin.2\varphi - 3D\, d\varphi \sin.3\varphi + 4E\, d\varphi \sin.4\varphi - \text{etc.}$$

$$\text{oder} \quad 0 = \frac{n \sin.\varphi}{1 + n \cos.\varphi} - B \sin.\varphi + 2C \sin.2\varphi - 3D \sin.3\varphi + 4E \sin.4\varphi - \text{etc.}$$

Multipliciren wir mit $(2 + 2n \cos.\varphi)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = 2n \sin.\varphi - 2B \sin.\varphi &+ 4C \sin.2\varphi - 6D \sin.3\varphi + 8E \sin.4\varphi - \text{etc.} \\ &- Bn \quad\;\; + 2Cn \quad\;\; - 3Dn \\ + 2Cn &- 3Dn \quad\;\; + 4En \quad\;\; - 5Fn; \end{aligned}$$

hieraus folgt:

$$C = \frac{B-n}{n}; \quad D = \frac{4C - Bn}{3n}; \quad E = \frac{6D - 2Cn}{4n}; \quad F = \frac{8E - 3Dn}{5n}.$$

Da nun $B = \frac{2-2\sqrt{(1-n^2)}}{n}$, so wird

$$C = \frac{2 - n^2 - 2\sqrt{(1-n^2)}}{n^2} \quad \text{oder} \quad C = \left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^2;$$

dann aber wird

$$D = \tfrac{2}{3}\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^3; \; E = \tfrac{2}{4}\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^4; \; F = \tfrac{2}{5}\left(\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n}\right)^5; \; \text{etc.}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen $\frac{1-\sqrt{(1-n^2)}}{n} = m$, so wird

$$l.(1+n\cos.\varphi) = -l.\frac{2m}{n} + \tfrac{2}{1}m\cos.\varphi - \tfrac{2}{2}m^2\cos.2\varphi$$
$$+ \tfrac{2}{3}m^3\cos.3\varphi - \tfrac{2}{4}m^4\cos.4\varphi + \text{etc.},$$

und daher ist das gesuchte Integrale

$$\int d\varphi\, l.(1+n\cos.\varphi) =$$
$$= \text{Const.} - \varphi\, l.\frac{2m}{n} + \tfrac{2}{1}m\sin.\varphi - \tfrac{2}{4}m^2\sin.2\varphi$$
$$+ \tfrac{2}{9}m^3\sin.3\varphi - \tfrac{2}{16}m^4\sin.4\varphi + \tfrac{2}{25}m^5\sin.5\varphi - \text{etc.}$$

Zusatz.

§. 296. Für $n=1$ wird $m=1$ und

$$l.(1+\cos.\varphi) = -l\,2 + \tfrac{2}{1}\cos.\varphi - \tfrac{2}{2}\cos.2\varphi + \tfrac{2}{3}\cos.3\varphi$$
$$- \tfrac{2}{4}\cos.4\varphi + \text{etc.},$$

$$l.(1-\cos.\varphi) = -l\,2 - \tfrac{2}{1}\cos.\varphi - \tfrac{2}{2}\cos.2\varphi - \tfrac{2}{3}\cos.3\varphi$$
$$- \tfrac{2}{4}\cos.4\varphi - \text{etc.}$$

Da nun $1+\cos.\varphi = 2\cos.^2\frac{\varphi}{2}$ und $1-\cos.\varphi = 2\sin.^2\frac{\varphi}{2}$, so wird

$$l.\cos.\frac{\varphi}{2} = -l\,2 + \cos.\varphi - \tfrac{1}{2}\cos.2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos.3\varphi - \tfrac{1}{4}\cos.4\varphi + \text{etc.}$$

und

$$l.\sin.\frac{\varphi}{2} = -l\,2 - \cos.\varphi - \tfrac{1}{2}\cos.2\varphi - \tfrac{1}{3}\cos.3\varphi - \tfrac{1}{4}\cos.4\varphi - \text{etc.},$$

also

$$l.\tang.\frac{\varphi}{2} = -2\cos.\varphi - \tfrac{2}{3}\cos.3\varphi - \tfrac{2}{5}\cos.5\varphi - \tfrac{2}{7}\cos.7\varphi - \text{etc.}$$

Kapitel VII.

Allgemeine Methode, was immer für Integralien näherungsweise zu bestimmen.

Aufgabe 37.

§. 297. Den Werth der Integralformel $y = \int X dx$ näherungsweise anzugeben.

Auflösung.

Da jede Integralformel an und für sich unbestimmt ist, so bestimmt man sie immer so, daß für irgend einen bestimmten Werth für x, z. B. für $x = a$, das Integrale selbst, nämlich $y = \int X dx$, einen gegebenen Werth, z. B. b, erhält. Hat man die Integration auf diese Weise ausgeführt, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung des Werthes, welchen das Integrale y erhält, wenn x irgend einen andern, von a verschiedenen Werth annimmt. Legen wir also dem x einen nur wenig von a abweichenden Werth bey, setzen wir nämlich $x = a + \alpha$, wo α nur eine sehr kleine Größe bedeutet, so können wir die Function X gleichsam als constant betrachten, weil sie sich nur sehr wenig ändert, wir mögen für x den Werth a oder $a + \alpha$ schreiben, es wird demnach $Xx + \text{Const.} = y$ das Integrale der Differenzialformel $X dx$ seyn; weil aber für $x = a$, $y = b$ werden muß, und der Werth von X gleichsam ungeändert bleibt, so wird $Xa + \text{Const.} = b$, und daher $\text{Const.} = b - Xa$, woraus wir $y = b + X(x - a)$ folgern. Erhält nun x den Werth $a + \alpha$, so erhalten wir den entsprechenden Werth von y, welchen wir $= b + \beta$ setzen, und nun können wir auf ähnliche Art hieraus y bestimmen, wenn x einen andern Werth erhält, welcher $a + \alpha$ nur wenig übertrifft. Setzen wir also $a + \alpha$ statt x, so kann der für X sich ergebende Werth wieder als constant betrachtet werden, und es wird dann $y = b + \beta + X(x - a - \alpha)$. Auf diese Art können wir nach Belieben fortfahren. Zur größeren Deutlichkeit können wir die Rechnung so darstellen:

für $x = a$ werde $X = A$ und $y = b$,
» $x = a'$ » $X = A'$ » $y = b' = b + A(a' - a)$,
» $x = a''$ » $X = A''$ » $y = b'' = b' + A'(a'' - a')$,
» $x = a'''$ » $X = A'''$ » $y = b''' = b'' + A''(a''' - a'')$

u. s. w.

wobey wir annehmen, daß die Werthe a, a', a'', ꝛc. nur nach sehr kleinen Differenzen fortschreiten. Es wird also $b' = b + A(a' - a)$ der Werth seyn, in welchen die gefundene Formel $y = b + X(x - a)$ übergeht, denn es wird $X = A$, weil $x = a$ gesetzt wird; dann aber erhält x den Werth a', welchem $y = b'$ entspricht. Auf dieselbe Art wird $b'' = b' + A'(a'' - a')$, dann $b''' = b'' + A''(a''' - a'')$ u. s. w., wie wir oben angenommen haben. Setzen wir also die vorhergehenden Werthe in den folgenden Ausdrücken, so ergibt sich:

$$b' = b + A(a' - a),$$
$$b'' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a'),$$
$$b''' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + A''(a''' - a''),$$
$$b'''' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + A''(a''' - a'') + A'''(a'''' - a''')$$

u. s. w.

Es mag daher x von a noch so sehr verschieden seyn, so werden sich die wachsenden Werthe a', a'', a''', ꝛc. dem x immer nähern, und das letzte Aggregat gibt den Werth von y selbst.

Zusatz 1.

§. 298. Ist die Zunahme von x unveränderlich, und $= \alpha$, so daß

$$a' = a + \alpha, \quad a'' = a + 2\alpha, \quad a''' = a + 3\alpha, \text{ u. s. w.},$$

und geht für diese Werthe von x die Function X über in A', A'', A''' ꝛc., so wird, wenn wir den letzten Werth in jener Reihe durch $a + n\alpha = x$, und in dieser durch X selbst bezeichnen:

$$y = b + \alpha(A + A' + A'' + A''' + \ldots + X).$$

Zusatz 2.

§. 299. Man erhält demnach den Werth des Integrals y durch die Summation der Reihe A, A', A'', ... X, deren Glieder aus der Function X erhalten werden, wenn man daselbst statt x nach und nach a, $a + \alpha$, $a + 2\alpha$, ... $a + n\alpha$ schreibt. Denn addirt man zur Summe jener durch die Differenz α multiplicirten Reihe die Größe b, so erhält man den Werth von y, welcher dem $x = a + n\alpha$ entspricht.

Zusatz 3.

§. 300. Je kleiner die Differenzen, um welche x wächst, angenommen werden, desto genauer erhält man auf diese Art den Werth

von y, wenn zugleich die Glieder der Reihe A, A′, A″, u. s. w. nur nach sehr kleinen Differenzen fortschreiten; denn ist dieß der Fall nicht, so biethet jene Bestimmung ein zu unsicheres Resultat dar.

Zusatz 4.

§. 301. Nach der Theorie der Reihen erklärt sich diese Annäherungsmethode auf folgende Art.

Aus den Zeigern a, a′, a″, a‴ .... x bilde man die Reihe

$$A, A', A'', A''' \ldots . X,$$

deren allgemeines Glied X durch die Differenzialformel $dy = X dx$ gegeben ist. Dann sey in dieser Reihe das vorletzte Glied $'X$, welches dem Zeiger $'x$ entspricht, und hieraus bilde man die neue Reihe:

$$A(a'-a),\ A'(a''-a'),\ A''(a'''-a'') \ldots . \ 'X(x-'x).$$

Wird die Summe dieser Reihe gleich S gesetzt, so erhält man näherungsweise das Integrale $y = \int X dx = b + S$.

Anmerkung 1.

§. 302. Man erklärt auf diese Art die Integration als eine Summation aller Werthe der Differenzialformel $X dx$, wenn die Veränderliche x nach und nach alle Werthe von a angefangen bis x annimmt; welche Werthe nach der Differenz dx fortgehen, wobey aber diese Differenz unendlich klein angenommen werden müsse. Diese Erklärungsweise der Integration ist demnach jener ähnlich, nach welcher in der Geometrie Linien als Aggregate von unendlich vielen Puncten gedacht werden; so wie nun diese Idee, richtig aufgefaßt, nichts Anstößiges hat, eben so kann man jene Erklärungsart der Integration zulassen, wenn man nur zur Beseitigung aller Irrthümer dieselbe aus dem wahren hier angeführten Gesichtspuncte betrachtet. Aus dem Gesagten erhellt auch, daß man die Integration durch Summirung zwar näherungsweise ausführen könne, daß aber das Resultat nur dann die erforderliche Genauigkeit haben werde, wenn die Differenzen unendlich klein, d. i. als verschwindend betrachtet werden. Aus diesem Grunde nennt man die Integration auch gewöhnlich Summation, und bezeichnet das Integrale durch $\int$, wobey es auch nach der vorausgeschickten Erklärung sein Bewenden haben kann.

Anmerkung 2.

§. 303. Wenn für die einzelnen Intervalle, welche wir zwischen a und x festgesetzt haben, die Größen A, A′, A″, rc. wirklich con-

stant wären, so würden wir das Integrale $\int X\,dx$ genau erhalten. In wie ferne also für jene einzelne Intervalle die genannten Größen nicht constant sind, ist das Resultat fehlerhaft. Nun ist zwar für das erste Intervall, in welchem die Veränderliche x von a bis a′ fortschreitet, A der Werth von X, welcher dem a entspricht, dem nächsten Werthe a′ aber entspricht A′; so lange also A′ nicht $= A$ ist, schleicht sich ein Fehler ein: da nun im Anfange jenes Intervalles $X = A$ ist, am Ende aber $X = A'$, so müßte man lieber irgend ein Mittel zwischen A und A′ annehmen, wie wir es auch später thun werden, wenn wir von der Correction dieser Methode sprechen. Übrigens wird es gut seyn, zu bemerken, daß es gleichviel sey, ob man den Anfangswerth oder den Endwerth des Intervalls nimmt. Denn man sieht zugleich, daß, wenn man im ersten Falle zu viel erhält, im andern gewöhnlich zu wenig erhalten werde. Man kann demnach hieraus zwey Ausdrücke ableiten, wovon der eine den Werth von y zu groß, und der andere zu klein angibt, so daß beyde gleichsam die Gränzen von y bilden. Nach unserer Bezeichnung im §. 301 liegt demnach der Werth von $y = -\int X\,dx$ zwischen den beyden Gränzen

$$b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + A''(a''' - a'') + \ldots + {}'X(x - {}'x)$$

und

$$b + A'(a' - a) + A''(a'' - a') + A'''(a''' - a'') + \ldots + X(x - {}'x).$$

Sind diese bekannt, so läßt sich dann das Resultat noch genauer bestimmen.

Anmerkung. 3.

§. 304. Wir haben schon oben bemerkt, daß jene Intervalle, durch welche x nach und nach fortschreitet, so klein angenommen werden müssen, daß die entsprechenden Werthe A, A′, A″, ꝛc. nur sehr wenig von einander verschieden ausfallen; und hiernach muß man vorzüglich beurtheilen, ob es besser sey, die Differenzen $a' - a$, $a'' - a'$, $a''' - a''$, u. s. w. unter einander gleich oder ungleich anzunehmen. Denn wo der Werth von X durch die Änderung von x sich nur wenig ändert, dort können die Intervalle, durch welche x fortschreitet, ohne Bedenken größer angenommen werden; wenn aber durch eine geringe Änderung von x die Function von X eine große Variation erleidet, müssen die Intervalle möglichst klein genommen werden. Wäre z. B. $X = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, so sieht man, daß, wenn x der Einheit schon sehr

nahe kömmt, für jede noch so kleine Zunahme von x die Function X eine sehr große Änderung erleiden könne, weil dieselbe für $x = 1$ sogar unendlich groß wird. In solchen Fällen kann man sich demnach jener Annäherungsmethode nicht bedienen, wenigstens nicht für jenes Intervall, bey dessen einer Gränze X unendlich groß wird; allein diesem Übel kann man leicht abhelfen, wenn man durch eine zweckmäßige Substitution die Formel in eine andere transformirt, oder wenigstens für dieses Intervall die Integration auf einem besonderen Wege ausführt. Wäre z. B. die Formel $\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ gegeben, so läßt sich für das Intervall von $x = 1 - \omega$ bis $x = 1$ nach der angegebenen Methode das Integrale nicht finden; setzt man aber $x = 1 - z$, so wird z eine sehr kleine Größe bezeichnen, weil es zwischen 0 und ω liegt, und unsere Formel geht über in $\frac{dz(1-z)}{\sqrt{(3z - 3z^2 + z^3)}} = \frac{dz}{\sqrt{3z}}$, und dessen Integrale $\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{3}}$ für jenes Intervall den Theil des Integrals $\frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{3}}$ gibt. Diesen Kunstgriff kann man in allen ähnlichen Fällen anwenden; die oben beschriebene Methode wollen wir durch einige Beyspiele erläutern.

Beyspiel 1.

§. 305. **Das Integrale $y = \int x^n\,dx$ näherungsweise so zu bestimmen, daß es für $x = 0$ verschwindet.**

Hier ist $a = 0$ und $b = 0$, ferner $X = x^n$. Man lasse x von Null an wachsen, und zwar um die beständige Differenz α, so daß den Zeigern

$$0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha,\ 5\alpha\ \ldots\ldots\ x \text{ die Werthe}$$
$$0,\ \alpha^n,\ 2^n\alpha^n,\ 3^n\alpha^n,\ 4^n\alpha^n,\ 5^n\alpha^n\ \ldots\ldots\ x^n \text{ entsprechen.}$$

Das vorletzte Glied wird $(x-\alpha)^n$ seyn, daher sind die Gränzen des Integrals $y = \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$:

$$\alpha[0 + \alpha^n + 2^n\alpha^n + 3^n\alpha^n + \ldots\ldots + (x-\alpha)^n] \text{ und}$$
$$\alpha[\alpha^n + 2^n\alpha^n + 3^n\alpha^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^n],$$

welche Gränzen einander um so näher liegen, je kleiner das Intervall α genommen wird. Ist z. B. $\alpha = 1$, so sind jene Gränzen

$$0 + 1 + 2^n + 3^n + \ldots\ldots + (x-1)^n,$$
$$1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots\ldots + x^n;$$

für $\alpha = \frac{1}{2}$ aber erhält man die Gränzen

$\frac{1}{2^{n+1}}\left(0 + 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (2x-1)^n\right)$ und

$\frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + (2x)^n\right)$,

und allgemein erhält man für $\alpha = \frac{1}{m}$ die Gränzwerthe

$\frac{1}{m^{n+1}}\left(0 + 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (mx-1)^n\right)$,

$\frac{1}{m^{n+1}}\left(1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + (mx)^n\right)$,

deren letzterer den ersteren um $\frac{x^n}{m}$ übertrifft; hieraus erhellt, daß, wenn die Zahl m unendlich groß wird, jeder dieser beyden Gränzwerthe den wahren Werth des Integrals $y = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ darbiethe.

Zusatz 1.

§. 306. Die Summe der Reihe $1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (mx)^n$ nähert sich daher dem Werthe $\frac{1}{n+1}(mx)^{n+1}$ um so schneller, je größer n genommen wird, folglich wird für $mx = z$ die Summe der Reihe $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \ldots + z^n$ um so genauer durch $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$ ausgedrückt, je größer z genommen wird.

Zusatz 2.

§. 307. Nach dem ersten Gränzwerthe bezeichnet für $mx = z$ dieselbe Größe $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$ näherungsweise die Summe der Reihe

$$0 + 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (z-1)^n.$$

Nimmt man hier das Mittel, so erhält man mit mehr Genauigkeit

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + (z-1)^n + \tfrac{1}{2}z^n = \frac{1}{n+1} z^{n+1};$$

oder, wenn man auf beyden Seiten $\frac{1}{2}z^n$ addirt:

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + z^n = \frac{1}{n+1} z^{n+1} + \tfrac{1}{2}z^n,$$

welches Resultat am genauesten mit der wahren Summe dieser Reihe übereinstimmt.

Beyspiel 2.

§. 308. Das Integrale $y = \int \frac{dx}{x^n}$ näherungsweise so zu bestimmen, daß es für $x = 1$ verschwindet.

gegebenen Ausdruck in $y = \int \frac{X\, dx\, \sqrt[2\lambda]{(x-b)^{\mu-\nu}}}{\sqrt[2\lambda]{(a-x)^{\mu}\,(x-b)^{\mu}}}$, wo beyde Fact[illegible] denselben Exponenten haben. Setzen wir nun wie vorhin

$$x = \tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}(a-b)\cos.\varphi,$$

so erhalten wir

$$y = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{\frac{2\lambda-\mu-\nu}{2\lambda}} \int X\, d\varphi\, \sin.\varphi^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda}} \,(1-\cos.\varphi)^{\frac{\mu-\nu}{2\lambda}},$$

wobey man φ ohne Ende fortwachsend denken, und die Integra[illegible] durch Intervalle ausführen kann. Nach diesen Bemerkungen wird [illegible] Näherungsmethode kaum eine fernere Schwierigkeit darbiethen.

Zusatz 2.

§. 310. Da die erstere Reihe größer ist, als die letztere, so wird

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z-1)^n}>\frac{(m+z)^{n-1}-m^{n-1}}{(n-1)\,m^{n-1}\,(m+z)^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z)^n}<\frac{(m+z)^{n-1}-m^{n-1}}{(n-1)\,m^{n-1}\,(m+z)^{n-1}}$$

dirt man nun beym letzten Ausdrucke beyderseits $\frac{1}{m^n}$, beym ersten aber $\frac{1}{(m+z)^n}$, und nimmt das arithmetische Mittel, so erhält man genauer

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z)^n}=$$

$$=\frac{(2m+n-1)(m+z)^n-(2z+2m-n+1)\,m^n}{2(n-1)\,m^n\,(m+z)^n},$$

elcher Ausdruck für $n=1$ sich in $l.\left(1+\frac{z}{m}\right)+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(m+z)}$ rwandelt.

Zusatz 3.

§. 311. Setzen wir $z=mv$, so erhalten wir die Summe folnder Reihe näherungsweise ausgedrückt:

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{m^n(1+v)^n}=$$

$$=\frac{(2m+n-1)(1+v)^n-2m(1+v)+n-1}{2(n-1)\,m^n(1+v)^n};$$

ur für $n=1$ wird

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{m+mv}=l(1+v)+\frac{2+v}{2m(1+v)},$$

nd hieraus folgt für $v=1$ näherungsweise

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{2^n m^n}=\frac{2^n(2m+n-1)-4m+n-1}{2^{n+1}(n-1)\,m^n}$$

nd

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+2)}+\ldots+\frac{1}{2m}=l2+\frac{3}{4m}.$$

Zusatz 4.

§. 312. Hieraus fließt nun eine Regel für die näherungsweise erechnung der Logarithmen nach so großen Zahlen, während die geöhnlichen Reihen nur für die von der Einheit wenig verschiedenen Zahn gelten. Denn schreiben wir u statt $1+v$, so erhalten wir

$$l\,u = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{mu} - \frac{1+u}{2mu},$$

wodurch $l\,u$ um so genauer bestimmt wird, je größer m genommen wird.

Beyspiel 3.

§. 313. Das Integrale $y = \int \frac{c\,dx}{c^2+x^2}$ näherungsweise so zu bestimmen, daß es für $x=0$ verschwindet.

Dieses Integrale ist bekanntlich $y = \text{arc. tang.} \frac{x}{c}$, zu dessen näherungsweisen Berechnung wir $a=0$ und $b=0$ setzen. Lassen wir also x von Null angefangen um die beständige Differenz α wachsen, so erhalten wir wegen $X = \frac{c}{c^2+x^2}$ für die Zeiger

$0, \quad \alpha, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha, \ldots\ldots x$ die Werthe

$\frac{1}{c}, \quad \frac{c}{c^2+\alpha^2}, \quad \frac{c}{c^2+4\alpha^2}, \quad \frac{c}{c^2+9\alpha^2}, \ldots\ldots \frac{c}{c^2+x^2},$

wobey das vorletzte Glied $'X = \frac{c}{c^2+(x-\alpha)^2}$.

Es ist daher ein Näherungswerth unseres Integrals $y = \text{arc.tang.} \frac{x}{c}$, und zwar der größere:

$$\alpha \left(\frac{1}{c} + \frac{c}{c^2+\alpha^2} + \frac{c}{c^2+4\alpha^2} + \ldots + \frac{c}{c^2+(x-\alpha)^2}\right),$$

der andere aber, nämlich der kleinere, ist:

$$\alpha \left(\frac{c}{c^2+\alpha^2} + \frac{c}{c^2+4\alpha^2} + \frac{c}{c^2+9\alpha^2} + \ldots + \frac{c}{c^2+x^2}\right).$$

Addirt man zum ersten Ausdruck $\alpha \frac{1}{c}$, zum letzten aber $\alpha \frac{c}{c^2+x^2}$, und nimmt zwischen beyden Resultaten das arithmetische Mittel, so erhält man mit größerer Genauigkeit

$$\alpha \left(\frac{c}{c^2} + \frac{c}{c^2+\alpha^2} + \frac{c}{c^2+4\alpha^2} + \frac{c}{c^2+9\alpha^2} + \ldots + \frac{c}{c^2+x^2}\right) =$$

$$= \text{arc. tang.} \frac{x}{c} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{c}{c^2+x^2}\right) = \text{arc. tang.} \frac{x}{c} + \alpha \frac{2c^2+x^2}{2c(c^2+x^2)};$$

wir erhalten also für diesen Winkel den wahren Näherungswerth

$$\text{arc. tang.} \frac{x}{c} =$$

$$= \alpha c \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2+\alpha^2} + \frac{1}{c^2+4\alpha^2} + \ldots + \frac{1}{c^2+x^2}\right) - \alpha \frac{2c^2+x^2}{2c(c^2+x^2)},$$

welcher Ausdruck von der Wahrheit um so weniger abweicht, je kleiner

ı Bezug auf c ist. Setzen wir also c sehr groß, so können wir für ie Einheit annehmen, und wir erhalten für $x = cv$

$$\text{arc. tang. } v =$$
$$c\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{c^2+4} + \frac{1}{c^2+9} + \ldots + \frac{1}{c^2+c^2v^2}\right) - \frac{2+v^2}{2c(1+v^2)},$$

zwar um so genauer, je größer c ist.

Zusatz 1.

§. 314. Setzen wir $c=1$, in welchem Falle der Fehler sehr be- tend seyn muß, so wird

$$\text{. tang. } v = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+4} + \frac{1}{1+9} + \ldots + \frac{1}{1+v^2} - \frac{2+v^2}{2(1+v^2)};$$

$v=1$ wird arc. tang. $1 = \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, daher $\pi=3$, cher Werth von der Wahrheit nicht zu sehr abweicht. Setzen wir $=2$, so erhält man

$$\text{. tang. } v = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+4} + \frac{1}{4+9} + \ldots + \frac{1}{4+4v^2}\right) - \frac{2+v^2}{4(1+v^2)}$$

) für $v=1$ wird dann

$$\text{. tang. } 1 = \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+4}\right) - \frac{3}{8} = \frac{23}{20} - \frac{3}{8} = \frac{31}{40},$$

) demnach $\pi = \frac{31}{10} = 3{,}1$, welcher Werth schon genauer ist.

Zusatz 2.

§. 315. Sey $c=6$, so wird

$$\text{arc. tang. } v =$$
$$6\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36+1} + \frac{1}{36+4} + \ldots + \frac{1}{36+36v^2}\right) - \frac{2+v^2}{12(1+v^2)},$$

) wenn $v=\frac{1}{2}$ und $v=\frac{1}{3}$ gesetzt wird, erhält man:

$$\text{. tang. } \tfrac{1}{2} = 6\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36+1} + \frac{1}{36+4} + \frac{1}{36+9}\right) - \frac{3}{20},$$

$$\text{. tang. } \tfrac{1}{3} = 6\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36+1} + \frac{1}{36+4}\right) - \frac{19}{120}.$$

Nun ist aber arc. tang. $\frac{1}{2}$ + arc. tang. $\frac{1}{3}$ = arc. tang. $1 = \frac{\pi}{4}$,

)

$$= 12\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{37} + \frac{1}{40}\right) + \frac{2}{15} - \frac{37}{120} = \frac{1063}{1110} - \frac{7}{40} = \frac{695}{888} \text{ oder}$$

$$= \frac{695}{222} = 3{,}1306\ldots$$

Zusatz 3.

§. 316. Setzen wir aber sogleich $v=1$, so wird

$$\frac{\pi}{4}=6\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{37}+\frac{1}{40}+\frac{1}{45}+\frac{1}{52}+\frac{1}{61}+\frac{1}{72}\right)-\frac{1}{8},$$

und daher $\pi=3,13696$, welches Resultat der Wahrheit schon weit näher liegt, nämlich die Addition mehrerer auf einander folgender Glieder führt schneller zum wahren Werthe.

Aufgabe 38.

§. 317. **Die obige Methode, die Werthe der Integralien näherungsweise aufzufinden, zu verbessern, damit man sich weniger von der Wahrheit entferne.**

Auflösung.

Es sey die Integralformel $y=\int X\,dx$ vorgelegt, deren Werth $y=b$ für $x=a$ wir als bekannt annehmen; sey dieser nun durch die Bedingung der Integration selbst gegeben, oder schon durch einige Operationen daraus abgeleitet, und legen wir nun dem x selbst einen Werth bey, der den Werth a, für welchen $y=b$, nur sehr wenig übertrifft, und es gehe X in A über, wenn $x=a$ gesetzt wird. Bey der vorigen Methode haben wir angenommen, daß beständig $X=A$ bleibe, während x sehr wenig über a hinaus wächst, und daß demnach

$$\int X\,dx = A(x-a).$$

In wie ferne jedoch X nicht constant ist, kann auch nicht $\int X dx = X(x-a)$ seyn, sondern man erhält

$$\int X\,dx = X(x-a) - \int(x-a)\,dX.$$

Setzen wir also $dX = P\,dx$, so wird $\int(x-a)\,dX = \int P(x-a)\,dx$, und wenn wir nun $P = \frac{dX}{dx}$, so lange x nicht sehr von a verschieden ist, als constant betrachten, so erhalten wir

$$\int P(x-a)\,dx = \tfrac{1}{2}P(x-a)^2, \text{ und dann wird}$$

$$y=\int X\,dx = b + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2,$$

welcher Werth der Wahrheit schon viel näher kömmt, obgleich für X und P jene Werthe genommen werden, welche sie erhalten für $x=a$ oder für $x=a+\alpha$, nämlich für den größten Werth, dem sich hierbey x nach unserer Voraussetzung nähert; hieraus folgen, je nachdem wir $x=a$ oder $x=a+\alpha$ setzen, zwey Gränzwerthe, zwischen welchen der

.hre Werth liegt. Auf diese Weise können wir nun weiter fortgehen; nn ist P nicht constant, so wird

$$\int P(x-a)\,dx = \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 - \tfrac{1}{2}\int (x-a)^2\,dP,$$

d für $dP = Q\,dx$ wird

$$\int (x-a)^2\,dP = \int Q(x-a)^2\,dx = \tfrac{1}{3}Q(x-a)^3,$$

nn wir nämlich Q als constant betrachten, und so wird

$$= \int X\,dx = b + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \frac{1}{2.3}Q(x-a)^3.$$

Verfolgen wir diesen Gang weiter, und setzen

$$X = \frac{dy}{dx},\; P = \frac{dX}{dx},\; Q = \frac{dP}{dx},\; R = \frac{dQ}{dx},\; S = \frac{dR}{dx},\; \text{u. s. w.}$$

finden wir:

$$= b + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \frac{1}{1.2.3}Q(x-a)^3$$
$$- \frac{1}{2.3.4}R(x-a)^4 + \frac{1}{2.3.4.5}S(x-a)^5 - \text{ꝛc.}$$

lche Reihe sehr schnell convergirt; wenn nur x nicht viel größer ist a, selbst wenn sie ins Unendliche fortschreitet, wird sie den wahren erth von y darstellen, wenn man in den Functionen X, P, Q, ꝛc. statt x seinen Endwerth $a+\alpha$ setzt. Will man aber jene Reihe ht ins Unendliche ausdehnen, so wird es besser seyn, durch Intervalle fortzuschreiten, indem man dem x nach und nach die Werthe a, a'', a''' beylegt, und dann für jede Function X, P, Q, R, S ꝛc. entsprechende Werthe sucht, welche wir durch folgendes Schema darlen wollen:

$$\begin{array}{lllllll}
\text{für } x = a, & a', & a'', & a''', & a^{IV}, & a^{V} & \text{ꝛc.}\\
\text{werde } X = A, & A', & A'', & A''', & A^{IV}, & A^{V} & \text{ꝛc.}\\
\frac{dX}{dx} = P = B, & B', & B'', & B''', & B^{IV}, & B^{V} & \text{ꝛc.}\\
\frac{dP}{dx} = Q = C, & C', & C'', & C''', & C^{IV}, & B^{V} & \text{ꝛc.}\\
\frac{dQ}{dx} = R = D, & D', & D'', & D''', & D^{IV}, & D^{V} & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

u. s. w.

Dann aber sey

$$y = b,\; b',\; b'',\; b''',\; b^{IV},\; b^{V}\; \text{ꝛc.}$$

Nach dieser Bezeichnung erhalten wir, wie aus dem Vorhernden zu ersehen ist:

$$b' = b + A'(a'-a) - \tfrac{1}{2}B'(a'-a)^2 + \tfrac{1}{6}C'(a'-a)^3 - \tfrac{1}{24}D'(a'-a)^4 + \text{etc.}$$

$$b'' = b' + A''(a''-a') - \tfrac{1}{2}B''(a''-a')^2 + \tfrac{1}{6}C''(a''-a')^3 - \tfrac{1}{24}D''(a''-a')^4 + \text{etc.}$$

$$b''' = b'' + A'''(a'''-a'') - \tfrac{1}{2}B'''(a'''-a'')^2 + \tfrac{1}{6}C'''(a'''-a'')^3 - \tfrac{1}{24}D'''(a'''-a'')^4 + \text{etc.}$$

$$b^{IV} = b''' + A^{IV}(a^{IV}-a''') - \tfrac{1}{2}B^{IV}(a^{IV}-a''')^2 + \tfrac{1}{6}C^{IV}(a^{IV}-a''')^3 - \tfrac{1}{24}D^{IV}(a^{IV}-a''')^4 + \text{etc.}$$

u. s. w.

welche Ausdrücke man so lange fortsetzt, bis man für ein bestimmtes, vom anfänglichen Werthe a noch so verschiedenes x den Werth von y gefunden hat.

Zusatz 1.

§. 318. Diese Näherungsmethode stützt sich demnach auf den schon in der Differenzialrechnung bewiesenen Lehrsatz, daß wenn y eine Function von x bezeichnet, welche für $x = a$ in b übergeht, und man setzt $\frac{dy}{dx} = X$, $\frac{dX}{dx} = P$, $\frac{dP}{dx} = Q$, $\frac{dQ}{dx} = R$ etc.

allgemein

$$y = b + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}Q(x-a)^3 - \tfrac{1}{24}R(x-a)^4 + \tfrac{1}{120}S(x-a)^5 - \text{etc.}$$ sey.

Zusatz 2.

§. 319. Wenn man diese Reihe ins Unendliche fortsetzen wollte, so wäre es nicht nöthig, dem x einen nur wenig von a verschiedenen Werth beyzulegen. Damit jedoch die Reihe schneller convergire, ist es zweckmäßig, die Differenz zwischen a und x in Intervalle einzutheilen, und die beschriebene Rechnung für jedes einzelne Intervall durchzuführen.

Zusatz 3.

§. 320. Lassen wir nun x von a angefangen, um die beständige Differenz α wachsen, und setzen wir den Endwerth $a + n\alpha = x$, so daß für

$$\begin{array}{lllllll} x = a, & a+\alpha, & a+2\alpha, & a+3\alpha & \ldots\ldots & x \\ X = A, & A', & A'', & A''' & \ldots\ldots & X \\ \frac{dX}{dx} = P, & B, & B', & B'', & B''' \ldots\ldots & P \end{array}$$

$$\frac{dP}{dx} = Q, \quad C, \quad C', \quad C'', \quad C''' \ldots\ldots Q$$

$$\frac{dQ}{dx} = R, \quad D, \quad D', \quad D'', \quad D''' \ldots\ldots R$$

u. s. w.

und $y = b, \quad b', \quad b'', \quad b''', \quad b^{IV}, \ldots\ldots y$

wird, so erhalten wir durch Summation aller Reihen für $x = x$:

$$\begin{aligned} y = b &+ \alpha\,(A' + A'' + A''' + \ldots\ldots + X) \\ &- \tfrac{1}{2}\alpha^2\,(B' + B'' + B''' + \ldots\ldots + P) \\ &+ \tfrac{1}{6}\alpha^3\,(C' + C'' + C''' + \ldots\ldots + Q) \\ &- \tfrac{1}{24}\alpha^4\,(D' + D'' + D''' + \ldots\ldots + R) \end{aligned}$$

u. s. w.

Anmerkung 1.

§. 321. Der Beweis des im Zusatze 1. erwähnten Lehrsatzes, auf welchen sich diese Näherungsmethode stützt, geht aus der Natur der Differenzialien auf folgende Art hervor. Es sey y eine Function von x, welche sich für $x = a$ in $y = b$ verwandelt, und suchen wir den Werth von y, wenn x von a wie immer verschieden ist. Beginnen wir nun bey dem größten Werthe, welcher x selbst ist, und gehen wir durch Differenzialien zurück, so folgt aus der Natur der Differenzialien, daß

$$\begin{aligned} \text{für } x &= x - dx, & y &= y - dy + d^2y - d^3y + d^4y - \text{etc.} \\ &= x - 2dx, & &= y - 2dy + 3d^2y - 4d^3y + 5d^4x - \text{etc.} \\ &= x - 3dx, & &= y - 3dy + 6d^2y - 10d^3y + 15d^4y - \text{etc.} \\ &\ldots & &\ldots \\ &= x - ndx, & &= y - ndy + \frac{n(n+1)}{2}d^2y - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}d^3y \\ & & &\quad + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}d^4y - \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzen wir nun $x - ndx = a$, so wird $n = \frac{x-a}{dx}$, und demnach unendlich groß, dann aber muß, vermöge der Voraussetzung, $y = b$ werden, und demnach erhalten wir

$$b = y - \frac{(x-a)\,dy}{dx} + \frac{(x-a)^2d^2y}{1.2\,dx^2} - \frac{(x-a)^3d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \frac{(x-a)^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} - \text{etc.}$$

Wird endlich

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{dX}{dx} = P, \quad \frac{dP}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = R, \text{ u. s. w.}$$

gesetzt, so erhält man wie vorhin:

$$y = b + X(x-a) - \tfrac{1}{2}P(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}Q(x-a)^3 - \tfrac{1}{24}R(x-a)^4 + \text{2c.}$$

Es folgt hieraus, daß wenn x nur sehr wenig von a verschieden ist, es hinreichend sey, $y = b + (x-a)X$ zu setzen, worin das Fundament der angegebenen Näherungsmethode besteht, nämlich die Gränze, durch welche X aus dem größern Werthe von x bestimmt wird.

Anmerkung 2.

§. 322. So wie uns dieser Schluß nur auf einen der oben angegebenen Gränzwerthe führte, eben so leitet er uns auch zu den andern. So wie wir nämlich oben von x auf a zurückgegangen sind, so werden wir nun von a zu x fortschreiten.

Wenn a übergeht	so verwandelt sich b
in $a + da$	in $b + db$
» $a + 2da$	» $b + 2db + d^2b$
» $a + 3da$	» $b + 3db + 3d^2b + d^3b$
. . . .	. . . .
» $a + nda$	» $b + ndb + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3b +$ 2c.

Nun setze man $a + nda = x$ oder $n = \frac{x-a}{da}$, und der Werth von b werde gleich y. Bezeichnet man die Werthe der obigen Functionen X, P, Q, R, 2c. für $x = a$ durch A, B, C, D, 2c., so erhält man in diesem Falle

$$A = \frac{db}{da},\quad B = \frac{d^2b}{da^2},\quad C = \frac{d^3b}{da^3}\ \text{2c.}$$

Wir haben demnach:

$$y = b + A(x-a) + \tfrac{1}{2}B(x-a)^2 + \tfrac{1}{6}C(x-a)^3 + \tfrac{1}{24}D(x-a)^4 + \text{2c.}$$

welche Reihe der obigen, ohne Rücksicht auf die Zeichen, allerdings ähnlich ist, wenn x die Größe a nur wenig übertrifft, so daß $b + A(x-a)$ den Werth von y mit hinreichender Genauigkeit bezeichnet, so erhalten wir dadurch den anderen, oben angegebenen Grenzwerth. Wenn wir nun die Distanz zwischen a und x, wie im §. 320, in gleiche, um die Differenz α von einander verschiedene Intervalle abtheilen, und in den einzelnen Reihen die vorletzten Glieder durch 'X, 'P, 'Q, 'R, 2c. bezeichnen, so haben wir für y als zweyten Gränzwerth:

$$\begin{aligned} y = b &+ \alpha\,(A + A' + A'' + \ldots + {}'X) \\ &+ \tfrac{1}{2}\alpha^2\,(B + B' + B'' + \ldots + {}'P) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6}\alpha^3 (C + C' + C'' + \ldots + {}'Q)$$
$$+ \frac{1}{24}\alpha^4 (D + D' + D'' + \ldots + {}'R)$$
u. s. w.,

so daß wir auch nach dieser verbesserten Methode zwey Gränzen erhalten, zwischen welchen der wahre Werth von y liegt. Wir werden diesen Werth genauer erhalten, wenn wir zwischen diesem Gränzwerthe das arithmetische Mittel nehmen, wir erhalten dann:

$$y = b + \alpha (A + A' + A'' + \ldots\ldots + X)$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha (A + X) + \tfrac{1}{4}\alpha^2 (B - P)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\alpha^3 (C + C' + C'' + \ldots\ldots + Q)$$
$$- \tfrac{1}{12}\alpha^3 (C + Q) + \tfrac{1}{48}\alpha^4 (D - R)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\alpha^5 (E + E' + E'' + \ldots\ldots + S)$$
$$- \tfrac{1}{240}\alpha^5 (E + S) + \tfrac{1}{1440} (F - T)$$
u. s. w.

Die obigen Näherungswerthe werden daher um Vieles genauer, wenn man nur noch das Glied $\frac{1}{4}\alpha^2 (B - P)$ hinzu addirt.

Beyspiel 1.

§. 323. **Den Logarithmus einer jeden beliebigen Zahl x näherungsweise darzustellen.**

Hier ist also $y = \int \frac{dx}{x}$, welches Integrale so genommen wird, daß es für $x = 1$ verschwindet; es wird also $a = 1$, $b = 0$ und $X = \frac{1}{x}$. Nehmen wir nun an, daß x, von 1 angefangen, um die beständige Größe α wachse, so wird, da

$$P = \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad Q = \frac{dP}{dx} = \frac{2}{x^3}; \quad R = \frac{dQ}{dx} = -\frac{6}{x^4};$$

für die Zeiger

$$x = 1, \quad 1 + \alpha, \quad 1 + 2\alpha, \quad 1 + 3\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots x$$
$$X = 1, \quad \frac{1}{1+\alpha}, \quad \frac{1}{1+2\alpha}, \quad \frac{1}{1+3\alpha}, \quad \ldots\ldots + \frac{1}{x}$$
$$P = -1, \quad \frac{-1}{(1+\alpha)^2}, \quad \frac{-1}{(1+2\alpha)^2}, \quad \frac{-1}{(1+3\alpha)^2}, \quad \ldots\ldots - \frac{1}{x^2}$$
$$Q = 2, \quad \frac{2}{(1+\alpha)^3}, \quad \frac{2}{(1+2\alpha)^3}, \quad \frac{2}{(1+3\alpha)^3}, \quad \ldots\ldots + \frac{2}{x^3}$$
$$R = -6, \quad \frac{-6}{(1+\alpha)^4}, \quad \frac{-6}{(1+2\alpha)^4}, \quad \frac{-6}{(1+3\alpha)^4}, \quad \ldots\ldots - \frac{6}{x^4}$$
u. s. w.,

und hieraus folgt:

$$lx = \alpha\left(1 + \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+2\alpha} + \frac{1}{1+3\alpha} + \dots + \frac{1}{x}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha\left(1+\frac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{4}\alpha^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}\alpha^3\left(1 + \frac{1}{(1+\alpha)^3} + \frac{1}{(1+2\alpha)^3} + \frac{1}{(1+3\alpha)^3} + \dots + \frac{1}{x^3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{6}\alpha^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right) - \tfrac{1}{8}\alpha^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)$$
$$+\tfrac{1}{5}\alpha^5\left(1 + \frac{1}{(1+\alpha)^5} + \frac{1}{(1+2\alpha)^5} + \frac{1}{(1+3\alpha)^5} + \dots + \frac{1}{x^5}\right)$$
$$- \tfrac{1}{10}\alpha^5\left(1+\frac{1}{x^5}\right) - \tfrac{1}{12}\alpha^6\left(1-\frac{1}{x^6}\right)$$

u. s. w.

Setzen wir nun $\alpha = \frac{1}{m}$

$$lx = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{mx} - \frac{x+1}{2mx} - \frac{x^2-1}{4m^2x^2}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{(m+1)^3} + \frac{1}{(m+2)^3} + \dots + \frac{1}{(mx)^3}\right) - \frac{x^3+1}{6m^3x^3} - \frac{x^4-1}{8m^4x^4}$$
$$+ \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{m^5} + \frac{1}{(m+1)^5} + \frac{1}{(m+2)^5} + \dots + \frac{1}{(mx)^5}\right) - \frac{x^5+1}{10m^5x^5} - \frac{x^6-1}{12m^6x^6}$$

u. s. w.

Zusatz.

§. 324. Setzen wir diese Reihe ins Unendliche fort, so ist die Summe der letztern Glieder

$$= -\tfrac{1}{2}l\frac{m}{m-1} - \tfrac{1}{2}l\frac{mx+1}{mx} = -\tfrac{1}{2}l\frac{mx+1}{(m-1)x},$$

die Summa der erstern aber $= \tfrac{1}{2}l\frac{m+1}{m-1}$.

Da nun

$$lx + \tfrac{1}{2}l\frac{mx+1}{(m-1)x} + \tfrac{1}{2}l\frac{m-1}{m+1} = \tfrac{1}{2}l\frac{x(mx+1)}{m+1},$$

so wird

$$l\frac{x(mx+1)}{m+1} = 2\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \dots + \frac{1}{mx}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{(m+1)^3} + \frac{1}{(m+2)^3} + \frac{1}{(m+3)^3} + \dots + \frac{1}{(mx)^3}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{5}\left(\frac{1}{(m+1)^5} + \frac{1}{(m+2)^5} + \frac{1}{(m+3)^5} + \dots + \frac{1}{(mx)^5}\right)$$

u. s. w.

welcher Ausdruck ins Unendliche fortgesetzt, den wahren Werth von $l\,\frac{x(mx+1)}{m+1}$ gibt.

Beyspiel 2.

§. 325. **Den Kreisbogen, dessen Tangente $\frac{x}{c}$ ist, auf dieselbe Weise näherungsweise darzustellen.**

Es handelt sich hier also um das Integrale $y = \int \frac{c\,dx}{c^2+x^2}$, welches für $x=0$ verschwindet; weil hier $a=0$ und $b=0$, so wird

$$X = \frac{c}{c^2+x^2},\quad P = \frac{dX}{dx} = \frac{-2cx}{(c^2+x^2)^2},\quad Q = \frac{dP}{dx} = -\frac{2c(c^2-3x^2)}{(c^2+x^2)^3},$$

$$R = \frac{dQ}{dx} = \frac{6cx(3c^2-4x^2)}{(c^2+x^2)^4},\quad S = \frac{dR}{dx} = \frac{6c(3c^4-33c^2x^2+20x^4)}{(c^2+x^2)^5},\ \text{2c.},$$

welche Ausdrücke ins Unendliche fortgesetzt

$$y = \frac{cx}{c^2+x^2} + \frac{cx^3}{(c^2+x^2)^2} - \frac{cx^3(c^2-3x^2)}{3(c^2+x^2)^3} - \frac{cx^5(3c^2-4x^2)}{4(c^2+x^2)^4}$$
$$+ \frac{cx^5(3c^4-33c^2x^2+20x^4)}{20(c^2+x^2)^5} + \ldots$$

geben. Lassen wir nun x durch die Intervalle $\alpha = 1$ fortschreiten, so wird

$$A = \frac{c}{c^2},\quad B = 0,\quad C = -\frac{2c^3}{c^6},\quad D = 0$$

$$A' = \frac{c}{c^2+1},\quad B' = -\frac{2c}{(c^2+1)^2},\quad C' = -\frac{2c(c^2-3)}{(c^2+1)^3},\quad D' = \frac{6c(3c^2-4)}{(c^2+1)^4}$$

$$A'' = \frac{c}{c^2+4},\quad B'' = -\frac{4c}{(c^2+4)^2},\quad C'' = -\frac{2c(c^2-12)}{(c^2+4)^3},\quad D'' = \frac{12c(3c^2-16)}{(c^2+4)^4}$$

$$A''' = \frac{c}{c^2+9},\quad B''' = -\frac{6c}{(c^2+9)^2},\quad C''' = -\frac{2c(c^2-27)}{(c^2+9)^3},\quad D''' = \frac{18c(3c^2-36)}{(c^2+9)^4}$$

$$\cdots\cdots\quad \cdots\cdots\quad \cdots\cdots\quad \cdots\cdots$$

$$X = \frac{c}{c^2+x^2},\quad P = -\frac{2cx}{(c^2+x^2)^2},\quad Q = -\frac{2c(c^2-3x^2)}{(c^2+x^2)^3},\quad R = \frac{6cx(3c^2-4x^2)}{(c^2+x^2)^4}$$

und hieraus folgt:

$$y = c\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{c^2+4} + \frac{1}{c^2+9} + \ldots + \frac{1}{c^2+x^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2c} - \frac{c}{2(c^2+x^2)} + \frac{cx}{2(c^2+x^2)^2}$$
$$-\frac{c}{3}\left(\frac{1}{(c^2)^3} + \frac{c^2-3}{(c^2+1)^3} + \frac{c^2-12}{(c^2+4)^3} + \frac{c^2-27}{(c^2+9)^3} + \ldots + \frac{c^2-3x^2}{(c^2+x^2)^3}\right)$$
$$+\frac{1}{6c^3} + \frac{c(c^2-3x^2)}{6(c^2+x^2)^3} - \frac{cx(3c^2-4x^2)}{8(c^2+x^2)^4}$$

u. s. w.

Zusatz.

§. 326. Setzen wir $c = x = 4$, so wird $y = \text{arc. tang. } 1 = \frac{\pi}{4}$, und daher:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{4}{17} + \frac{4}{20} + \frac{4}{25} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{128}$$
$$- \frac{4}{3}\left(\frac{1}{256} + \frac{13}{17^3} + \frac{4}{20^3} - \frac{11}{25^3} - \frac{32}{32^3}\right) + \frac{1}{384} - \frac{1}{1536} + \frac{1}{128.256},$$

welcher Werth von der Wahrheit sehr wenig abweicht. Diese Beyspiele führe ich nur der Erläuterung wegen an, nicht um eine leichtere Annäherungsmethode zu geben, als es auf andern Wegen möglich ist.

Beyspiel 3.

§. 327. Das Integrale $y = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}$ näherungsweise so anzugeben, daß es für $x = o$ verschwindet.

Nach den oben angeführten Reductionen ist

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x} = e^{-\frac{1}{x}} x - \int e^{-\frac{1}{x}} dx,$$

und der Theil $e^{-\frac{1}{x}} x$ verschwindet für $x = o$. Suchen wir demnach das Integrale $z = \int e^{-\frac{1}{x}} dx$, denn ist dieses gefunden, so ist $y = e^{-\frac{1}{x}} x - z$, und wir haben schon oben bemerkt, daß man in diesem Falle eine andere Annäherungsmethode vergeblich suche. Da nun z für $x = o$ verschwinden soll, so wird $a = o$ und $b = o$; ferner $X = e^{-\frac{1}{x}}$, und daher

$$P = \frac{dX}{dx} = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}, \quad Q = \frac{dP}{dx} = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right),$$

$$R = \frac{dQ}{dx} = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right),$$

$$S = \frac{dR}{dx} = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^8} - \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} - \frac{24}{x^5}\right), \text{ u. s. w.}$$

Denkt man sich die Entwickelung dieser Werthe ins Unendliche fortgesetzt, so wird

$$z = e^{-\frac{1}{x}}\Big[x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}x^3\Big(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\Big) - \tfrac{1}{24}x^4\Big(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\Big) + \tfrac{1}{120}x^5\Big(\frac{1}{x^8} - \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} - \frac{24}{x^5}\Big) + \ldots\Big]$$

oder:

$$z = e^{-\frac{1}{x}}\Big[x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\Big(\frac{1}{x} - 2\Big) - \tfrac{1}{24}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 6\Big) + \tfrac{1}{120}\Big(\frac{1}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{36}{x} - 24\Big) - \tfrac{1}{720}\Big(\frac{1}{x^4} - \frac{20}{x^3} + \frac{120}{x^2} - \frac{240}{x} + 120\Big) + \ldots\Big]$$

welche Reihe sehr langsam convergirt, welchen Werth wir dem x auch beylegen.

Schreiten wir nun durch die Intervalle von o bis x fort, und setzen successive $x = o$, α, 2α, 3α, ꝛc., wobey zu bemerken ist, daß $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$, u. s. w., so erhalten wir nach unserer Regel

$$z = \alpha\big(e^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\frac{1}{3\alpha}} + \ldots + e^{-\frac{1}{x}}\big) - \tfrac{1}{2}\alpha e^{-\frac{1}{x}} - \tfrac{1}{4}\alpha^2 e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$$
$$+ \frac{\alpha^3}{6}\Big[e^{-\frac{1}{\alpha}}\Big(\frac{1}{\alpha^4} - \frac{2}{\alpha^3}\Big) + e^{-\frac{1}{2\alpha}}\Big(\frac{1}{16\alpha^4} - \frac{2}{8\alpha^3}\Big)$$
$$+ e^{-\frac{1}{3\alpha}}\Big(\frac{1}{81\alpha^4} - \frac{2}{27\alpha^3}\Big) + \ldots + e^{-\frac{1}{x}}\Big(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\Big)\Big]$$
$$- \tfrac{1}{12}\alpha^3 e^{-\frac{1}{x}}\Big(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\Big) - \tfrac{1}{48}\alpha^4 e^{-\frac{1}{x}}\Big(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\Big).$$

Wollen wir hieraus den Werth von z für $x = 1$ ableiten, und nehmen für α einen kleinern Bruch $\frac{1}{n}$ an, so erhalten wir

$$z = \frac{1}{n}\Big[e^{-\frac{n}{1}} + e^{-\frac{n}{2}} + e^{-\frac{n}{3}} + e^{-\frac{n}{4}} + \ldots + e^{-\frac{n}{n}}\Big] - \frac{1}{2ne} - \frac{1}{4n^2e}$$
$$+ \frac{1}{6}\Big[e^{-\frac{n}{1}}\Big(\frac{n-2}{1}\Big) + e^{-\frac{n}{2}}\Big(\frac{n-4}{16}\Big) + e^{-\frac{n}{3}}\Big(\frac{n-6}{81}\Big) + \ldots$$
$$\ldots + e^{-\frac{n}{n}}\Big(\frac{-n-2n}{n^4}\Big)\Big] + \frac{1}{12n^3e} - \frac{1}{48n^4e}.$$

Wenn wir hier für n nur eine mäßig große Zahl, z. B. 10 annehmen, so finden wir den Werth für z auf Milliontel genau, und dieser Werth würde 20 Mal genauer werden, wenn wir n = 20 setzen werden.

Anmerkung 1.

§. 328. Dieses Beyspiel mag hinreichen, den vortrefflichen Nutzen dieser Näherungsmethode zu zeigen, übrigens können Fälle vorkommen, wo auch diese Methode keine Anwendung findet, selbst dann nicht, wenn man das Intervall, welches x durchschreitet, in noch so kleine Zwischenräume zerlegt. Dieß ereignet sich jedesmal, wenn die Function X für jedes Intervall für irgend einen bestimmten Werth von x ins Unendliche fortwächst, während doch das Integrale $y = \int X dx$ in diesem Falle einen endlichen Werth haben muß.

Wäre z. B. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$, so würde $X = \frac{1}{\sqrt{(a-x)}}$ für x = a unendlich werden, während doch y den endlichen Werth $C - 2\sqrt{(a-x)}$ hat. Dieß ereignet sich immer, wenn der Nenner einen Factor von der Form $a - x$ mit einem Exponenten der kleiner als die Einheit ist, enthält, weil dann eben dieser Factor im Zähler des Integrals erscheint. Ist aber der Exponent eines solchen Factors im Nenner die Einheit, oder größer als 1, dann wird für x = a das Integrale selbst unendlich groß, in welchem Falle hier nur von jenen die Rede ist, bey welchen der Exponent kleiner ist als 1, weil dann die Annäherung gestört wird. Übrigens kann man diesem Übelstande leicht abhelfen, denn da ein solches Differenziale die Form $\frac{X dx}{(a-x)^{\lambda:\mu}}$ hat, wobey $\lambda < \mu$ ist, so setze man nur $a - x = z^{\mu}$, so wird $x = a - z^{\mu}$, $dx = -\mu z^{\mu-1} dz$, und unser Differenzialausdruck geht über in $-\mu X z^{\mu-\lambda-1} dz$, welches für x = a oder z = 0 nicht mehr unendlich wird. Oder was dasselbe ist, man führe für die Intervalle, innerhalb welcher die Function X unendlich groß wird, die Integration abgesondert durch, indem man $x = a \pm \omega$ setzt, denn dann wird die Formel X dx, weil ω nur einen sehr geringen Werth hat, einfach genug, um die Integration ohne Schwierigkeit auszuführen. Hätten wir z. B. den Werth des Integrals $y = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ durch die Intervalle von x = 0 bis $x = a - \omega$ bereits gefunden, so würden wir für dieses letzte Intervall $x = a - \omega$

setzen, und wir haben nur noch den Ausdruck

$$\frac{(\alpha-\omega)^2\, d\,\omega}{\sqrt{(4\alpha^3\omega - 6\alpha^2\omega^2 + 4\alpha\omega^3 - \omega^4)}}$$

zu integriren, welcher Ausdruck wegen der unendlichen Abnahme von ω übergeht in $\frac{d\,\omega\sqrt{a}}{2\sqrt{\omega}}\left(1 - \frac{\omega}{2a} + \frac{7\omega^2}{8a^2}\right)$, dessen Integrale für $\omega=\alpha$ offenbar $\sqrt{a\alpha} - \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{a}} + \frac{7\alpha^2\sqrt{\alpha}}{4a^2\sqrt{a}}$ ist. Entwickelt man hier mehrere Glieder, so kann man nicht nur für das letzte Intervall, sondern auch für die beyden letztern oder mehreren der letzten Intervalle dieses Resultat nehmen, wenn man $\omega=\alpha$ oder $\omega=2\alpha$ setzt; denn, da für diese Intervalle der Nenner schon sehr klein ist, so ist zweckmäßiger, sich dieser Methode zu bedienen als der vorhergehenden.

Anmerkung 2.

§. 329. Bisweilen tritt auch der unangenehme Umstand ein, daß der Nenner in zwey Fällen verschwindet; wenn z. B. $y=\int\frac{X\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$ wäre, wobey die Veränderliche x immer zwischen den Gränzen b und a liegen muß, so daß wenn x von b bis a gewachsen ist, es wieder von a bis b abnehmen muß; während dem aber das Integrale y ununterbrochen wächst, so kann der Werth desselben wohl nicht bequem durch Intervalle bestimmt werden. In diesem Falle nehme man seine Zuflucht zur Substitution

$$x = \tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}(a-b)\cos.\varphi,$$

wodurch $dx = \frac{1}{2}(a-b)\,d\varphi \sin.\varphi$, und

$$(a-x)(x-b) = \left(\tfrac{1}{2}(a-b)+\tfrac{1}{2}(a-b)\cos.\varphi\right)\left(\tfrac{1}{2}(a-b)-\tfrac{1}{2}(a-b)\cos.\varphi\right),$$

oder $(a-x)(x-b)=\frac{1}{4}(a-b)^2 \sin.^2\varphi$ wird, woraus $y=\int X\,d\varphi$ folgt, welcher Ausdruck keine weitere Schwierigkeit darbiethet, da wir den Winkel φ stets wachsend denken können. Diese Bemerkung erstreckt sich auch auf jene Fälle, in welchen die beyden Factoren des Nenners nicht denselben Exponenten haben, wie z. B. in dem Ausdrucke $y=\int\frac{X\,dx}{\sqrt[2\lambda]{(a-x)^{\mu}(x-b)^{\nu}}}$, wobey μ und ν kleiner als 2λ angenommen sind, 2λ aber eine beliebige gerade Zahl bedeuten soll. Wäre nun μ und ν von einander verschieden, z. B. $\nu<\mu$, so verwandle man den

Aufgabe 43.

§. 351. Den Werth des Integrals $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$, na-
dem es so bestimmt worden ist, daß es für $x=0$ v-
schwindet, für $x=\infty$ anzugeben.

Auflösung.

Das Integrale dieses Ausdrucks haben wir schon oben, §. 7
angegeben, und zwar so, daß es für $x=0$ verschwindet; es stellt si-
wenn man Kürze wegen $\frac{\pi}{n}=\omega$ setzt, unter folgender Form dar:

$$-\frac{2}{n}\cos.m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.m\omega\,\text{arc.tang.}\frac{x\sin.\omega}{1-x\cos.\omega}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.3m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.3\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.3m\omega\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.3\omega}{1-x\cos.3\omega}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.5m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.5\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.5m\omega\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.5\omega}{1-x\cos.5\omega}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\lambda m\omega\, l\sqrt{(1-2x\cos.\lambda\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\lambda m\omega\,\text{arc.tg.}\frac{x\sin.\lambda\omega}{1-x\cos.\lambda\omega}$$

wobey λ die größte ungerade Zahl bezeichnet, die kleiner ist als de-
Exponent m, und wenn n selbst ungerade seyn sollte, kömmt noch de-
Theil $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$ hinzu, je nachdem m eine ungerade oder gera-
Zahl ist; im ersten Falle gilt nämlich das Zeichen $+$, im letztern ab-
das Zeichen $-$. Es handelt sich nun hier um den Werth jenes In-
grals, welches sich für $x=\infty$ ergibt. Wir werden zuerst jene Thei-
in Erwägung ziehen welche Logarithmen enthalten, so erhalten wi-
da wegen $x=\infty$ offenbar

$$l\sqrt{(1-2x\cos.\lambda\omega+x^2)}=l(x-\cos.\lambda\omega)=lx+l\left(1-\frac{\cos.\lambda\omega}{x}\right)=l\ldots$$

indem $\frac{\cos.\lambda\omega}{x}=0$ ist; für die logarithmischen Glieder den Werth

$$-\frac{2\,lx}{n}(\cos.m\omega+\cos.3m\omega+\cos.5m\omega+\ldots+\cos.\lambda m\omega)$$

$$\left[\pm\frac{lx}{n}\text{ für ein ungerades }n\right].$$

Setzen wir nun diese Reihe von Cosinussen, nämlich

$$\cos.m\omega+\cos.3m\omega+\cos.5m\omega+\ldots+\cos.\lambda m\omega=S,$$

so erhält man, wenn durch $2\sin.m\omega$ multiplizirt wird:

Kapitel VIII.

Von den Werthen der Integralien, welche sie nur in gewissen Fällen annehmen.

Aufgabe 39.

§. 330. Der Werth des Integrals $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $x=1$ zu bestimmen, wobey also das Integrale so genommen werden muß, daß es für $x=0$ verschwindet.

Auflösung.

Für die einfachsten Fälle, in welchen $m=0$ oder $m=1$ ist, erhält man für $x=1$ nach der Integration

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2} \text{ und } \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1.$$

Wir haben aber §. 119 gesehen, daß im Allgemeinen

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{m+1} x^m \sqrt{(1-x^2)} \text{ sey.}$$

Man erhält demnach für $x=1$

$$\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m}{m+1} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

und wenn man von dem einfachsten Werthe des Exponenten m zu dem höhern desselben fortschreitet, ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.\pi}{2.2}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.\pi}{2.4.2}$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{\pi}{2}$$

. . . .

$$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1.3.5.7.9\ldots(2n-1)}{2.4.6.8.10\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4}{3.5}$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6}{3.5.7}$$

$$\int \frac{x^9 dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$$

. . . .

$$\int \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6.8\ldots 2n}{3.5.7.9\ldots(2n+1)}$$

Zusatz 1.

§. 331. Das Integrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ wird also für $x = 1$ in allen Fällen, in welchen der Exponent m eine ganze ungerade Zahl ist, algebraisch; in jenen Fällen aber, in welchen m gerade ist, enthält es die Quadratur des Kreises, denn es bezeichnet π immer die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser gleich 1 ist.

Zusatz 2.

§. 332. Multipliciren wir die beyden letzten Formeln mit einander, so ist das Product:

$$\int \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

wenn nämlich $x = 1$ gesetzt wird, welches Resultat offenbar auch dann noch gültig ist, wenn n keine ganze Zahl bedeutet.

Zusatz 3.

§. 333. Diese Gleichheit findet unter denselben Bedingungen auch dann noch Statt, wenn wir $x = z^\nu$ setzen, weil $z = 0$ oder $z = 1$ wird, für $x = 0$ oder $x = 1$; man behält demnach

$$\nu^2 \int \frac{z^{2n\nu+\nu-1} dz}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}} \cdot \int \frac{z^{2n\nu+2\nu-1} dz}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

und wenn $2n\nu + \nu - 1 = \mu$ gesetzt wird, so findet man für $z = 1$:

$$\int \frac{z^\mu dz}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}} \cdot \int \frac{z^{\mu+\nu} dz}{\sqrt{(1-z^{2\nu})}} = \frac{1}{\nu(\mu+1)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Anmerkung 1.

§. 334. Daß ein solches Product zweyer Integralien dargestellt werden kann, ist um so merkwürdiger, weil diese Gleichung noch bestehen kann, wenn auch keine der beyden Formeln algebraisch oder durch π ausgedrückt werden kann. So finden wir z. B. für $\nu = 2$ und $\mu = 0$:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}} \cdot \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

und auf ähnliche Art:

$$\nu = 3,\quad \mu = 0,\quad \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^6)}}\cdot\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^6)}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\nu = 3,\quad \mu = 1,\quad \int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^6)}}\cdot\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^6)}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$$

$$\nu = 4,\quad \mu = 0,\quad \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^8)}}\cdot\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^8)}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\nu = 4,\quad \mu = 2,\quad \int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^8)}}\cdot\int\frac{z^6\,dz}{\sqrt{(1-z^8)}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}$$

$$\nu = 5,\quad \mu = 0,\quad \int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^{10})}}\cdot\int\frac{z^5\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}$$

$$\nu = 5,\quad \mu = 1,\quad \int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}}\cdot\int\frac{z^6\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{20}$$

$$\nu = 5,\quad \mu = 2,\quad \int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}}\cdot\int\frac{z^7\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}} = \frac{1}{15}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{30}$$

$$\nu = 5,\quad \mu = 3,\quad \int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}}\cdot\int\frac{z^8\,dz}{\sqrt{(1-z^{10})}} = \frac{1}{20}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{40}$$

Welche Sätze ohne Zweifel alle Aufmerksamkeit verdienen.

Anmerkung 2.

§. 335. Hieraus ergibt sich auch auf eine leichte Weise der Werth Integrals $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}}$ für $x = 1$. Denn setzen wir $x = z^2$, so t dieses Integrale über in $2\int\frac{z^{2m}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$; daher erhalten wir für Fall, daß $x = 1$ die Werthe

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \pi$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1}{2}\cdot\pi$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\pi$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\pi$$

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\pi$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\pi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\;2m}\cdot\pi.$$

Wir können demnach die Werthe noch verwickelterer Integralien, lche derley Formeln enthalten, für $x = 1$ durch Reihen ausdrücken, wir durch einige Beyspiele zeigen wollen.

Beyspiel 1.

§. 336. Den Werth des Integrals $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ für $= 1$ durch eine Reihe darzustellen.

Man gebe dem Integrale die Form $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 - \text{etc.}\right).$$

Integrirt man also die einzelnen Glieder für $x=1$, so findet man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1.9}{4.16} - \frac{1.9.25}{4.16.36} + \frac{1.9.25.49}{4.16.36.64} - \text{etc.}\right)$$

Zusatz.

§. 337. Auf dieselbe Weise findet man für den Fall, wenn $x=1$ ist

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1^2.3}{2^2.4} + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8} + \text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3.5} + \frac{6}{5.7} - \frac{8}{7.9} + \frac{10}{9.11} - \text{etc.}$$

Nun ist aber das Integrale $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-x^4)}$, und daher $= \frac{1}{2}$ für $x=1$, folglich ist diese letztere Reihe $= \frac{1}{2}$, was ohnedem bekannt ist.

Beyspiel 2.

§. 338. Den Werth des Integrals $\int dx \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}$ für $x=1$ durch eine Reihe darzustellen.

Es ist $\sqrt{(1+ax^2)} = 1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1.1}{2.4}a^2x^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}a^3x^6 - \text{etc.}$ Multiplizirt man hier durch $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und integrirt die einzelnen Glieder, so findet man

$$\int dx \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1.1}{2.2}a - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}a^2 + \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}a^3 - \text{etc.}\right),$$

welche Reihe offenbar die Peripherie der Ellipse bezeichnet.

Beyspiel 3.

§. 339. Den Werth des Integrals $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ für $x=1$ durch eine Reihe zu entwickeln.

Man bringe diesen Ausdruck auf die Form $\int\frac{dx(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x-x^2)}}$, so wird sie

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}}\left(1-\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+ \text{ic.}\right),$$

so erhält man durch Integration folgende Reihe:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}=\pi\left(1-\tfrac{1}{4}+\frac{1.9}{4.16}-\frac{1.9.25}{4.16.36}+\text{ic.}\right),$$

welche von jenen im ersten Beyspiele nicht verschieden ist, und dieß darf uns nicht wundern, da diese Formel sich auf jene reducirt, wenn $x=z^2$ gesetzt wird.

Aufgabe 40.

§. 340. Den Werth des Integrals

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

welches für $x=0$ verschwindet, für $x=1$ zu bestimmen.

Auflösung.

Die oben §. 118 angeführten Reductionen geben uns hier

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}=\frac{x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m+\mu+2}$$

$$+\frac{\mu+2}{m+\mu+2}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Setzen wir also hier $\mu=2n-1$, so wird

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}=\frac{2n+1}{m+2n+1}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

für $x=1$.

Da nun in der vorhergehenden Aufgabe der Werth von $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ angegeben wurde, und welchen wir der Kürze wegen $=M$ setzen wollen, so schreiten wir von diesem zu dem folgenden Werthe fort. Es ist nämlich

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = M,$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{m+1}\,M,$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1\;.\;3}{(m+1)\,(m+3)}\,M,$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1\;.\;3\;.\;5}{(m+1)\,(m+3)\,(m+5)}\,M,$$

und allgemein $\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1\;.\;3\;.\;5\;.\;7\,\ldots\ldots\,(2n-1)}{(m+1)\,(m+3)\,(m+5)\,(m+7)\,\ldots\,(m+2n-1)}\,M.$$

Nun sind die zwey Fälle in Erwägung zu ziehen, wenn $m-1$ eine gerade oder ungerade Zahl ist: denn ist

$m-1$ Gerade, so wird $M = \frac{1.3.5\,\ldots\,(m-2)}{2.4.6\,\ldots\,(m-1)}\,\frac{\pi}{2}$

$m-1$ Ungerade, so wird $M = \frac{2.4.6\,\ldots\,(m-2)}{3.5.7\,\ldots\,(m-1)}$.

Hieraus ergeben sich nun folgende Werthe:

$\int dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi}{4}$	$\int x\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1}{3}$
$\int x^2\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$	$\int x^3\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1\,.\,2}{3\,.\,5}$
$\int x^4\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1.3}{4.6}\cdot\frac{\pi}{4}$	$\int x^5\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1\,.\,2\,.\,4}{3\,.\,5\,.\,7}$
$\int x^6\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\frac{\pi}{4}$	$\int x^7\,dx\,\sqrt{(1-x^2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2.4.6}{5.7.9}$
$\int dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\pi}{16}$	$\int x\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5}$
$\int x^2\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3\pi}{16}$	$\int x^3\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{7}$
$\int x^4\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1.3}{6.8}\cdot\frac{3\pi}{16}$	$\int x^5\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2\,.\,4}{7\,.\,9}$
$\int x^6\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1.3.5}{6.8.10}\cdot\frac{3\pi}{16}$	$\int x^7\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4.6}{7.9.11}$
$\int dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{5\pi}{32}$	$\int x\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7}$
$\int x^2\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{5\pi}{32}$	$\int x^3\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{9}$
$\int x^4\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1.3}{8.10}\cdot\frac{5\pi}{32}$	$\int x^5\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4}{9.11}$
$\int x^6\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1.3.5}{8.10.12}\cdot\frac{5\pi}{32}$	$\int x^7\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{9.11.1}$

Aufgabe 41.

§. 341. Die Werthe der Integralien

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \text{ und } \int \frac{x^m dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

für $x=1$ anzugeben.

Auflösung.

Setzen wir für die einfachsten Fälle

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = A; \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = B; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A'; \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = B'; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = C'.$$

so gibt die erste Reductionsformel des §. 118, wenn daselbst $a=1$ und $b=-1$ gesetzt wird, für $x=1$

$$\int x^{m+n-1} dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{m\nu}{m\nu+n\mu+n\nu} \int x^{m-1} dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Also wenn zuerst $n=3$, $\nu=3$, und $\mu=-1$ gesetzt wird

$$\int x^{m+2} dx\,(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{m}{m+2} \int x^{m-1} dx\,(1-x^3)^{-\frac{1}{3}},$$

und im andern Falle, wo $n=3$, $\nu=3$ und $\mu=-2$, ist

$$\int x^{m+2} dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{m}{m+1} \int x^{m-1} dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.$$

Wir erhalten daher für die erste Form:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = A, \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = B, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = C,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{3} A, \qquad \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2}{4} B, \qquad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3}{5} C,$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} A, \qquad \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 7} B, \qquad \int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 8} C,$$

$$\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} A, \qquad \int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 7 \cdot 10} B, \qquad \int \frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{5 \cdot 8 \cdot 11} C,$$

$$\int \frac{x^{12}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} A, \qquad \int \frac{x^{13}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} B, \qquad \int \frac{x^{14}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} C,$$

ꝛc.

Für die andere Form aber erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A',$$
$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{2}\,A',$$
$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1\,.\,4}{2\,.\,5}\,A',$$
$$\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1\,.\,4\,.\,7}{2\,.\,5\,.\,8}\,A',$$
$$\int \frac{x^{12}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,10}{2\,.\,5\,.\,8\,.\,11}\,A',$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = B',$$
$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2}{3}\,B',$$
$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\,.\,5}{3\,.\,6}\,B',$$
$$\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\,.\,5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9}\,B',$$
$$\int \frac{x^{13}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\,.\,5\,.\,8\,.\,11}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}\,B',$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = C',$$
$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3}{4}\,C',$$
$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3\,.\,6}{4\,.\,7}\,C',$$
$$\int \frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3\,.\,6\,.\,9}{4\,.\,7\,.\,10}\,C',$$
$$\int \frac{x^{14}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}{4\,.\,7\,.\,10\,.\,13}\,C',$$

und hieraus schließen wir auf die Gültigkeit folgender allgemeiner Ausdrücke:

$$\int \frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,.\,.\,.\,.\,(3n-2)}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,3n}\,A,$$
$$\int \frac{x^{3n+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\,.\,5\,.\,8\,.\,.\,.\,.\,.\,(3n-1)}{4\,.\,7\,.\,10\,.\,.\,.\,.\,.\,(3n+1)}\,B,$$
$$\int \frac{x^{3n+2}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3\,.\,6\,.\,9\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,3n}{5\,.\,8\,.\,11\,.\,.\,.\,.\,.\,(3n+2)}\,C,$$

$$\int \frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,.\,.\,.\,(3n-2)}{2\,.\,5\,.\,8\,.\,.\,.\,.\,(3n-1)}\,A',$$
$$\int \frac{x^{3n+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\,.\,5\,.\,8\,.\,.\,.\,.\,(3n-1)}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,.\,.\,.\,.\,3n}\,B',$$
$$\int \frac{x^{3n+2}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3\,.\,6\,.\,9\,.\,.\,.\,.\,.\,3n}{4\,.\,7\,.\,10\,.\,.\,.\,.\,(3n+1)}\,C',$$

wo noch zu bemerken ist, daß $C = \frac{1}{2}$ und $C' = 1$ ist.

Zusatz 1.

§. 342. Diese Formeln lassen sich auf verschiedene Arten combiniren, so daß aus ihnen folgende vortreffliche Theoreme entstehen:

$$\int \frac{x^{3n}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{3n+2}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{AC'}{3n+1} = \frac{1}{3n+1}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$\int \frac{x^{3n+1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{3n}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{A'B}{3n+1} = \frac{1}{3n+1}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$\int \frac{x^{3n+2}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{3n+1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2B'C'}{3n+2} = \frac{1}{3n+2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

Zusatz 2.

§. 343. Weil nun das Verhältniß der Exponenten zu drey keinen weitern Einfluß auf die Rechnung ausübt, so erhält man allgemein

$$\int \frac{x^{\lambda-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{\lambda+1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$\int \frac{x^{\lambda}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{\lambda-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

$$\int \frac{x^{\lambda}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{\lambda-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

und aus den letzten Ausdrücken schließen wir, daß:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

Zusatz 3.

§. 344. Setzt man $x = z^n$ und $\lambda n = m$, so erscheinen unsere Theoreme unter folgenden Formen:

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})}} \cdot \int \frac{z^{m+2n-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}} = \frac{1}{m}\int \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})}}$$

$$\int \frac{z^{m+n-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})}} \cdot \int \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}} = \frac{n}{m}\int \frac{z^{2n-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})}} \cdot \int \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}}$$

$$= \frac{1}{m}\int \frac{z^{2n-1}dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}}.$$

Aufgabe. 42.

§. 345. Das Integrale $\int \frac{x^{m+\lambda n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ für $x=1$ anzugeben, wenn das Integrale $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ bekannt ist.

Auflösung.

Soll dieses Integrale endlich seyn, so müssen nothwendig m und k positive Zahlen bezeichnen. Da nun nach der allgemeinen Reductionsmethode

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{m\nu}{m\nu+n(\mu+\nu)} \int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} \text{ ist,}$$

so setze man $\nu=n$, und $\mu=k-n$, also $\mu+\nu=k$, so wird

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{m}{m+k} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}.$$

Bezeichnen wir nun den Werth dieses als bekannt gegebenen Integrals durch A, so erhalten wir durch wiederholte Anwendung dieser Reductionsformel, wenn Kürze halber $(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}} = P$ gesetzt wird:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{P} = A,$$

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{P} = \frac{m}{m+k} \cdot A,$$

$$\int \frac{x^{m+2n-1}\,dx}{P} = \frac{m(m+n)}{(m+k)(m+n+k)} \cdot A,$$

$$\int \frac{x^{m+3n-1}\,dx}{P} = \frac{m(m+n)(m+2n)}{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)} \cdot A,$$

und allgemein:

$$\int \frac{x^{m+\alpha n-1}\,dx}{P} =$$

$$= \frac{m(m+n)(m+2n)(m+3n)\ldots\ldots\ldots\ldots[m+(\alpha-1)n]}{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)(m+3n+k)\ldots[m+(\alpha-1)n+k]} A.$$

Zusatz 1.

§. 346. Setzen wir auf ähnliche Art einen zweyten Ausdruck $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}} = B$ für $x=1$, und setzen Kürze halber $(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}} = Q$, so erhalten wir:

$$\int \frac{x^{p+\alpha n-1}\,dx}{Q} =$$

$$= \frac{p(p+n)(p+2n)\ldots\ldots\ldots\ldots[p+(\alpha-1)n]}{(p+q)(p+n+q)(p+2n+q)\ldots\ldots[p+(\alpha-1)n+q]} \cdot B.$$

welche Formel eben so viele Factoren als die erste enthält.

Zusatz 2.

§. 347. Setzt man nun $p=m+k$, damit der letztere Zähler dem erstern Nenner gleich werde, so ist das Product beyder Ausdrücke:

$$\frac{m(m+n)(m+2n)\ldots\ldots\ldots[m+(\alpha-1)n]}{(m+k+q)(m+n+k+q)(m+2n+k+q)\ldots[m+(\alpha-1)n+k+q]} \cdot A \cdot B.$$

Setzt man ferner $m+k+q=m+n$, oder $q=n-k$, so wird dieses Product auch $= \frac{m}{m+\alpha n} \cdot AB$, und daher ist

$$\int \frac{x^{m+\alpha n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{m+k+\alpha n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} =$$

$$= \frac{m}{m+\alpha n} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{m+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}.$$

Das in dieser Formel liegende Theorem verdient unsere ganze Aufmerksamkeit, denn hier ist es nicht mehr nöthig, daß α eine ganze Zahl bezeichnet.

Zusatz 3.

§. 348. Setzen wir daher $m+\alpha n=\mu$, so wird

$$\mu \int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{\mu+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = m \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x_n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{m+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}$$

für $m+k=n$ oder $m=n-k$ werden wir, weil

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{m}}} = \frac{1-(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}{(n-k)} = \frac{1}{n-k},$$ für $x=1$ erhalten

$$\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{\mu+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{\pi}{\mu\nu\sin.\frac{k\pi}{n}}.$$

Wird wieder $x=z^\nu$ gesetzt, ferner $\mu n=p$, $\nu n=q$, und $k=\lambda n$, so wird

$$\int \frac{z^{p-1}\,dz}{(1-z^q)^{1-\lambda}} \cdot \int \frac{z^{p+\lambda q-1}\,dz}{(1-z^q)^{\lambda}} = \frac{n}{p}\int \frac{z^{(1-\lambda)q-1}\,dz}{(1-z^q)^{1-\lambda}}.$$

Anmerkung 1.

§. 349. Hieraus folgen nun nachstehende besondere Sätze:

I. $n=2$; $k=1$; $\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int \frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2\mu}$

II. $n=3$; $k=1$; $\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\pi}{3\mu\sqrt{3}}$

$n=3$; $k=2$; $\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{x^{\mu+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3\mu\sqrt{3}}$

III. $n=4$; $k=1$; $\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\pi}{2\mu\sqrt{2}}$

$n=4$; $k=2$; $\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^{\mu+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4\mu}$

$n=4$; $k=3$; $\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{x^{\mu+2}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2\mu\sqrt{2}}$

2c.

Hiebey ist zu bemerken, daß die Formel $\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ rational gemacht werden kann. Denn man setze nur $\frac{x^n}{(1-x^n)}=z^n$, oder $x^n=\frac{z^n}{1+z^n}$ so wird $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z(1+z^n)}$. Da nun unsere Formel sich

auf die Form $\int\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right)^{\frac{n-k}{n}}\frac{dx}{x}$ bringen läßt, so geht sie durch jene Substitution über in $\int\frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n}$, welches Integrale so bestimmt werden muß, daß es für $x=0$, also auch für $z=0$ verschwindet; wird aber $x=1$ gesetzt, so wird $z=\infty$, und wir erhalten den Werth, welchen wir hier brauchen. Wir werden aber bald zeigen, daß der Werth des Integrals $\int\frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n}$ für $z=\infty$, also auch der des Integrals $\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$, durch Winkel ausgedrückt werden könne, deren Werthe wir hier gleich beyfügten. Es wird auch nicht überflüssig seyn, diese Transformation der Formel $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ zu merken, welche bewerkstelligt wird, wenn $1-x^n=z^n$ gesetzt wird.

Es ergibt sich nämlich dadurch $-\int\frac{z^{k-1}\,dz}{(1-z^n)^{\frac{n-m}{n}}}$, welches Integrale so bestimmt werden muß, daß es für $x=0$ oder $z=1$ verschwindet; dann aber hat man $x=1$ und $z=0$ zu setzen. Man kömmt zu demselben Resultate, wenn man nach Veränderung des Zeichens, die Formel $\int\frac{z^{k-1}\,dz}{(1-z^n)^{\frac{n-m}{n}}}$ so integrirt, daß es für $z=0$ verschwindet; dann aber $z=1$ setzt. Da wir nun z mit x vertauschen können, so erhalten wir folgendes herrliche Theorem:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}=\int\frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}},$$

so daß man in dieser Formel die Exponenten m und k mit einander verwechseln kann; für den Fall nämlich, wenn $x=1$ ist, so erhalten wir für die vorhergehende Formel, welche sich rational machen läßt, und bey welcher $m=n-k$ ist:

$$\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}=\int\frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}};$$

und hieraus folgt, daß für $z = \infty$

$$\int \frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{k-1}\,dz}{1+z^n}.$$

Anmerkung. 2.

§. 350. Wir können daher auch die Integration zusammengesetzterer Formeln für $x = 1$ durch Reihen darstellen. Denn setzt man in der obigen Reductionsformel $m + k = \mu$ oder $k = \mu - m$, so ist

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} = \frac{m}{\mu} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}}.$$

Wäre nun folgende Differenzialformel

$$dy = \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} (A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \text{rc.})$$

so zu integriren, daß y für $x = 0$ verschwindet, und man verlangt den Werth von y, für $x = 1$, so erhält man, wenn in diesem Falle

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} = O$$

gesetzt wird, jenen Werth

$$= O \left(A + \frac{m}{\mu} B + \frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)}.C + \frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)} D + \text{rc.}\right)$$

Wäre also umgekehrt die Reihe

$$A + \frac{m}{\mu} B + \frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)}.C + \frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)} D + \text{rc.}$$

vorgelegt, so würde die Summe derselben gleich der Integralformel

$$\frac{1}{O} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} (A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \text{rc.}),$$

wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird. Läßt sich also die Summe der Reihe $A + Bx^n + Cx^{2n} + \text{rc.}$ angeben, demnach die Integratiou durchführen, so erhält man die Summe der obigen Reihe.

Aufgabe 43.

§. 351. Den Werth des Integrals $\int \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n}$, nachdem es so bestimmt worden ist, daß es für $x=0$ verschwindet, für $x=\infty$ anzugeben.

Auflösung.

Das Integrale dieses Ausdrucks haben wir schon oben, §. 77, angegeben, und zwar so, daß es für $x=0$ verschwindet; es stellt sich, wenn man Kürze wegen $\frac{\pi}{n}=\omega$ setzt, unter folgender Form dar:

$$-\frac{2}{n}\cos. m\omega \, l\sqrt{(1-2x\cos.\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin. m\omega \text{ arc.tang.} \frac{x \sin.\omega}{1-x\cos.\omega}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.3m\omega \, l\sqrt{(1-2x\cos.3\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.3m\omega \text{ arc.tg.} \frac{x \sin.3\omega}{1-x\cos.3\omega}$$

$$-\frac{2}{n}\cos.5m\omega \, l\sqrt{(1-2x\cos.5\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.5m\omega \text{ arc.tg.} \frac{x \sin.5\omega}{1-x\cos.5\omega}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{2}{n}\cos.\lambda m\omega \, l\sqrt{(1-2x\cos.\lambda\omega+x^2)}+\frac{2}{n}\sin.\lambda m\omega \text{ arc.tg.} \frac{x \sin.\lambda\omega}{1-x\cos.\lambda\omega}$$

wobey λ die größte ungerade Zahl bezeichnet, die kleiner ist als der Exponent m, und wenn n selbst ungerade seyn sollte, kömmt noch der Theil $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$ hinzu, je nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist; im ersten Falle gilt nämlich das Zeichen $+$, im letztern aber das Zeichen $-$. Es handelt sich nun hier um den Werth jenes Integrals, welches sich für $x=\infty$ ergibt. Wir werden zuerst jene Theile in Erwägung ziehen welche Logarithmen enthalten, so erhalten wir, da wegen $x=\infty$ offenbar

$$l\sqrt{(1-2x\cos.\lambda\omega+x^2)}=l(x-\cos.\lambda\omega)=lx+l\left(1-\frac{\cos.\lambda\omega}{x}\right)=lx,$$

indem $\frac{\cos.\lambda\omega}{x}=0$ ist; für die logarithmischen Glieder den Werth

$$-\frac{2lx}{n}(\cos. m\omega+\cos.3m\omega+\cos.5m\omega+\ldots+\cos.\lambda m\omega)$$

$$\left[\pm\frac{lx}{n} \text{ für ein ungerades } n\right].$$

Setzen wir nun diese Reihe von Cosinussen, nämlich

$$\cos. m\omega+\cos.3m\omega+\cos.5m\omega+\ldots+\cos.\lambda m\omega=S,$$

so erhält man, wenn durch $2\sin. m\omega$ multiplizirt wird:

$S \sin. m\omega = \sin. 2m\omega + \sin. 4m\omega + \sin. 6m\omega + \ldots + \sin. (\lambda+1) m\omega$
$\quad - \sin. 2m\omega - \sin. 4m\omega - \sin. 6m\omega,$

und daher wird $S = \frac{\sin. (\lambda+1) m\omega}{2 \sin. m\omega}$. Ist demnach n eine gerade Zahl, so wird $\lambda = n - 1$, und so erhält man für die logarithmischen Theile

$$-\frac{lx}{n} \cdot \frac{\sin. m n \omega}{\sin. m\omega} = -\frac{lx}{n} \cdot \frac{\sin. m\pi}{\sin. m\omega}, \text{ weil } n\omega = \pi \text{ ist.}$$

Aber da m eine ganze Zahl bezeichnet, so ist $\sin. m\pi = 0$, und daher verschwinden diese Theile. Ist aber n eine ungerade Zahl, so wird $\lambda = n - 2$, und daher die Summe der logarithmischen Glieder

$$-\frac{lx}{n} \frac{\sin. (n-1) m\omega}{\sin. m\omega} \pm \frac{lx}{n}.$$

Nun ist aber $\sin. (n-1) m\omega = \sin. (m\pi - m\omega) = \pm \sin. m\omega$, wo das obere Zeichen gilt, wenn m ungerade, das untere im entgegengesetzten Falle, was auch wegen der andern Zweydeutigkeit zu merken ist, und wir erhalten daher $\mp \frac{lx}{n} \frac{\sin. m\omega}{\sin. m\omega} \pm \frac{lx}{n} = 0$. Es heben sich demnach jedesmal die logarithmischen Theile, was auch schon daraus einleuchtet, weil sonst das Integrale unendlich würde, da es doch einen endlichen Werth haben muß.

Wir haben demnach nur noch die Kreisbogen zu summiren. Betrachten wir also den Ausdruck $\text{arc. tang.} \frac{x \sin. \lambda\omega}{1 - x \cos. \lambda\omega}$, welcher Bogen für $x = 0$ verschwindet, für den Fall aber, daß $x = \frac{1}{\cos. \lambda\omega}$ wird, sich in einen Quadranten verwandelt, und wenn x noch weiter fortwächst, wird jener Bogen einen Quadranten übertreffen, bis endlich für $x = \infty$ seine Tangente $= -\frac{\sin. \lambda\omega}{\cos. \lambda\omega} = -\text{tang.} \lambda\omega = \text{tang.} (\pi - \lambda\omega)$ wird, und daher der Bogen selbst $= \pi - \lambda\omega$ ist; nehmen wir demnach diese Bogen zusammen, so erhalten wir

$$\frac{2}{n} [(\pi - \omega) \sin. m\omega + (\pi - 3\omega) \sin. 3m\omega + (\pi - 5\omega) \sin. 5m\omega + \ldots$$
$$\ldots + (\pi - \lambda\omega) \sin. \lambda m \omega];$$

hieraus ergeben sich die zwey Reihen:

$$\frac{2\pi}{n} (\sin. m\omega + \sin. 3m\omega + \sin. 5m\omega + \ldots + \sin. \lambda m \omega) = \frac{2\pi}{n} p; \text{ und}$$

$$-\frac{2\omega}{n} (\sin. m\omega + 3 \sin. 3m\omega + 5 \sin. 5m\omega + \ldots + \lambda \sin. \lambda m\omega) = -\frac{2\omega}{n} q;$$

Diese beyden Reihen wollen wir nun abgesondert untersuche
Da wir früher

$$\cos.m\omega + \cos.3m\omega + \cos.5m\omega + \ldots + \cos.\lambda m\omega = S = \frac{\sin.(\lambda+1)m}{2\sin.m\omega}$$

gefunden haben, so erhalten wir für die zweyte Reihe, wenn wir als veränderlich betrachten, durch Differenziation

$$-md\omega(\sin.m\omega + 3\sin.3m\omega + 5\sin.5m\omega + \ldots + \lambda\sin.\lambda m\omega)$$

$$= \frac{(\lambda+1)md\omega\cos.(\lambda+1)m\omega}{2\sin.m\omega} - \frac{md\omega\sin.(\lambda+1)m\omega\cos.m\omega}{2\sin.^2m\omega},$$

$$\text{also } -q = \frac{(\lambda+1)\cos.(\lambda+1)m\omega}{2\sin.m\omega} - \frac{\sin.(\lambda+1)m\omega\cos.m\omega}{2\sin.^2m\omega},$$

$$\text{oder } -q = \frac{\lambda\cos.(\lambda+1)m\omega}{2\sin.m\omega} - \frac{\sin.\lambda m\omega}{2\sin.^2m\omega}.$$

Für die andere Reihe ist

$$p = \sin.m\omega + \sin.3m\omega + \sin.5m\omega + \ldots + \sin.\lambda m\omega;$$

multipliciren wir beyderseits durch $2\sin.m\omega$, so ergibt sich

$$2p\sin.m\omega = 1 - \cos.2m\omega - \cos.4m\omega - \cos.6m\omega - \ldots - \cos.(\lambda+1)m$$
$$+ \cos.2m\omega + \cos.4m\omega + \cos.6m\omega + \ldots$$

$$\text{und so wird } p = \frac{1-\cos.(\lambda+1)m\omega}{2\sin.m\omega}.$$

Bezeichnet nun n eine gerade Zahl, so ist $\lambda = n - 1$, also

$$\cos.(\lambda+1)m\omega = \cos.nm\omega = \cos.m\pi \text{ und}$$
$$\sin.(\lambda+1)m\omega = \sin.m\pi = 0,$$

folglich $p = \frac{1-\cos.m\pi}{2\sin.m\omega}$ und $-q = \frac{n\cos m\pi}{2\sin.m\omega}$; nehmen wir daher a Bogen zusammen, so finden wir

$$\frac{2\pi}{n}\,\frac{(1-\cos.m\pi)}{2\sin.m\omega} + \frac{2\omega}{n}\,\frac{n\cos.m\pi}{2\sin.m\omega} = \frac{\pi}{n\sin.m\omega},$$ weil $n\omega = \pi$ ist

Es bezeichne nun n eine ungerade Zahl, so wird $\lambda = n -$ und daher

$$\cos.(\lambda+1)m\omega = \cos.(m\pi - m\omega) \text{ und}$$
$$\sin.(\lambda+1)m\omega = \sin.(m\pi - m\omega); \text{ oder}$$
$$\cos.(\lambda+1)m\omega = \cos.m\pi\cos.m\omega \text{ und}$$
$$\sin.(\lambda+1)m\omega = -\cos.m\pi\sin.m\omega, \text{ also}$$

$$p = \frac{1-\cos.m\pi\cos.m\omega}{2\sin.m\omega} \text{ und}$$

$$-q = \frac{(n-1)\cos.m\pi\cos.m\omega}{2\sin.m\omega} + \frac{\cos.m\pi\cos.m\omega}{2\sin.m\omega}.$$

Es ist daher die Summe aller Bogen:

$$\frac{\pi(1-\cos.m\pi\cos.m\omega}{n\sin.m\omega}+\frac{\omega(n-1)\cos.m\pi\cos.m\omega}{n\sin.m\omega}+\frac{\omega\cos.m\pi\cos.m\omega}{n\sin.m\omega},$$

welche sich wegen $n\omega=\pi$ auf $\frac{\pi}{n\sin.m\omega}$ reducirt.

Es mag nun der Exponent n positiv oder negativ seyn, so erhalten wir für $x=\infty$

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)}=\frac{\pi}{n\sin.m\omega}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}}.$$

Zusatz 1.

§. 352. Hieraus folgt also für die oben §. 349 erwähnte Formel

$$\int\frac{z^{n-k-1}dz}{1+z^n}=\int\frac{z^{k-1}dz}{1+z^n}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{(n-k)\pi}{n}}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{k\pi}{n}},$$

wenn $z=\infty$ gesetzt wird.

Hieraus folgt ferner, daß folgender Ausdruck, dessen Identität mit dem letztern wir nachgewiesen haben, nämlich

$$\int\frac{x^{n-k-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}=\int\frac{x^{k-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{k\pi}{n}}$$

sey, sobald $x=1$ gesetzt wird.

Zusatz 2.

§. 353. Wir wollen nun die einfacheren Fälle, welche sich für beyde Gattungen von Ausdrücken ergeben, wenn $z=\infty$ und $x=1$ gesetzt wird, kurz anführen:

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{\pi}{2\sin.\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{dz}{1+z^3}=\int\frac{z\,dz}{1+z^3}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{\pi}{3\sin.\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int\frac{dz}{1+z^4}=\int\frac{z^2dz}{1+z^4}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{\pi}{4\sin.\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int\frac{dz}{1+z^6}=\int\frac{z^4dz}{1+z^6}=\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)}}=\int\frac{x^4dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}}=\frac{\pi}{6\sin.\frac{5\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}.$$

Zusatz 3.

§. 354. Es ist

$$\frac{1}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = 1 + \frac{k}{n} x^n + \frac{k(k+n)}{n.2n} x^{2n} + \frac{k(k+n)(k+2n)}{n.2n.3n} x^{3n} + \text{etc.}$$

multiplicirt man beyderseits durch $x^{k-1}dx$ und integrirt dann, so findet man für $x=1$:

$$\frac{\pi}{n \sin.\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{k} + \frac{k}{n(k+n)} + \frac{k(k+n)}{n.2n(k+2n)} + \frac{k(k+n)(k+2n)}{n.2n.3n(k+3n)} + \text{etc.,}$$

und wenn man $n-k$ statt k schreibt, so erhält man noch

$$\frac{\pi}{n \sin.\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{n-k} + \frac{n-k}{n.(2n-k)} + \frac{(n-k)(2n-k)}{n.2n.(3n-k)}$$

$$+ \frac{(n-k)(2n-k)(3n-k)}{n.2n.3n.(4n-k)} + \text{etc.}$$

Anmerkung.

§. 355. Wir haben schon oben für die, transcendente Größen enthaltenden Formeln die vorzüglichsten Werthe entwickelt, welche die Integralien für bestimmte Werthe der veränderlichen Größe annehmen. Es wird demnach überflüssig seyn, uns von Neuem mit derley Untersuchungen zu beschäftigen.

Man sieht aber ein, daß vor allen andern jene Werthe des Integrals $\int X dx$ bemerkenswerth seyen, und gewöhnlich viel zierlicher ausgedrückt werden können, welche solchen Werthen der Veränderlichen x entsprechen, für welche die Function X entweder ins Unendliche wächst oder verschwindet. So nehmen z. B. die Integralen

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}} \text{ und } \int \frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$$

besonders merkwürdige Werthe an, wenn $x=1$ und $z=\infty$ gesetzt wird, in welchem Falle der Nenner des ersten Ausdrucks verschwindet, der des letztern aber unendlich wird. Übrigens verdient der elegante Ausdruck $\frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi}$, welchen wir als den Werth des Integrals $\int \frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$ für $z=\infty$ gefunden haben, unsere ganze Aufmerksam-

keit; da wir den Beweis für die Richtigkeit desselben durch so viele Umschweife abgeleitet haben, so läßt sich mit Recht vermuthen, daß man auf einem weit kürzern Wege zu demselben Ziele gelangen könne, obgleich man die Art und Weise noch nicht deutlich einsieht. So viel sieht man übrigens schon, daß dieser Beweis aus der Natur der Sinusse der vielfachen Bogen genommen werden müsse; in der Einleitung haben wir $\sin. \frac{m}{n}\pi$ durch ein Product unendlich vieler Factoren ausgedrückt, und nun werden wir bald sehen, daß wir dieselbe Wahrheit auf einem weit leichtern Wege finden können, obgleich ich auch diese Methode nicht für die allereinfachste ausgeben möchte.

Das folgende Kapitel habe ich zu Untersuchungen dieser Art bestimmt, wo ich zeigen werde, wie man die Werthe der Integralien, welche sie, wie in gegenwärtigem Kapitel, nur in gewissen Fällen annehmen, als eine unendliche Factorenfolge darstellen könne. Biethet uns hiebey gleichwohl die Analysis die vorzüglichsten Hülfsquellen dar, so werden wir dennoch dabey manches Neue kennen lernen.

Kapitel IX.

Von der Entwickelung der Integralien durch unendliche Factorenfolgen.

Aufgabe 44.

§. 356. **Den Werth des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $x=1$, durch eine Folge unendlich vieler Factoren darzustellen.**

Auflösung.

So wie wir oben verwickeltere Formeln auf einfache zurückgeführt haben, so werden wir hier von der Formel $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ stets auf zusammengesetztere übergehen. Da nun für $x=1$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m+1}{m} \int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$ so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{1}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4}{1.3}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6}{1.3.5}\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{etc.}$$

und hieraus schließen wir allgemein, daß

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6.8 \ldots\ldots 2i}{1.3.5.7 \ldots (2i-1)} \int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$ sey,

welche Formel auch dann noch gültig ist, wenn i unendlich wird.

Eben so wollen wir nun von der Formel $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ aufwärts schreiten, so finden wir

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3.5.7.9 \ldots (2i+1)}{2.4.6.8 \ldots\ldots 2i} \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

wobey zu bemerken ist, daß die beyden Formeln

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ und } \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

einander gleich werden, sobald i unendlich wird. Denn die ursprüngliche Reduction zeigt deutlich, daß

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{x^{m+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

und daß allgemein:

$$\int \frac{x^{m+\mu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{x^{m+\nu}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

so sehr auch μ und ν von einander verschieden seyn mögen, wenn nur diese Differenz endlich ist. Da nun

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$ so ist, wenn

$$\frac{2.4.6\ldots\ldots 2i}{1.3.5\ldots(2i-1)} = M \text{ und } \frac{3.5.7.9\ldots(2i+1)}{2.4.6.8\ldots\ldots 2i} = N$$

gesetzt wird,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} : \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = M:N = \frac{M}{N} : 1, \text{ für } x = 1.$$

Nun ist aber $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$, mithin wird $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{M}{N}$, weil die Producte M und N aus gleich vielen Factoren bestehen; wenn wir den ersten Factor $\frac{2}{1}$ des Productes M durch den ersten Factor $\frac{3}{2}$ des Productes N, ferner den zweyten Factor des ersten Ausdruckes, durch den zweyten Factor $\frac{5}{4}$ des andern u. s. f. dividiren, so wird

$$\frac{M}{N} = \frac{2\,.\,2}{1\,.\,3} \cdot \frac{4\,.\,4}{3\,.\,5} \cdot \frac{6\,.\,6}{5\,.\,7} \cdot \frac{8\,.\,8}{7\,.\,9} \,.\, \text{ꝛc.},$$

und daher erhalten wir für $x = 1$ durch eine unendliche Factorenfolge

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\,.\,2}{1\,.\,3} \cdot \frac{4\,.\,4}{3\,.\,5} \cdot \frac{6\,.\,6}{5\,.\,7} \cdot \frac{8\,.\,8}{7\,.\,9} \,.\, \text{ꝛc.} = \frac{\pi}{2}.$$

Zusatz 1.

§. 357. Wir haben also für den Werth von π dasselbe unendliche Product gefunden, welches Wallis schon aufgestellt hat, und dessen Richtigkeit wir schon in der Einleitung auf sehr verschiedenen Wegen nachgewiesen haben; es ist daher:

$$\pi = 2 \,.\, \frac{2\,.\,2}{1\,.\,3} \cdot \frac{4\,.\,4}{3\,.\,5} \cdot \frac{6\,.\,6}{5\,.\,7} \cdot \frac{8\,.\,8}{7\,.\,9} \,.\, \text{ꝛc.}$$

Zusatz 2.

§. 358. Es liegt nichts daran, in welcher Ordnung die einzelnen Factoren in diesem Producte genommen werden, wenn man nur keinen ausläßt. Wenn man also einige der anfänglichen Factoren

einzeln heraushebt, so können die andern in die gehörige Ordnung gestellt werden; wie z. B.:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \text{ꝛc., oder}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \times \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 10}{7 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 12}{9 \cdot 11} \cdot \text{ꝛc., oder}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 10}{7 \cdot 11} \cdot \text{ꝛc., oder}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \times \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 9} \cdot \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 11} \cdot \frac{8 \cdot 12}{7 \cdot 13} \cdot \text{ꝛc.}$$

Anmerkung.

§. 359. Diese Entwickelung stützt sich demnach darauf, daß der Werth des Integrals $\int \frac{x^{i+\alpha}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, wobey i eine unendliche Zahl bedeutet, unverändert bleibe, wie sich die endliche Zahl α auch ändern mag. Dieses erhellt zwar aus der Reductionsformel

$$\int \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{i+1}{i} \int \frac{x^{i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

wenn die Werthe von α immer um zwey Einheiten von einander verschieden angenommen werden. Dann aber läßt sich nicht bezweifeln, daß das Integrale

$$\int \frac{x^{i+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ zwischen } \int \frac{x^{i}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ und } \int \frac{x^{i+2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

als Gränzen enthalten sey. Weil aber diese Gränzwerthe einander gleich sind, so folgt nothwendig, daß alle zwischenliegende Ausdrücke denselben auch gleich seyen. Dieser Satz erstreckt sich auf noch zusammengesetztere Ausdrücke, so daß, wenn i eine unendliche Zahl bedeutet,

$$\int \frac{x^{i+\alpha}\,dx}{(1-x^n)^k} = \int \frac{x^{i}\,dx}{(1-x^n)^k} \text{ gesetzt werden kann.}$$

Denn weil

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{m}{m+k} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}},$$

so werden diese Ausdrücke für $m=\infty$ einander gleich; es folgt hieraus auch ihre Gleichheit für jene Fälle, in welchen $\alpha=n$ oder $\alpha=2n$ oder $\alpha=3n$ ꝛc. ist; wenn aber α irgend einen mittlern Werth be-

zeichnet, so muß auch der Werth unseres Ausdruckes selbst irgend einen Mittelwerth zwischen gleichen Größen bezeichnen, und wird daher denselben selbst gleich seyn. Nach Feststellung dieses Satzes können wir nun zur Auflösung des folgenden Problems schreiten.

Aufgabe 45.

§. 360. **Das Verhältniß der beyden Integralien**

$$\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} \text{ und } \int x^{\mu-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$

für $x=1$ durch eine Folge unendlich vieler Factoren auszudrücken.

Auflösung.

Weil $\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{m+k}{m} \int x^{m+n-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$

für $x=1$ ist, so läßt sich der Werth jenes Integrals auf das unendlich entfernte Integrale auf folgendem Wege zurückleiten; es ist

$$\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} =$$

$$\frac{(m+k)(m+k+n)(m+k+2n)\ldots(m+k+in)}{m\quad(m+n)\quad(m+2n)\ldots\ldots(m+in)} \int x^{m+in+n-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$

wobey wir dem i einen unendlichen Werth beygelegt haben. Auf ähnlichem Wege erhalten wir für die zweyte Integralformel

$$\int x^{\mu-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} =$$

$$\frac{(\mu+k)(\mu+k+n)(\mu+k+2n)\ldots(\mu+k+in)}{\mu\quad(\mu+n)\quad(\mu+2n)\ldots\ldots(\mu+in)} \int x^{\mu+in+n-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$

und diese beyden letztern Integralformeln müssen ohnerachtet der Verschiedenheit der Zahlen m und μ einander gleich seyn, weil die Exponenten unendlich groß sind. Dann aber bestehen diese beyden unendlichen Producte aus gleich vielen Factoren. Dividirt man demnach die einzelnen Factoren durch einander, nämlich den ersten durch den ersten, den zweyten durch den zweyten u. s. w., so stellt sich das Verhältniß der beyden gegebenen Integralien unter folgender Form dar:

$$\frac{\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}}{\int x^{\mu-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}} =$$

$$= \frac{\mu\,(m+k)}{m\,(\mu+k)} \cdot \frac{(\mu+n)\,(m+k+n)}{(m+n)\,(\mu+k+n)} \cdot \frac{(\mu+2n)\,(m+k+2n)}{(m+2n)\,(\mu+k+2n)} \cdot \text{rc.},$$

wenn beyde Integralien so bestimmt werden, daß sie für $x = 0$ verschwinden, und dann $x = 1$ gesetzt wird. Hiebey müssen aber m, μ, n, k nothwendig positive Zahlen bezeichnen.

Zusatz 1.

§. 361. Ist die Differenz zwischen m und μ ein Vielfaches von n, so heben sich in dem gefundenen Producte unendlich viele Factoren auf, und die Anzahl der zurückgebliebenen Factoren ist endlich; wäre z. B. $\mu = m + n$, so würde man

$$\frac{(m+n)\,(m+k)}{m\,(m+k+n)} \cdot \frac{(m+2n)\,(m+k+n)}{(m+n)\,(m+k+2n)} \cdot \frac{(m+3n)\,(m+k+2n)}{(m+2n)\,(m+k+3n)} \cdot \text{rc.}$$

finden, welches Product sich auf $\frac{m+k}{m}$ reducirt.

Zusatz 2.

§. 362. Der Werth jenes Productes ist nothwendig ein endlicher; dieß erhellt theils aus den Integralformeln, deren Verhältniß durch dasselbe ausgedrückt wird, theils aber daraus, daß in den einzelnen Factoren Zähler und Nenner abwechselnd größer und kleiner sind.

Zusatz 3.

§. 363. Für $m = 1$, $\mu = 3$, $n = 4$ und $k = 2$ erhalten wir

$$\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}}{\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}} = \frac{3\,.\,3}{1\,.\,5} \cdot \frac{7\,.\,7}{5\,.\,9} \cdot \frac{11\,.\,11}{9\,.\,13} \cdot \frac{15\,.\,15}{13\,.\,17} \cdot \text{rc.},$$

oben haben wir aber das Product dieser beyden Formeln $= \frac{\pi}{4}$ gefunden.

Aufgabe 46.

§. 364. Den Werth des Integrals $\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$ für $x = 1$, durch ein Product unendlich vieler Factoren zu entwickeln.

Auflösung.

Da in der vorhergehenden Aufgabe das Verhältniß des vorgelegten Integrals zu $\int x^{\mu-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$ durch eine unendliche Factorenfolge angegeben wurde, so werden wir hier den Exponenten μ so annehmen, daß das Integrale sich bestimmen läßt. Setzen wir demnach $\mu = m$, so wird unser Integrale

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k}(1-x^n)^{\frac{k}{n}} = \frac{1-(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k}$$

wenn man dasselbe so bestimmt, daß es für $x=0$ verschwindet; nun setze man der Forderung gemäß $x=1$, so erhalten wir, weil dieses Integrale $= \frac{1}{k}$ wird, das Integrale der vorgelegten Formel für $x=1$ unter folgender Form:

$$\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} =$$

$$= \frac{1}{k} \frac{n(m+k)}{m(k+n)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(k+2n)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(k+3n)} \cdot \text{2c.},$$

oder auch wenn man die einzelnen Factoren trennt, unter folgender Gestalt:

$$\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} =$$

$$= \frac{n}{mk} \frac{2n(m+k)}{(m+n)(k+n)} \cdot \frac{3n(m+k+n)}{(m+2n)(k+2n)} \cdot \frac{4n(m+k+2n)}{(m+3n)(k+3n)} \cdot \text{2c.}$$

Zusatz 1.

§. 365. Da in diesem Ausdrucke die Buchstaben m und k sich vertauschen lassen, so können wir auch, wenn $x=1$ gesetzt wird, auf die Gleichheit nachstehender Integralien schließen:

$$\int x^{m-1} dx (1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \int x^{k-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

wie wir schon oben, §. 349, nachgewiesen haben.

Zusatz 2.

§. 366. Da der Werth unserer Formel für $m = n - k$ identisch ist mit dem Werthe, welchen $\int \frac{z^{k-1} dz}{1+z^n}$ für $z = \infty$ annimmt, so er-

halten wir, wenn $m = \frac{n+\alpha}{2}$ und $k = \frac{n-\alpha}{2}$ wegen $m+k=n$ gesetzt wird:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n+\alpha}{2n}}} = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-\alpha}{2n}}} = \int \frac{z^{k-1}\,dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}$$

$$= \frac{4n}{n^2-\alpha^2} \cdot \frac{2 \cdot 4n^2}{9n^2-\alpha^2} \cdot \frac{4 \cdot 6 \cdot n^2}{25n^2-\alpha^2} \cdot \frac{6 \cdot 8 \cdot n^2}{49n^2-\alpha^2} \text{ ic.},$$

welches Product sich auch in der Form

$$\frac{2}{n-\alpha} \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(n+\alpha)(3n-\alpha)} \cdot \frac{4n \cdot 4n}{(3n+\alpha)(5n-\alpha)} \cdot \frac{6n \cdot 6n}{(5n+\alpha)(7n-\alpha)} \text{ ic.}$$

darstellen läßt, und demnach auch den Werth von

$$\frac{\pi}{n \sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \cos.\frac{\alpha\pi}{2n}}$$

(§. 352) bezeichnet.

Zusatz 3.

§. 367. Setzen wir geradezu $k=n-m$, so wird

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int \frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \int \frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{n-m-1}\,dz}{1+z^n}$$

$$= \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n^2}{m(2n-m)} \cdot \frac{4n^2}{(n+m)(3n-m)} \cdot \frac{9n^2}{(2n+m)(4n-m)} \text{ ic.},$$

welches Product aus dem zuerst gefundenen Ausdruck hervorgeht. Diese Gleichheit muß demnach für $x=1$ und $z=\infty$ Statt haben.

Anmerkung 1.

§. 368. In der Einleitung aber haben wir für die Multiplication der Winkel gefunden:

$$\sin.\frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) \text{ ic.},$$

und weil $\sin.\frac{(n-m)\pi}{n} = \sin.\frac{m\pi}{n}$, so wird auch wegen $n-m=k$

$$\sin.\frac{m\pi}{n} = \frac{k\pi}{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{16n^2}\right) \text{ ic.},$$

welcher Ausdruck sich auf die Form

$$\sin.\frac{m\pi}{n} = \frac{k\pi}{n} \frac{(n-k)(n+k)}{n^2} \cdot \frac{(2n-k)(2n+k)}{4n^2} \cdot \frac{(3n-k)(3n+k)}{9n^2} \text{ ic.}$$

gen läßt, und wenn für k wieder sein Werth gesetzt wird, erhält

$$\frac{m\pi}{n} = \frac{\pi}{n}(n-m)\frac{m(2n-m)}{n^2}\cdot\frac{(n+m)(3n-m)}{4n^2}\cdot\frac{(2n+m)(4n-m)}{9n^2} \text{ etc.}$$

er findet man für $\frac{\pi}{n \sin.\frac{m\pi}{n}}$ offenbar dasselbe Product, welches Werth unserer Integralien bedeutet, und so gewinnen wir einen n Beweis für jenes herrliche Theorem, welches wir oben auf vie- Umwegen gefunden haben. Daß nämlich:

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \int\frac{x^{n-m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}} = \int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n} = \int\frac{z^{n-m-1}dz}{1+z^n}$$

$$= \frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}}.$$

Anmerkung a.

§. 369. Um unserer Formel eine größere Ausdehnung zu ver- ffen, setzen wir $\frac{k}{n} = \frac{\mu}{\nu}$ oder $k = \frac{\mu n}{\nu}$, so erhalten wir

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} =$$

$$\frac{\nu}{n\mu}\cdot\frac{2(m\nu+n\mu)}{(m+n)(\mu+\nu)}\cdot\frac{3(m\nu+n(\mu+\nu))}{(m+2n)(\mu+2\nu)}\cdot\frac{4(m\nu+n(\mu+2\nu))}{(m+3n)(\mu+3\nu)} \text{ etc.}$$

$$\frac{\nu}{n\mu}\cdot\frac{2(m\nu+n\mu)}{(m+n)(\mu+\nu)}\cdot\frac{3(m\nu+n\mu+n\nu)}{(m+2n)(\mu+2\nu)}\cdot\frac{4(m\nu+n\mu+2n\nu)}{(m+3n)(\mu+3\nu)}\cdot\frac{5(m\nu+n\mu+3n\nu)}{(m+4n)(\mu+4\nu)} \text{ etc.},$$

velchem Ausdrucke die Buchstaben m, n mit μ und ν vertauscht den können, außer im ersten Factor, welcher von dem Bildungs- ze, nach welchem die übrigen Factoren fortschreiten, unabhängig multipliciren wir aber durch n, so ist jene Vertauschung an keine nahme mehr gebunden, und wir können schließen, daß

$$n\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \nu\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{m}{n}-1},$$

he Gleichung sich für $\nu = n$ auf die oben angeführte reducirt. rigens wird es nützlich seyn, die vorzüglichsten Fälle in Erwägung ieben, welche sich durch die verschiedenen Werthe von μ und ν ben.

Beyspiel 1.

§. 370. Für $\mu = 1$ und $\nu = 2$ erhält man

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{2}{m}\cdot\frac{2(2m+n)}{3(m+n)}\cdot\frac{3(2m+3n)}{5(m+2n)}\cdot\frac{4(2m+5n)}{7(m+3n)}$$

$$= \frac{2}{n}\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^2)^{n-m}}}$$

welcher Ausdruck sich auf folgende bequemere bringen läßt:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{2}{m}\cdot\frac{4(2m+n)}{3(2m+2n)}\cdot\frac{6(2m+3n)}{5(2m+4n)}\cdot\frac{8(2m+5n}{7(2m+6n}$$

Hieraus ergeben sich folgende ganz specielle Fälle:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 2\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\text{ ꝛc.} = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2\cdot\frac{4\cdot5}{3\cdot8}\cdot\frac{6\cdot11}{5\cdot14}\cdot\frac{8\cdot17}{7\cdot20}\cdot\frac{10\cdot23}{9\cdot26}\text{ ꝛc.} = \frac{2}{3}\int$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = 1\cdot\frac{4\cdot7}{3\cdot10}\cdot\frac{6\cdot13}{5\cdot16}\cdot\frac{8\cdot19}{7\cdot22}\cdot\frac{10\cdot25}{9\cdot28}\text{ ꝛc.} = \frac{2}{3}\int$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = 2\cdot\frac{4\cdot3}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot7}{5\cdot9}\cdot\frac{8\cdot11}{7\cdot13}\cdot\frac{10\cdot15}{9\cdot17}\text{ ꝛc.} = \frac{1}{2}\int$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = 1\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot6}\cdot\frac{6\cdot8}{5\cdot10}\cdot\frac{8\cdot12}{7\cdot14}\cdot\frac{10\cdot16}{9\cdot18}\text{ ꝛc.} = \frac{1}{2}\int$$

$$= 1\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\cdot\frac{8\cdot10}{9\cdot9}\text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot5}{3\cdot7}\cdot\frac{6\cdot9}{5\cdot11}\cdot\frac{8\cdot13}{7\cdot15}\cdot\frac{10\cdot17}{9\cdot19}\text{ ꝛc.} = \frac{1}{2}\int$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{2}{4}\cdot\frac{4\cdot6}{3\cdot8}\cdot\frac{6\cdot10}{5\cdot12}\cdot\frac{8\cdot14}{7\cdot16}\cdot\frac{10\cdot18}{9\cdot20}\text{ ꝛc.} = \frac{1}{2}.$$

Beyspiel 2.

§. 371. Für $\mu = 1$ und $\nu = 3$ wird

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^n)^2}} = \frac{3}{m}\cdot\frac{2(3m+n)}{4(m+n)}\cdot\frac{3(3m+4n)}{7(m+2n)}\cdot\frac{4(3m+7n}{10(m+3}$$

$$= \frac{3}{n}\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^3)^{n-m}}};$$

woraus wir wieder folgende ganz besondere Fälle ableiten:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 17}{10 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 23}{13 \cdot 9} \text{ ꝛc.} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 15}{7 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 24}{10 \cdot 10} \cdot \frac{5 \cdot 33}{13 \cdot 13} \text{ ꝛc.} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$= \frac{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 12}{10 \cdot 10} \cdot \frac{11 \cdot 15}{13 \cdot 13} \text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 18}{7 \cdot 8} \cdot \frac{4 \cdot 27}{10 \cdot 11} \cdot \frac{5 \cdot 36}{13 \cdot 14} \text{ ꝛc.} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$\text{oder } = \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 12}{10 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 15}{13 \cdot 14} \text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)^2}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 7}{4 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 19}{7 \cdot 9} \cdot \frac{4 \cdot 31}{10 \cdot 13} \cdot \frac{5 \cdot 43}{13 \cdot 17} \text{ ꝛc.} = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)^2}} = 1 \cdot \frac{2 \cdot 13}{4 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 25}{7 \cdot 11} \cdot \frac{4 \cdot 37}{10 \cdot 15} \cdot \frac{5 \cdot 49}{13 \cdot 19} \text{ ꝛc.} = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)}}$$

Beyspiel 3.

§. 372. Für $\mu = 2$ und $\nu = 3$ wird

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^n)}} = \frac{3}{2m} \cdot \frac{2(3m+2n)}{5(m+n)} \cdot \frac{3(3m+5n)}{8(m+2n)} \cdot \frac{4(3m+8n)}{11(m+3n)} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{3}{n} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^3)^{n-m}}};$$

hieraus werden folgende besondere Fälle abgeleitet:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 13}{8 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 19}{11 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 25}{14 \cdot 9} \text{ ꝛc.} = \frac{3}{2} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 18}{8 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 27}{11 \cdot 10} \cdot \frac{5 \cdot 36}{14 \cdot 13} \text{ ꝛc.} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$\text{oder } = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 21}{8 \cdot 8} \cdot \frac{4 \cdot 30}{11 \cdot 11} \cdot \frac{5 \cdot 39}{14 \cdot 14} \text{ ꝛc.} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$\text{oder } = \frac{3}{4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdot \frac{10 \cdot 12}{11 \cdot 11} \cdot \frac{13 \cdot 15}{14 \cdot 14} \text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 23}{8 \cdot 9} \cdot \frac{4 \cdot 35}{11 \cdot 13} \cdot \frac{5 \cdot 47}{14 \cdot 17} \text{ ꝛc.} = \frac{3}{4} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 17}{5 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 29}{8 \cdot 11} \cdot \frac{4 \cdot 41}{11 \cdot 15} \cdot \frac{5 \cdot 53}{14 \cdot 19} \text{ ꝛc.} = \frac{3}{4} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)}}$$

Beyspiel 4.

§. 373. Für $\mu = 1$ und $\nu = 4$ wird

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^n)^3}} = \frac{4}{m} \cdot \frac{2(4m+n)}{5(m+n)} \cdot \frac{3(4m+5n)}{9(m+2n)} \cdot \frac{4(4m+9n)}{13(m+3n)}$$

$$= \frac{4}{n} \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^4)^{n-m}}};$$

woraus sich folgende specielle Fälle ergeben:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 14}{9 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 22}{13 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 30}{17 \cdot 9} \text{ ꝛc.} = 2 \int \frac{}{\sqrt{(}}$$

$$\text{oder} = \frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 7}{5 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 11}{7 \cdot 13} \cdot \frac{10 \cdot 15}{9 \cdot 17} \text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 19}{9 \cdot 7} \cdot \frac{4 \cdot 31}{13 \cdot 10} \cdot \frac{5 \cdot 43}{17 \cdot 13} \text{ ꝛc.} = \frac{4}{3} \int \frac{}{\sqrt[3]{(1}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 23}{9 \cdot 8} \cdot \frac{4 \cdot 35}{13 \cdot 11} \cdot \frac{5 \cdot 47}{17 \cdot 14} \text{ ꝛc.} = \frac{4}{3} \int \frac{}{\sqrt[3]{(1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 24}{9 \cdot 9} \cdot \frac{4 \cdot 40}{13 \cdot 13} \cdot \frac{5 \cdot 56}{17 \cdot 17} \text{ ꝛc.} = \int \frac{}{\sqrt[4]{(1}}$$

$$\text{oder} = \frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 12}{9 \cdot 9} \cdot \frac{8 \cdot 20}{13 \cdot 13} \cdot \frac{10 \cdot 28}{17 \cdot 17} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{4}{1} \cdot \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 12}{9 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 16}{13 \cdot 13} \cdot \frac{14 \cdot 20}{17 \cdot 17} \text{ ꝛc.}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2 \cdot 16}{5 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 32}{9 \cdot 11} \cdot \frac{4 \cdot 48}{13 \cdot 15} \cdot \frac{5 \cdot 64}{17 \cdot 19} \text{ ꝛc.} = \int \frac{d}{\sqrt[4]{(1}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 16}{9 \cdot 11} \cdot \frac{8 \cdot 24}{13 \cdot 15} \cdot \frac{10 \cdot 32}{17 \cdot 19} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 12}{9 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 16}{13 \cdot 15} \cdot \frac{16 \cdot 20}{17 \cdot 19} \text{ ꝛc.}$$

Sowohl in diesen als in den vorhergehenden Formeln ist der wenn $\mu = 3$ und $\nu = 4$ ist, enthalten.

Anmerkung.

§. 374. Übrigens gestatten diese Formeln, in welche w Größen μ und ν eingeführt haben, keine weitere Ausdehnung, al anfänglich angenommen haben, denn die Reihen hängen von de den Brüchen $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ ab; da sich nun diese aber immer auf d Benennung zurückbringen lassen, so wird die Betrachtung der Au

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$$

ıreichend seyn. Der Werth derselben für $x = 1$ wird durch das Product

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{n(m+k)}{m(k+n)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(k+2n)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(k+3n)} \text{ ꝛc.}$$

ırgestellt, welches, wenn in den einzelnen Gliedern die Factoren der ähler vertauscht, und die Glieder anders vertheilt werden, sich auch ıf folgende Form bringen läßt:

$$\frac{m+k}{mk} \cdot \frac{n(m+k+n)}{(m+n)(k+n)} \cdot \frac{2n(m+k+2n)}{(m+2n)(k+2n)} \cdot \frac{3n(m+k+3n)}{(m+3n)(k+3n)} \text{ ꝛc.;}$$

ı welcher Gestalt sich dieses Product dem Gedächtnisse leichter einzuprägen scheint. Da nun auf ähnliche Art

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

$$= \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)} \text{ ꝛc.,}$$

o erhalten wir, wenn wir jenen Ausdruck durch diesen dividiren:

$$\frac{\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}}{\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}} =$$

$$= \frac{pq(m+k)}{mk(p+q)} \cdot \frac{(p+n)(q+n)(m+k+n)}{(m+n)(k+n)(p+q+n)} \cdot \frac{(p+2n)(q+2n)(m+k+2n)}{(m+2n)(k+2n)(p+q+2n)} \text{ ꝛc.;}$$

dessen Glieder sämmtlich nach demselben Gesetze fortschreiten. Hieraus lassen sich aber herrliche Vergleichungen solcher Formeln ableiten, bey welchen wir der Kürze willen folgende bequeme Schreibart gebrauchen wollen, um sie desto leichter merken zu können.

Erklärung.

§. 375. Den Werth des Integrals $\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}$ für $x = 1$ wollen wir der Kürze wegen durch das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ andeuten, wobey man den Exponenten n sich denken muß, dem wir bey der Vergleichung mehrerer solcher Ausdrücke denselben Werth beylegen wollen.

Zusatz 1.

§. 376. Zuerst ist klar, daß $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ sey, und daß jedes dieser Symbole das Product

$$\frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \text{ ꝛc.}$$

bezeichne. Das Fortschreiten der Glieder dieses Productes ist für sich klar, indem die einzelnen Factoren sowohl des Zählers und Nenners stets um dieselbe Größe n vermehrt werden; so daß man, so bald das erste Glied bekannt ist, die folgenden leicht bilden kann.

Zusatz 2.

§. 377. Wenn $p = n$ ist, so ist offenbar wegen der Integrabilität unseres Ausdrucks

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \frac{1}{q} \text{ und eben so } \left(\frac{p}{n}\right) = \left(\frac{n}{p}\right) = \frac{1}{p}.$$

Weil ferner: $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{-\frac{p}{n}} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}$, so ist wegen

$$q - n = -p \text{ oder } p + q = n \left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}.$$

Der Werth des Ausdruckes $\left(\frac{p}{q}\right)$ läßt sich daher jedes Mal angeben, wenn entweder $p = n$ oder $q = n$ oder $p + q = n$ ist.

Zusatz 3.

§. 378. Da wir die Reductionsformel

$$\int x^{p+n-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}} = \frac{p}{p+q} \int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}$$

gefunden haben, so folgt auch hieraus, daß $\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q} \left(\frac{p}{q}\right)$, und hieraus wieder

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = \frac{p-n}{p+q-n} \left(\frac{p-n}{q}\right) = \frac{q-n}{p+q-n} \left(\frac{p}{q-n}\right);$$

dann aber ist auch $\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(p-n)(q-n)}{(p+q-n)(p+q-2n)} \left[\frac{p-n}{q-n}\right]$, und daher können jedes Mal die Zahlen p und q, die kleiner als n sind, ausgelassen werden.

Aufgabe 47.

§. 379. Aus je zwey solchen Formeln verschiedene Producte abzuleiten, welche einander gleich sind.

Auflösung.

Man suche solche Zahlen, a, b, c, d, und p, q, r, s, daß $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)$ werde. Da nun

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)} \text{ ꝛc.}, \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{c+d}{cd} \cdot \frac{n(c+d+n)}{(c+n)(d+n)} \text{ ꝛc.},$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \text{ ꝛc.}, \left(\frac{r}{s}\right) = \frac{r+s}{rs} \cdot \frac{n(r+s+n)}{(r+n)(s+n)} \text{ ꝛc.},$$

so wird jene Gleichheit Statt finden, wenn

$$\frac{(a+b)(c+d)}{abcd} = \frac{(p+q)(r+s)}{pqrs}, \text{ oder}$$

$$abcd(p+q)(r+s) = pqrs(a+b)(c+d)$$

wird; so zwar, daß, weil auf beyden Seiten sechs Factoren vorhanden sind, diese einzeln genommen einander gleich sind. Es müssen also unter je vier, a, b, c, d, und p, q, r, s, wenigstens je zwey einander gleich seyn. Setzt man also $s = d$, so muß

$$abc(p+q)(r+d) = pqr(a+b)(c+d) \text{ seyn.}$$

I. Man nehme nun den andern Factor r, welcher nicht gleich c seyn kann, weil sonst $\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)$ würde, und setze $r = b$, damit $ac(p+q)(b+d) = pq(a+b)(c+d)$ werde.

Hier kann weder p noch $q = p + q$ gesetzt werden, wir müssen also entweder

1) $p+q = a+b$ setzen, damit $ac(b+d) = pq(c+d)$ werde, weil weder c noch $b+d$ gleich $c+d$ werden kann, indem sonst entweder $d = o$, oder $b = c$ und $\left(\frac{r}{s}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)$ wäre; es bleibt uns also $a = c + d$ und $pq = c(b+d)$, und demnach $p = b + d$ und $q = c$, und hieraus erhält man $\left(\frac{c+d}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{b+d}{c}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$, oder man muß

2) $p+q = c+d$, also $ac(b+d) = pq(a+b)$ setzen. Hier kann c weder gleich p, noch gleich q seyn, weil sonst $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)$ werden würde; man setze demnach $c = a + b$, so daß

$pq = a(b+d)$ werde, also $p=a$, $q=b+d$, $r=b$, $s=d$, folglich $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{d}\right) = \left(\frac{b+d}{a}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$.

II. Weil für $r=b$ das Resultat vom vorigen nicht abweicht, indem a und b vertauscht werden können, so setze man $r=p+q$, so wird $abc(d+p+q) = pq(a+b)(c+d)$.

Weil nun r nicht gleich c werden kann, so darf man auch den Factor $d+p+q$ weder $=p$ noch $=q$ noch $=c+d$ setzen; es bleibt demnach $d+p+q=a+b$ und $abc=pq(c+d)$ zurück.

Da nun hier c nicht gleich $c+d$ gesetzt werden kann, und dieß sich eben so mit p und q verhält, so setze man $p=c$, so wird

$$a+b-c-d=q \quad \text{und} \quad ab=(c+d)(a+b-c-d),$$

daher $a=c+d$, $q=b$, $p=c$, $r=b+c$, $s=d$,

und so erhält man

$$\left(\frac{c+d}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right).$$

Zusatz 1.

§. 380. Diese Auflösungen sind beynahe dasselbe, und daher entstehen dann folgende drey Producte, aus je zwey Formeln die einander gleich sind:

$$\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c+d}{b}\right) = \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right) = \left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{b+d}{c}\right),$$

oder durch die Buchstaben p, q, r ausgedrückt:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).$$

Zusatz 2.

§. 381. Verwandelt man diese Ausdrücke in unendliche Producte, so findet man

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{pqr} \cdot \frac{n^2(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)} \cdot \frac{4n^2(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)} \text{ 2c.},$$

und hieraus leuchtet ein, daß man die drey Größen p, q, r wie immer unter einander vertauschen könne, zu welchem Schlusse auch schon jene drey Formeln berechtigen.

Zusatz 3.

§. 382. Führen wir die Integralformeln selbst ein, so erhalten wir folgende drey gleiche Producte:

$$\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int\frac{x^{p+q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}=\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{q+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

$$=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}.$$

Zusatz 4.

§. 383. Der Fall, in welchem $p+q=n$ ist, verdient bemerkt werden, denn dann werden, wegen $\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{n}{r}\right)=\frac{1}{r}$ und $\ldots) = \frac{\pi}{n\sin.\frac{p\pi}{n}}$, diese drey Producte $=\frac{\pi}{nr\sin.\frac{\pi p}{n}}$.

Es wird nämlich:

$$\int\frac{x^{n-p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{n-p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{p}}}$$

$$=\frac{\pi}{nr\sin.\frac{p\pi}{n}}.$$

Anmerkung.

§. 384. Die besondere Eigenschaft dieser Producte aus je zweyen en Ausdrücken ist höchst merkwürdig, und man erhält für die ver- denen, statt p, q, r zu substituirenden Zahlen, folgende beson- Gleichungen:

p	q	r	
1	1	2	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$
1	2	2	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)=\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$
1	2	3	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)$
1	1	3	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$
2	2	3	$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{1}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
1	3	3	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)$
2	3	3	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$
1	1	4	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$
1	2	4	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{1}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
1	3	4	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$
1	4	4	$\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$
2	2	4	$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$
2	3	4	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right)$
2	4	4	$\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{2}\right)$
3	3	4	$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{6}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)$
3	4	4	$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right)$.

Diese Formeln gelten für alle Werthe von n, und wenn Zahlen vorkommen, die größer als n sind, so kann man solche auf kleinere zurückführen, wie wir schon oben gesehen haben.

Aufgabe 48.

§. 385. **Verschiedene Producte zu entwickeln, welche aus drey solchen Ausdrücken zusammengesetzt und einander gleich sind.**

Auflösung.

Man betrachte das Product $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)$, so gibt die Entwicklung desselben

$$\frac{p+q+r+s}{pqrs} \cdot \frac{n^3(p+q+r+s+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)(s+n)} \text{ ꝛc.},$$

welches offenbar für jede Vertauschung der vier Buchstaben denselben Werth erhält. Dasselbe Resultat findet man auch durch die Entwickelung des Productes $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)$, wobey dieselbe Vertauschung Statt findet. Folgende Producte sind demnach alle einander gleich:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right); \quad \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right);$$
$$\left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{q}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right);$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right); \quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right);$$
$$\left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{r}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right);$$
$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right); \quad \left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{q+s}{p}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right);$$
$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right);$$
$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right); \quad \left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{q+s}{r}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right);$$
$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right).$$

Die Producte der zweyten Form ergeben sich, vermöge der vorhergehenden Eigenschaft, hieraus von selbst, denn es ist

$$\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p+q}\right).$$

Entwickelt man das Product $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)$, so erhält man für den ersten Theil $\frac{(p+q+r)(p+r+s)}{pqrs(p+r)}$, in welchem Ausdrucke sowohl p und r, als auch q und s mit einander vertauscht werden können, und so erhält man

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).$$

Anmerkung.

§. 386. So vielumfassend diese Resultate auch zu seyn scheinen, so gestatten sie dennoch keine neuen Vergleichungen, welche nicht schon in dem Frühern enthalten wären. Denn die letzte Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

entspringt aus der Multiplication folgender zwey Gleichungen:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

$$\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right).$$

Die Bildung der ersten Ausdrücke aber erhellt aus folgendem Beyspiele. Das Product der beyden Gleichungen

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)=\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right)$$

$$\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p+q}\right)\text{ gibt}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right).$$

Diese Vergleichungen aber dienen vorzüglich dazu, um die Werthe der verschiedenen Ausdrücke derselben Ordnung, oder umgekehrt für einen gegebenen Werth von n zu reduciren, damit die Integration auf so wenige Ausdrücke als möglich zurückgeführt werde, und wenn diese gegeben sind, die übrigen mittelst derselben bestimmt werden können.

Aufgabe 49.

§. 387. Die einfachsten Formeln zu suchen, auf welche die Integration aller in der Form

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)^{n-q}}}$$

enthaltenen Fälle zurückgeführt werden kann.

Auflösung.

Zuerst ist $\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{1}{p}$, und hieraus folgt:

$$\left(\frac{n}{1}\right) = 1;\ \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2};\ \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3};\ \left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4};\ \left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5} \text{ ꝛc.}$$

Ferner ist $\left(\frac{p}{n-p}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}$; es sind demnach die Werthe aller dieser Formeln bekannt, und wir wollen sie auf folgende Art bezeichnen:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right) = \alpha,\ \left(\frac{n-2}{2}\right) = \beta,\ \left(\frac{n-3}{3}\right) = \gamma,\ \left(\frac{n-4}{4}\right) = \delta \text{ ꝛc.};$$

allein diese reichen zur Bestimmung aller übrigen nicht hin, und wir müssen überdieß die folgenden als bekannt ansehen:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right) = A,\ \left(\frac{n-3}{2}\right) = B,\ \left(\frac{n-4}{3}\right) = C,\ \left(\frac{n-5}{4}\right) = D \text{ ꝛc.};$$

dann lassen sich aus diesen alle übrigen bestimmen, wenn wir die oben bewiesenen Gleichungen zu Hülfe nehmen. Wir werden daher vorzüglich die nachstehenden bemerken:

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{b}\right) = \left(\frac{n-a}{b}\right)\left(\frac{n-a+b}{a}\right)$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-a-b}{b}\right) = \left(\frac{n-b}{b}\right)\left(\frac{n-a-b}{a}\right)$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-b-1}{b}\right)\left(\frac{n-a-b}{a-1}\right) = \left(\frac{n-b}{b}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-b}{a}\right).$$

Setzen wir in der ersten Formel $a = b + 1$, so finden wir:

$$\left(\frac{n-1}{a}\right) = \left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{a-1}\right) : \left(\frac{n-a}{a-1}\right) \text{ wobey } \left(\frac{n}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1}$$

und daher wird durch die angenommenen Formeln der Werth des Ausdruckes $\left(\frac{n-1}{a}\right)$ bestimmt.

Wird aber in der zweyten Formel $b = 1$ gesetzt, so gibt diese

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right).$$

Die dritte Formel aber gibt für $b = 1$

$$\left(\frac{n-a-1}{a-1}\right) = \left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-2}{1}\right),$$

und so werden alle übrigen Ausdrücke von der Form $\left(\frac{n-a-2}{a}\right)$

-unden; und mit Hülfe dieser, wenn in der dritten Formel $b=2$ -eßt wird:

$$\binom{n-a-2}{a+1} = \binom{n-2}{2}\binom{n-a}{n-1}\binom{n-a-2}{a} : \binom{n-a}{a}\binom{n-3}{2};$$

-raus sich die Werthe der unter der Form $\binom{n-a-3}{a}$ erhaltenen -sdrücke ergeben, und so weiter fort die Werthe aller Aus-icke, deren allgemeine Form $\binom{n-a-b}{a}$ ist. Die Arbeit wird -r durch die erstern Gleichungen bedeutend abgekürzt. Denn hat -n $\binom{n-a-2}{a}$ gefunden, so gibt die erste Gleichung

$$\binom{n-2}{a+2} = \binom{n-a-2}{a+2}\binom{n}{a} : \binom{n-a-2}{a},$$

zweyte Gleichung aber

$$\binom{n-a-2}{2} = \binom{n-2}{2}\binom{n-a-2}{a} : \binom{n-a}{a};$$

-) auf ähnliche Art leitet man aus den unter der Form $\binom{n-a-3}{a}$ -haltenen bekannten Ausdrücken nachstehende ab:

$$\binom{n-3}{a+3} = \binom{n-a-3}{a+3}\binom{n}{a} : \binom{n-a-3}{a},$$

$$\binom{n-a-3}{3} = \binom{n-3}{3}\binom{n-a-3}{a} : \binom{n-a}{a}.$$

Zusaß.

§. 388. Aus der Gleichung

$$\binom{n-1}{a} = \frac{1}{a-1}\binom{n-a}{a} : \binom{n-a}{a-1}$$

-geben sich folgende Relationen:

$$\binom{n-1}{1} = \frac{\beta}{1A}; \binom{n-1}{2} = \frac{\gamma}{2B}; \binom{n-1}{3} = \frac{\delta}{3C}; \binom{n-1}{4} = \frac{\varepsilon}{4D} \text{ ꝛc.};$$

-s der Gleichung

$$\binom{n-a-1}{1} = \binom{n-1}{1}\binom{n-a-1}{a} : \binom{n-a}{a}$$

-r nachstehende:

$$\binom{n-2}{1} = \frac{2A}{\alpha}; \binom{n-3}{1} = \frac{2B}{\beta}; \binom{n-4}{1} = \frac{3C}{\gamma}; \binom{n-5}{1} = \frac{4D}{\delta} \text{ ꝛc.};$$

Zusatz 2.

§. 389. Die Gleichung

$$\binom{n-a-1}{a-1} = \binom{n-1}{1}\binom{n-a}{a-1}\binom{n-a-1}{a} : \binom{n-a}{a}\binom{n-2}{2} \text{ gibt:}$$

$$\binom{n-3}{1} = \frac{\alpha AB}{\beta A};\ \binom{n-4}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A};\ \binom{n-5}{3} = \frac{\alpha CD}{\delta A};\ \binom{n-6}{4} = \frac{\alpha DE}{\varepsilon A} \text{ etc.}$$

Hieraus ergeben sich die unter der Form

$$\binom{n-2}{a+2} = \binom{n-a-2}{a+2}\binom{n}{a} : \binom{n-a-2}{a}$$

enthaltenen Ausdrücke:

$$\binom{n-2}{3} = \frac{\gamma\beta A}{1\alpha AB};\ \binom{n-2}{4} = \frac{\delta\gamma A}{2\alpha BC};\ \binom{n-2}{5} = \frac{\varepsilon\delta A}{3\alpha CD};\ \binom{n-2}{6} = \frac{\zeta\varepsilon A}{4\alpha DE} \text{ etc.}$$

so wie auch die unter der Form

$$\binom{n-a-2}{2} = \binom{n-2}{2}\binom{n-a-2}{a} : \binom{n-a}{a}$$

begriffenen Formeln:

$$\binom{n-3}{2} = \frac{\beta\alpha AB}{\alpha\beta A};\ \binom{n-4}{2} = \frac{\beta\alpha BC}{\beta\gamma A};\ \binom{n-5}{2} = \frac{\beta\alpha CD}{\gamma\delta A};$$

$$\binom{n-6}{2} = \frac{\beta\alpha DE}{\delta\varepsilon A} \text{ etc.}$$

Zusatz 3.

§. 390. Die Gleichung

$$\binom{n-a-2}{a-1} = \binom{n-2}{2}\binom{n-a}{a-1}\binom{n-a-2}{a} : \binom{n-a}{a}\binom{n-3}{2} \text{ gibt:}$$

$$\binom{n-4}{1} = \frac{\alpha\beta ABC}{\beta\gamma AB};\ \binom{n-5}{2} = \frac{\alpha\beta BCD}{\gamma\delta AB};\ \binom{n-6}{3} = \frac{\alpha\beta CDE}{\delta\varepsilon AB};$$

$$\binom{n-7}{4} = \frac{\alpha\beta DEF}{\varepsilon\zeta AB} \text{ etc.;}$$

daher gibt $\binom{n-3}{a+3} = \binom{n-a-3}{a+3}\binom{n}{a} : \binom{n-a-3}{a}$ folgende Relationen:

$$\binom{n-3}{4} = \frac{\beta\gamma\delta AB}{1\alpha\beta ABC};\ \binom{n-3}{5} = \frac{\gamma\delta\varepsilon AB}{2\alpha\beta BCD};\ \binom{n-3}{6} = \frac{\delta\varepsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE} \text{ etc.;}$$

und aus der Gleichung:

$$\binom{n-a-3}{3} = \binom{n-3}{3}\binom{n-a-3}{a} : \binom{n-a}{a}$$

erhält man:

$$\binom{n-5}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma BCD}{\beta\gamma\delta AB};\ \binom{n-6}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma CDE}{\gamma\delta\varepsilon AB};\ \binom{n-7}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\varepsilon\zeta AB} \text{ etc.}$$

Beyspiel 1.

§. 391. Die in der Formel $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$, bey welcher $n=2$ ist, enthaltenen Fälle zu entwickeln, für welche $\left(\frac{p+2}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ ist.

Es ist einleuchtend, daß alle diese Formeln sich entweder algebraisch oder durch Winkelfunctionen darstellen lassen; bedienen wir uns aber der obigen Regel, so erhalten wir, weil die Zahlen p und q nicht größer als 2 seyn können, nur die einzige vom Kreise abhängige Formel $\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2\sin.\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} = \alpha$, und die möglichen Fälle sind also:

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = 1;\quad \left(\tfrac{2}{2}\right) = \tfrac{1}{2},$$
$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = \alpha.$$

Beyspiel 2.

§. 392. Die in dem Ausdrucke $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$, wo $n=3$ ist, enthaltenen Fälle zu bestimmen, bey welchen $\left(\frac{p+3}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Die Hauptfälle, auf welche die übrigen sich zurückleiten lassen, sind hier:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3\sin.\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \alpha, \text{ und } \left(\frac{1}{1}\right) = A = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}};$$

nimmt man diesen letztern Ausdruck als bekannt an, so sind die übrigen

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = 1;\quad \left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2};\quad \left(\tfrac{3}{3}\right) = \tfrac{1}{3};$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right) = \alpha;\quad \left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{\alpha}{A};$$
$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A.$$

Beyspiel 3.

§. 393. Die Fälle, welche in der Formel

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right), \text{ bey der } n=4 \text{ ist},$$

enthalten sind, darzustellen, für welche

$$\left(\frac{p+4}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right) \text{ ist.}$$

Die beyden Formeln

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \alpha, \text{ und } \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4 \sin. \frac{2\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} = \beta$$

hängen vom Kreisbogen ab. Überdieß aber ist noch eine besondere transcendente Größe nöthig, und diese ist $\left(\frac{2}{1}\right) = A$, die übrigen geben dann folgende Ausdrücke;

$$\left(\frac{4}{1}\right) = 1; \ \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2}; \ \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}; \ \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \alpha; \ \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\beta}{A}; \ \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\alpha}{2A};$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = A; \ \left(\frac{2}{2}\right) = \beta;$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Beyspiel 4.

§. 394. Die Fälle, bey welchen $\left(\frac{p+5}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ ist, und welche in dem Ausdrucke $\int \frac{x^{p-1}\, dx}{\sqrt[5]{(1 - x^5)^{5-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$, für welche $n = 5$ ist, enthalten sind, zu entwickeln.

Folgende zwey Formeln hängen vom Kreise ab:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{\pi}{5}} = \alpha, \text{ und } \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{5 \sin. \frac{2\pi}{5}} = \beta,$$

Außer diesen muß man noch zwey neue transcendente Größen annehmen, nämlich:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A \text{ und } \left(\frac{2}{2}\right) = B,$$

mittelst welchen sich alle übrigen auf folgende Art bestimmen lassen:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = 1; \ \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}; \ \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}; \ \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}; \ \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5};$$

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \alpha; \ \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\beta}{A}; \ \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta}{2B}; \ \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\alpha}{3A};$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A; \ \left(\frac{3}{2}\right) = \beta; \ \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\beta^2}{\alpha B};$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}; \ \left(\frac{2}{2}\right) = B;$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Beyspiel 5.

§. 395. Die in der Formel $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$ enthaltenen Fälle, für welche $n=6$ ist, zu bestimmen.

Die drey Werthe

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\pi}{6\sin.\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} = \alpha;\quad \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\pi}{6\sin.\frac{2\pi}{6}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \beta;$$

$$\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{6\sin.\frac{3\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} = \gamma$$

hängen vom Kreise ab, und wenn man ferner die zwey transcendenten Größen

$$\left(\frac{4}{1}\right) = A \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{2}\right) = B \text{ annimmt,}$$

so ergeben sich die übrigen sämmtlich auf folgende Art:

$\left(\frac{6}{1}\right) = 1$; $\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{6}{4}\right) = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{5}$; $\left(\frac{6}{6}\right) = \frac{1}{6}$;

$\left(\frac{5}{1}\right) = \alpha$; $\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\beta}{A}$; $\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}$; $\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\beta}{3B}$; $\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\alpha}{4A}$;

$\left(\frac{4}{1}\right) = A$; $\left(\frac{4}{2}\right) = \beta$; $\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$; $\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha B^2}$;

$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}$; $\left(\frac{3}{2}\right) = B$; $\left(\frac{3}{3}\right) = \gamma$;

$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}$; $\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha B^2}{\gamma A}$;

$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}$.

Anmerkung.

§. 396. Diese Bestimmungen lassen sich nach Belieben fortsetzen, nur muß man hierbey jene Fälle besonders bemerken, welche neue transcendente Größen enthalten. Die erste dieser neuen transcendenten Größen erscheint für $n=3$, und ist $\left(\frac{1}{1}\right) = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, dessen Werth durch ein unendliches Product ausgedrückt

$$= \frac{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 12}{10 \cdot 10} \text{ etc.,}$$

wie wir oben gesehen haben, welches mittelst der Formel $\left(\frac{1}{1}\right)$ wegen $n=3$ auch

$$= \frac{2}{1 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10} \cdot \frac{12 \cdot 14}{13 \cdot 13} \text{ etc.}$$

gefunden wird.

$pq = a(b+d)$ werde, also $p=a$, $q=b+d$, $r=b$, $s=d$, folglich $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{d}\right)=\left(\frac{b+d}{a}\right)\left(\frac{b}{d}\right)$.

II. Weil für $r=b$ das Resultat vom vorigen nicht abweicht, indem a und b vertauscht werden können, so setze man $r=p+q$, so wird $abc(d+p+q) = pq(a+b)(c+d)$.

Weil nun r nicht gleich c werden kann, so darf man auch den Factor $d+p+q$ weder $=p$ noch $=q$ noch $=c+d$ setzen; es bleibt demnach $d+p+q=a+b$ und $abc=pq(c+d)$ zurück.

Da nun hier c nicht gleich $c+d$ gesetzt werden kann, und dieß sich eben so mit p und q verhält, so setze man $p=c$, so wird

$$a+b-c-d=q \quad \text{und} \quad ab=(c+d)(a+b-c-d),$$

daher $a=c+d$, $q=b$, $p=c$, $r=b+c$, $s=d$,

und so erhält man

$$\left(\frac{c+d}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right).$$

Zusatz 1.

§. 380. Diese Auflösungen sind beynahe dasselbe, und daher entstehen dann folgende drey Producte, aus je zwey Formeln die einander gleich sind:

$$\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c+d}{b}\right)=\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right)=\left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{b+d}{c}\right),$$

oder durch die Buchstaben p, q, r ausgedrückt:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).$$

Zusatz 2.

§. 381. Verwandelt man diese Ausdrücke in unendliche Producte, so findet man

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{p+q+r}{pqr}\cdot\frac{n^2.(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)}\cdot\frac{4n^2(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)}\text{ ꝛc.},$$

und hieraus leuchtet ein, daß man die drey Größen p, q, r wie immer unter einander vertauschen könne, zu welchem Schlusse auch schon jene drey Formeln berechtigen.

Zusatz 3.

§. 382. Führen wir die Integralformeln selbst ein, so erhalten wir folgende drey gleiche Producte:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int \frac{x^{p+q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{q+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

$$= \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{p+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}.$$

Zusatz 4.

§. 383. Der Fall, in welchem $p+q=n$ ist, verdient bemerkt werden, denn dann werden, wegen $\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{n}{r}\right) = \frac{1}{r}$ und

$) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}$, diese drey Producte $= \frac{\pi}{nr \sin. \frac{\pi p}{n}}$

Es wird nämlich:

$$\int \frac{x^{n-p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{n-p+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}} = \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{p+r-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{p}}}$$

$$= \frac{\pi}{nr \sin. \frac{p\pi}{n}}.$$

Anmerkung.

§. 384. Die besondere Eigenschaft dieser Producte aus je zweyen
chen Ausdrücken ist höchst merkwürdig, und man erhält für die ver-
edenen, statt p, q, r zu substituirenden Zahlen, folgende beson-
e Gleichungen:

p	q	r	
1	1	2	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$
1	2	2	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$
1	2	3	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right) = \left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)$
1	1	3	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$
2	2	3	$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
1	3	3	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)$
2	3	3	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$
1	1	4	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$
1	2	4	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{1}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
1	3	4	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$
1	4	4	$\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$
2	2	4	$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$
2	3	4	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right)$
2	4	4	$\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{2}\right)$
3	3	4	$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{6}{4}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)$
3	4	4	$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right)$.

Diese Formeln gelten für alle Werthe von n, und wenn Zahlen vorkommen, die größer als n sind, so kann man solche auf kleinere zurückführen, wie wir schon oben gesehen haben.

Aufgabe 48.

§. 385. **Verschiedene Producte zu entwickeln, welche aus drey solchen Ausdrücken zusammengesetzt und einander gleich sind.**

Auflösung.

Man betrachte das Product $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)$, so gibt die Entwicklung desselben

$$\frac{p+q+r+s}{pqrs} \cdot \frac{n^3(p+q+r+s+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)(s+n)} \text{ 2c.},$$

welches offenbar für jede Vertauschung der vier Buchstaben denselben Werth erhält. Dasselbe Resultat findet man auch durch die Entwickelung des Productes $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)$, wobey dieselbe Vertauschung Statt findet. Folgende Producte sind demnach alle einander gleich:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right);\quad \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right);$$
$$\left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{q}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right);$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right);\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right);$$
$$\left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{r}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right);$$
$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right);\quad \left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{q+s}{p}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right);$$
$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right);$$
$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right);\quad \left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{q+s}{r}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right);$$
$$\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right).$$

Die Producte der zweyten Form ergeben sich, vermöge der vorhergehenden Eigenschaft, hieraus von selbst, denn es ist

$$\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p+q}\right).$$

Zweyter Abschnitt.

n der Integration der Differenzialgleichungen.

Kapitel I.

Von der Absonderung der veränderlichen Größen.

Erklärung.

§. 397. Man sagt, in einer Differenzialgleichung lassen sich Veränderlichen absondern, wenn sich die Gleichung in zwey ieder so theilen läßt, daß in einem jeden nur eine einzige Veränderliche mit ihrem Differenziale erscheint.

Zusatz 1.

§. 398. Ist also eine Differenzialgleichung so beschaffen, daß sie die Form $X dx = Y dy$ zurückgeführt werden kann, wobey X ß eine Function von x, und Y bloß eine Function von y bezeichnet, sagt man, jene Gleichung gestattet die Absonderung der Veränderlichen.

Zusatz 2.

§. 399. Bezeichnen also P und X nur Functionen von x, und n so Q und Y bloß Functionen von y, so läßt die Gleichung $dx = QX dy$ die Absonderung der Veränderlichen zu; denn durch Division mit XY geht sie über in $\frac{P}{X} dx = \frac{Q}{Y} dy$, wo die Veränderlichen abgesondert sind.

Zusatz 3.

§. 400. Es findet also allgemein in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = V$ Absonderung der Veränderlichen Statt, wenn V eine solche Func-

Auflösung.

Zuerst ist $\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{1}{p}$, und hieraus folgt:

$$\left(\frac{n}{1}\right) = 1;\ \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2};\ \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3};\ \left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4};\ \left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5} \text{ etc.}$$

Ferner ist $\left(\frac{p}{n-p}\right) = \frac{\pi}{n \sin. \frac{p\pi}{n}}$; es sind demnach die Werthe aller dieser Formeln bekannt, und wir wollen sie auf folgende Art bezeichnen:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right) = \alpha,\ \left(\frac{n-2}{2}\right) = \beta,\ \left(\frac{n-3}{3}\right) = \gamma,\ \left(\frac{n-4}{4}\right) = \delta \text{ etc.};$$

allein diese reichen zur Bestimmung aller übrigen nicht hin, und wir müssen überdieß die folgenden als bekannt ansehen:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right) = A,\ \left(\frac{n-3}{2}\right) = B,\ \left(\frac{n-4}{3}\right) = C,\ \left(\frac{n-5}{4}\right) = D \text{ etc.};$$

dann lassen sich aus diesen alle übrigen bestimmen, wenn wir die oben bewiesenen Gleichungen zu Hülfe nehmen. Wir werden daher vorzüglich die nachstehenden bemerken:

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{b}\right) = \left(\frac{n-a}{b}\right)\left(\frac{n-a+b}{a}\right)$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-a-b}{b}\right) = \left(\frac{n-b}{b}\right)\left(\frac{n-a-b}{a}\right)$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-b-1}{b}\right)\left(\frac{n-a-b}{a-1}\right) = \left(\frac{n-b}{b}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-b}{a}\right).$$

Setzen wir in der ersten Formel $a = b+1$, so finden wir:

$$\left(\frac{n-1}{a}\right) = \left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{a-1}\right) : \left(\frac{n-a}{a-1}\right) \text{ wobey } \left(\frac{n}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1}$$

und daher wird durch die angenommenen Formeln der Werth des Ausdruckes $\left(\frac{n-1}{a}\right)$ bestimmt.

Wird aber in der zweyten Formel $b = 1$ gesetzt, so gibt diese

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right).$$

Die dritte Formel aber gibt für $b = 1$

$$\left(\frac{n-a-1}{a-1}\right) = \left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-2}{1}\right),$$

und so werden alle übrigen Ausdrücke von der Form $\left(\frac{n-a-2}{a}\right)$

funden; und mit Hülfe dieser, wenn in der dritten Formel $b = 2$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{n-a-2}{a+1}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-a}{n-1}\right)\left(\frac{n-a-2}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right);$$

raus sich die Werthe der unter der Form $\left(\frac{n-a-3}{a}\right)$ erhaltenen usdrücke ergeben, und so weiter fort die Werthe aller Ausdrücke, deren allgemeine Form $\left(\frac{n-a-b}{a}\right)$ ist. Die Arbeit wird er durch die erstern Gleichungen bedeutend abgekürzt. Denn hat an $\left(\frac{n-a-2}{a}\right)$ gefunden, so gibt die erste Gleichung

$$\left(\frac{n-2}{a+2}\right) = \left(\frac{n-a-2}{a+2}\right)\left(\frac{n}{a}\right) : \left(\frac{n-a-2}{a}\right),$$

e zweyte Gleichung aber

$$\left(\frac{n-a-2}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-a-2}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right);$$

d auf ähnliche Art leitet man aus den unter der Form $\left(\frac{n-a-3}{a}\right)$ thaltenen bekannten Ausdrücken nachstehende ab:

$$\left(\frac{n-3}{a+3}\right) = \left(\frac{n-a-3}{a+3}\right)\left(\frac{n}{a}\right) : \left(\frac{n-a-3}{a}\right),$$

$$\left(\frac{n-a-3}{3}\right) = \left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-a-3}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right).$$

Zusatz.

§. 388. Aus der Gleichung

$$\left(\frac{n-1}{a}\right) = \frac{1}{a-1}\left(\frac{n-a}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a-1}\right)$$

geben sich folgende Relationen:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right) = \frac{\beta}{1A};\ \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\gamma}{2B};\ \left(\frac{n-1}{3}\right) = \frac{\delta}{3C};\ \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{4D}\ \text{etc.};$$

s der Gleichung

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right) = \left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right) : \left(\frac{n-a}{a}\right)$$

er nachstehende:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right) = \frac{aA}{\alpha};\ \left(\frac{n-3}{1}\right) = \frac{aB}{\beta};\ \left(\frac{n-4}{1}\right) = \frac{aC}{\gamma};\ \left(\frac{n-5}{1}\right) = \frac{aD}{\delta}\ \text{etc.}$$

Zusatz 2.

§. 389. Die Gleichung

$$\binom{n-a-1}{a-1} = \binom{n-1}{1}\binom{n-a}{a-1}\binom{n-a-1}{a} : \binom{n-a}{a}\binom{n-2}{2} \text{ gibt:}$$

$$\binom{n-3}{1} = \frac{\alpha AB}{\beta A};\ \binom{n-4}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A};\ \binom{n-5}{3} = \frac{\alpha CD}{\delta A};\ \binom{n-6}{4} = \frac{\alpha DE}{\varepsilon A} \text{ ꝛc.}$$

Hieraus ergeben sich die unter der Form

$$\binom{n-2}{a+2} = \binom{n-a-2}{a+2}\binom{n}{a} : \binom{n-a-2}{a}$$

enthaltenen Ausdrücke:

$$\binom{n-2}{3} = \frac{\gamma\beta A}{1\alpha AB};\ \binom{n-2}{4} = \frac{\delta\gamma A}{2\alpha BC};\ \binom{n-2}{5} = \frac{\varepsilon\delta A}{3\alpha CD};\ \binom{n-2}{6} = \frac{\zeta\varepsilon A}{4\alpha DE} \text{ ꝛc.}$$

so wie auch die unter der Form

$$\binom{n-a-2}{a-2} = \binom{n-2}{2}\binom{n-a-2}{a} : \binom{n-a}{a}$$

begriffenen Formeln:

$$\binom{n-3}{2} = \frac{\beta\alpha AB}{\alpha\beta A};\ \binom{n-4}{2} = \frac{\beta\alpha BC}{\beta\gamma A};\ \binom{n-5}{2} = \frac{\beta\alpha CD}{\gamma\delta A};$$

$$\binom{n-6}{2} = \frac{\beta\alpha DE}{\delta\varepsilon A} \text{ ꝛc.}$$

Zusatz 3.

§. 390. Die Gleichung

$$\binom{n-a-2}{a-1} = \binom{n-2}{2}\binom{n-a}{a-1}\binom{n-a-2}{a} : \binom{n-a}{a}\binom{n-3}{2} \text{ gibt:}$$

$$\binom{n-4}{1} = \frac{\alpha\beta ABC}{\beta\gamma AB};\ \binom{n-5}{2} = \frac{\alpha\beta BCD}{\gamma\delta AB};\ \binom{n-6}{3} = \frac{\alpha\beta CDE}{\delta\varepsilon AB};$$

$$\binom{n-7}{4} = \frac{\alpha\beta DEF}{\varepsilon\zeta AB} \text{ ꝛc.;}$$

daher gibt $\binom{n-3}{a+3} = \binom{n-a-3}{a+3}\binom{n}{a} : \binom{n-a-3}{a}$ folgende Relationen:

$$\binom{n-3}{4} = \frac{\beta\gamma\delta AB}{1\alpha\beta ABC};\ \binom{n-3}{5} = \frac{\gamma\delta\varepsilon AB}{2\alpha\beta BCD};\ \binom{n-3}{6} = \frac{\delta\varepsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE} \text{ ꝛc.;}$$

und aus der Gleichung:

$$\binom{n-a-3}{3} = \binom{n-3}{3}\binom{n-a-3}{a} : \binom{n-a}{a}$$

erhält man:

$$\binom{n-5}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma BCD}{\beta\gamma\delta AB};\ \binom{n-6}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma CDE}{\gamma\delta\varepsilon AB};\ \binom{n-7}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\varepsilon\zeta AB} \text{ ꝛc.}$$

Beyspiel 1.

§. 391. Die in der Formel $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$, bey welcher $n=2$ ist, enthaltenen Fälle zu entwickeln, für welche $\left(\frac{p+2}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ ist.

Es ist einleuchtend, daß alle diese Formeln sich entweder algebraisch oder durch Winkelfunctionen darstellen lassen; bedienen wir uns aber der obigen Regel, so erhalten wir, weil die Zahlen p und q nicht größer als 2 seyn können, nur die einzige vom Kreise abhängige Formel $\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2\sin.\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} = \alpha$, und die möglichen Fälle sind also:

$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = 1;\quad \left(\tfrac{2}{2}\right) = \tfrac{1}{2},$$
$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = \alpha.$$

Beyspiel 2.

§. 392. Die in dem Ausdrucke $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$, wo $n=3$ ist, enthaltenen Fälle zu bestimmen, bey welchen $\left(\frac{p+3}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Die Hauptfälle, auf welche die übrigen sich zurückleiten lassen, sind hier:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3\sin.\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \alpha, \text{ und } \left(\frac{1}{1}\right) = A = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}};$$

nimmt man diesen letztern Ausdruck als bekannt an, so sind die übrigen

$$\left(\tfrac{3}{1}\right) = 1;\quad \left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2};\quad \left(\tfrac{3}{3}\right) = \tfrac{1}{3};$$
$$\left(\tfrac{2}{1}\right) = \alpha;\quad \left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{\alpha}{A};$$
$$\left(\tfrac{1}{1}\right) = A.$$

Beyspiel 3.

§. 393. Die Fälle, welche in der Formel

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right),$$ bey der $n=4$ ist,

enthalten sind, darzustellen, für welche

$$\left(\frac{p+4}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right) \text{ ist.}$$

Die beyden Formeln

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\pi}{4\sin.\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\alpha, \text{ und } \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\pi}{4\sin.\frac{2\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}=\beta$$

hängen vom Kreisbogen ab. Überdieß aber ist noch eine besondere transcendente Größe nöthig, und diese ist $\left(\frac{2}{1}\right)=A$, die übrigen geben dann folgende Ausdrücke:

$$\left(\frac{4}{1}\right)=1;\ \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{1}{2};\ \left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3};\ \left(\frac{4}{4}\right)=\frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\alpha;\ \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\beta}{A};\ \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\alpha}{2A};$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=A;\ \left(\frac{2}{2}\right)=\beta;$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

Beyspiel 4.

§. 394. Die Fälle, bey welchen $\left(\frac{p+5}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ ist, und welche in dem Ausdrucke $\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right)$, für welche $n=5$ ist, enthalten sind, zu entwickeln.

Folgende zwey Formeln hängen vom Kreise ab:

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\frac{\pi}{5\sin.\frac{\pi}{5}}=\alpha, \text{ und } \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{5\sin.\frac{2\pi}{5}}=\beta,$$

Außer diesen muß man noch zwey neue transcendente Größen annehmen, nämlich:

$$\left(\frac{3}{1}\right)=A \text{ und } \left(\frac{2}{2}\right)=B,$$

mittelst welchen sich alle übrigen auf folgende Art bestimmen lassen:

$$\left(\frac{5}{1}\right)=1;\ \left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2};\ \left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3};\ \left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4};\ \left(\frac{5}{5}\right)=\frac{1}{5};$$

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\alpha;\ \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{\beta}{A};\ \left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\beta}{2B};\ \left(\frac{4}{4}\right)=\frac{\alpha}{3A};$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=A;\ \left(\frac{3}{2}\right)=\beta;\ \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\beta^2}{\alpha B};$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta};\ \left(\frac{2}{2}\right)=B;$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

Beyspiel 5.

§. 395. Die in der Formel $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$ enthaltenen Fälle, für welche $n=6$ ist, zu bestimmen.

Die drey Werthe

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\pi}{6\sin.\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} = \alpha;\quad \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\pi}{6\sin.\frac{2\pi}{6}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \beta;$$

$$\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{6\sin.\frac{3\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} = \gamma$$

hängen vom Kreise ab, und wenn man ferner die zwey transcendenten Größen

$$\left(\tfrac{4}{1}\right) = A \quad \text{und} \quad \left(\tfrac{3}{2}\right) = B \text{ annimmt,}$$

so ergeben sich die übrigen sämmtlich auf folgende Art:

$\left(\tfrac{6}{1}\right) = 1$; $\left(\tfrac{6}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$; $\left(\tfrac{6}{3}\right) = \tfrac{1}{3}$; $\left(\tfrac{6}{4}\right) = \tfrac{1}{4}$; $\left(\tfrac{6}{5}\right) = \tfrac{1}{5}$; $\left(\tfrac{6}{6}\right) = \tfrac{1}{6}$;

$\left(\tfrac{5}{1}\right) = \alpha$; $\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{\beta}{A}$; $\left(\tfrac{5}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}$; $\left(\tfrac{5}{4}\right) = \frac{\beta}{3B}$; $\left(\tfrac{5}{5}\right) = \frac{\alpha}{4A}$;

$\left(\tfrac{4}{1}\right) = A$; $\left(\tfrac{4}{2}\right) = \beta$; $\left(\tfrac{4}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$; $\left(\tfrac{4}{4}\right) = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha B^2}$;

$\left(\tfrac{3}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}$; $\left(\tfrac{3}{2}\right) = B$; $\left(\tfrac{3}{3}\right) = \gamma$;

$\left(\tfrac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}$; $\left(\tfrac{2}{2}\right) = \frac{\alpha B^2}{\gamma A}$;

$\left(\tfrac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}$.

Anmerkung.

§. 396. Diese Bestimmungen lassen sich nach Belieben fortsetzen, nur muß man hierbey jene Fälle besonders bemerken, welche neue transcendente Größen enthalten. Die erste dieser neuen transcendenten Größen erscheint für $n=3$, und ist $\left(\frac{1}{1}\right) = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, dessen Werth durch ein unendliches Product ausgedrückt

$$= \frac{3}{1}\cdot\frac{2\cdot 6}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 9}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 12}{10\cdot 10}\ \text{ꝛc.},$$

wie wir oben gesehen haben, welches mittelst der Formel $\left(\frac{1}{1}\right)$ wegen $n=3$ auch

$$= \frac{2}{1\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{9\cdot 11}{10\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 14}{13\cdot 13}\ \text{ꝛc.}$$

gefunden wird.

Bey den Werthen, welche sich für $n = 4$ ergeben, stößt man auf folgende neue transcendente Form:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

welche gleich ist folgendem Producte aus unendlich vielen Factoren:

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{8.11}{9.10}\cdot\frac{12.15}{13.14}\cdot\frac{16.19}{17.18}\ \text{ꝛc.} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2.7}{5.3}\cdot\frac{4.11}{9.5}\cdot\frac{6.15}{13.7}\cdot\frac{8.19}{17.9}\ \text{ꝛc.}$$

Die Reihe der Werthe für $n = 5$ biethet uns zwey neue transcendente Größen dar, nämlich:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = \frac{4}{1.3}\cdot\frac{5.9}{6.8}\cdot\frac{10.14}{11.13}\cdot\frac{15.19}{16.18}\ \text{ꝛc. und}$$

$$\left(\frac{2}{2}\right) = \int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = \frac{4}{2.2}\cdot\frac{5.9}{7.7}\cdot\frac{10.14}{12.12}\cdot\frac{15.19}{17.17}\ \text{ꝛc., so daß demnach}$$

$$\left(\frac{3}{1}\right):\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{2.2}{1.3}\cdot\frac{7.7}{6.8}\cdot\frac{12.12}{11.13}\cdot\frac{17.17}{16.18}\ \text{ꝛc.}$$

Unter den für $n = 6$ sich ergebenden Werthen erhält man die zwey transcendenten Größen:

1) $$\left(\frac{4}{1}\right) = \int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}} = \frac{1}{2}\int\frac{y\,dy}{\sqrt[6]{(1-y^3)^5}},$$

wenn man nämlich $x^2 = y$ setzt.

2) $$\left(\frac{3}{2}\right) = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}} = \frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z^2)^2}},$$

wenn man $y = x^2$ und $z = x^3$ annimmt. Hiebey ist noch zu bemerken, daß zwischen diesen Ausdrücken und den ersten Größen

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = 2\int\frac{y\,dy}{\sqrt[6]{(1-x^6)^4}} = 2\left(\frac{2}{2}\right)$$

eine Relation Statt finde, die durch die Gleichung:

$$2\gamma\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \alpha\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

ausgedrückt wird, so daß, wenn die erste transcendente Größe als bekannt angenommen wird, hier die zweyte hinreichend ist.

Erstes Buch

der

Integralrechnung.

Erster Theil. Zweyter Abschnitt.

Zweyter Abschnitt.

n der Integration der Differenzialgleichungen.

Kapitel I.

Von der Absonderung der veränderlichen Grössen.

Erklärung.

§. 397. Man sagt, in einer Differenzialgleichung lassen sich Veränderlichen absondern, wenn sich die Gleichung in zwey eder so theilen läßt, daß in einem jeden nur eine einzige Veränder-e mit ihrem Differenziale erscheint.

Zusatz 1.

§. 398. Ist also eine Differenzialgleichung so beschaffen, daß sie die Form $X dx = Y dy$ zurückgeführt werden kann, wobey X ß eine Function von x, und Y bloß eine Function von y bezeichnet, sagt man, jene Gleichung gestattet die Absonderung der Ver-erlichen.

Zusatz 2.

§. 399. Bezeichnen also P und X nur Functionen von x, und n so Q und Y bloß Functionen von y, so läßt die Gleichung $dx = QX dy$ die Absonderung der Veränderlichen zu; denn durch Division mit XY geht sie über in $\frac{P}{X} dx = \frac{Q}{Y} dy$, wo die Verän-lichen abgesondert sind.

Zusatz 3.

§. 400. Es findet also allgemein in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = V$ e Absonderung der Veränderlichen Statt, wenn V eine solche Func-

tion von x und y ist, daß sie sich in zwey Factoren auflösen läßt, deren einer bloß die Veränderliche x, der andere aber bloß y enthält. Denn ist $V = XY$, so erhält man die abgesonderte Gleichung $\frac{dy}{Y} = X dx$.

Anmerkung.

§. 401. Setzt man den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$, so betrachten wir, unserem Plane gemäß, in diesem Abschnitte, jene Beziehung zwischen x, y und p, durch welche p als irgend eine Function von x und y erklärt wird. Wir werden also hier zuerst jenen Fall untersuchen, in welchem sich jene Function in zwey Factoren auflösen läßt, deren einer bloß eine Function von x, der andere aber bloß von y bezeichnet, so daß also die Gleichung auf die Form $X dx = Y dy$ gebracht werden kann, wobey die beyden Veränderlichen von einander abgesondert erscheinen. Dieser Fall umfaßt die früher behandelten einfachen Formeln, bey welchen $Y = 1$, also $dy = X dx$ und $y = \int X dx$ ist, wo also das ganze Geschäft auf die Integration der Formel $X dx$ zurückgeführt wird. Die abgesonderte Gleichung $X dx = Y dy$ biethet auch keine größere Schwierigkeit dar, und läßt sich eben so wie die einfachen Formeln behandeln, wie wir in dem folgenden Probleme zeigen werden.

Aufgabe 50.

§. 402. **Eine Differenzialgleichung, in welcher die Veränderlichen abgesondert sind, zu integriren, oder eine Gleichung zwischen diesen Veränderlichen selbst zu finden.**

Auflösung.

Jede Gleichung, welche die Absonderung der Veränderlichen zuläßt, kann auf die Form $Y dy = X dx$ gebracht werden, wobey $X dx$ als das Differenziale einer Function von x, und $Y dy$ als das Differenziale irgend einer Function von y angesehen werden kann. Da nun diese Differenzialien einander gleich sind, so müssen auch ihre Integralien einander gleich seyn, oder sich nur durch eine constante Größe unterscheiden. Man integrire demnach den Vorschriften des vorigen Abschnittes gemäß die beyden Formeln für sich, oder man bestimme die Integralien $\int Y dy$ und $\int X dx$; sind diese bekannt, so wird auch

$\int Y\,dy = \int X\,dx + Const.$, durch welche Gleichung die endliche Relation zwischen den Größen x und y ausgedrückt wird.

Zusatz 1.

§. 403. So oft also eine Differenzialgleichung die Absonderung der Veränderlichen zuläßt, läßt sich die Integration, nach den für die einfacheren Formeln oben aufgestellten Vorschriften, jedesmal ausführen.

Zusatz 2.

§. 404. In der Integralgleichung $\int Y\,dy = \int X\,dx + Const.$ sind die Functionen $\int Y\,dy$ und $\int X\,dx$ entweder beyde algebraisch, oder die eine algebraisch und die andere transcendent, oder endlich beyde transcendent, und so wird also die zwischen x und y Statt findende Relation entweder durch einen algebraischen oder transcendenten Ausdruck gegeben.

Anmerkung.

§. 405. Manche bauen das ganze Fundament der Auflösung der Differenzialgleichungen auf die Absonderung der Veränderlichen, so daß wenn die vorgelegte Gleichung die Absonderung nicht zuläßt, eine zweckmäßige Substitution ausgemittelt werden muß, mit Hülfe deren die eingeführten neuen Veränderlichen sich absondern lassen. Es kömmt also hier nur darauf an, in irgend einer vorgelegten Differenzialgleichung eine solche Substitution vorzunehmen, oder neue veränderliche Größen einzuführen, daß dann die Absonderung der Veränderlichen möglich wird. Es wäre allerdings zu wünschen, eine Methode aufzufinden, für jeden Fall eine zweckmäßige Substitution auszumitteln; allein wir besitzen hiefür keine zuverläßige Regel, denn die meisten bisher üblichen Substitutionen gründen sich nicht auf bestimmte Prinzipien. Man kann daher auch die Absonderung der Veränderlichen nicht als das wahre Fundament aller Integrationen betrachten, besonders weil sie bey den Differenzialgleichungen eines zweyten oder höheren Grades keine Anwendung findet; weiter unten aber werde ich ein anderes Prinzip aus einander setzen, welches viel allgemeiner ist. Inzwischen wird es sich der Mühe lohnen, in diesem Kapitel die vorzüglichsten Integrationen, welche sich durch Absonderung behandeln lassen, aus einander zu setzen; da es bey dieser beschwerlichen Arbeit vom größten Nutzen ist, so viele Methoden als möglich kennen zu lernen.

Aufgabe 51.

§. 406. In der Differenzialgleichung $Pdx = Qdy$, in welchen P und Q homogene Functionen desselben Grades von x und y seyn sollen, die Veränderlichen abzusondern, und das Integrale desselben zu bestimmen.

Auflösung.

Da P und Q homogene Functionen derselben Ordnung von x und y sind, so wird $\frac{P}{Q}$ eine homogene Function von der Ordnung Null seyn, welche für $y = ux$ in eine Function von u übergeht. Man setze demnach $y = ux$, so verwandelt sich $\frac{P}{Q}$ in U, welches eine Function von u bezeichnet, so daß $dy = Udx$ wird. Weil aber $y = ux$, so wird $dy = udx + xdu$, und durch Substitution dieser Werthe erhält unsere Gleichung die Form $udx + xdu = Udx$, welches eine Gleichung zwischen zwey Veränderlichen x und u ist, und offenbar die Absonderung zuläßt. Denn bringt man die den Factor dx enthaltenden Glieder auf eine Seite, so erhält man

$$xdu = (U - u)\,dx \quad \text{und daher} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{U-u},$$

und durch Integration $lx = \int \frac{du}{U-u}$; so daß nun x durch die Veränderliche u bestimmt wird, und dann hieraus $y = ux$ selbst bekannt ist.

Zusatz 1.

§. 407. Ließe sich demnach das Integrale $\int \frac{du}{U-u}$ auch durch Logarithmen ausdrücken, so daß lx gleich wäre dem Logarithmus irgend einer Function von u, so erhielte man eine algebraische Gleichung zwischen x und u, und daher auch eine algebraische Gleichung zwischen x und y, wenn für u sein Werth $\frac{y}{x}$ gesetzt wird.

Zusatz 2.

§. 408. Da $y = ux$ ist, so wird $ly = lu + lx$, und daher, weil $lx = \int \frac{du}{U-u}$,

$$ly = lu + \int \frac{du}{U-u} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{U-u};$$

und wenn man diese Integralien in einen Ausdruck vereinigt, so wird $ly = \int \frac{U du}{u(U - u)}$. Übrigens ist hier zu bemerken, daß man nicht bey jeder Integration für lx und ly eine willkürliche Constante hinzufügen dürfe, denn sobald man dem einen Integrale eine Constante beygefügt hat, ist auch zugleich die dem andern Integrale hinzuzufügende beständige Größe bestimmt, weil $ly = lx + lu$ seyn muß.

Zusatz 3.

§. 409. Weil

$$\int \frac{du}{U - u} = \int \frac{du - dU + dU}{U - u} = \int \frac{dU}{U - u} - \int \frac{dU - du}{U - u},$$

so wird, da das letztere Glied durch Logarithmen integrirt werden kann,

$$lx = \int \frac{dU}{U - u} - l(U - u) \text{ oder } lx(U - u) = \int \frac{dU}{U - u}.$$

Es ist also einerley, ob man die Formel

$$\frac{du}{U - u} \text{ oder } \int \frac{dU}{U - u} \text{ integrirt.}$$

Anmerkung.

§. 410. Weil diese Methode auf alle homogene Gleichungen sich erstreckt, und hiebey selbst die Irrationalität, welche etwa in den Functionen P und Q vorhanden ist, nicht im Wege steht, so ist sie vorzüglich zu beachten, und den andern Methoden, welche nur auf besondere Gleichungen passen, bey weitem vorzuziehen. Wir sehen auch zugleich ein, daß alle Gleichungen, welche durch irgend eine Substitution homogen gemacht werden können, sich nach derselben Methode behandeln lassen. Wäre z. B. die Gleichung $dz + z^2 dx = \frac{a dx}{x^2}$ gegeben, so sieht man sogleich, daß sie für $z = \frac{1}{y}$ sich in die homogene Gleichung $-\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{y^2} = \frac{a dx}{x^2}$ oder $x^2 dy = dx(x^2 - ay^2)$ verwandle.

Übrigens ist es nicht schwierig zu untersuchen, ob eine vorgelegte Gleichung durch eine solche Substitution homogen gemacht werden könne. So oft diese Reduction möglich ist, ist es meistens hinreichend, die Substitutionen $x = u^m$ und $y = v^n$ zu versuchen, wo man dann leicht beurtheilen wird, ob die Exponenten m und n so angenommen werden können, daß überall dieselbe Anzahl von Dimensionen komme,

denn verwickeltere Substitutionen kann man in solchen Fällen schwerlich vornehmen, sie müßten sich denn gleichsam von selbst darbiethen. Es wird nicht unnütz seyn, die hier erklärte Integrationsmethode durch einige Beyspiele zu beleuchten.

Beyspiel 1.

§. 411. Die homogene Differenzialgleichung

$$xdx + ydy = mydx$$

zu integriren.

Hier ist also $\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y}$. Wird $y = ux$ gesetzt, so erhält man $\frac{my - x}{y} = \frac{mu - 1}{u}$, und daher, weil $dy = udx + xdu$ ist:

$$udx + xdu = \frac{mu - 1}{u} dx, \text{ also}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{udu}{mu - 1 - u^2} = - \frac{udu}{1 - mu + u^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = - \frac{udu - \frac{1}{2}mdu}{1 - mu + u^2} - \frac{\frac{1}{2}mdu}{1 - mu + u^2}.$$

Also durch Integration:

$$lx = - \tfrac{1}{2} l (1 - mu + u^2) - \tfrac{1}{2} m \int \frac{du}{1 - mu + u^2} + \text{Const.},$$

wobey drey Fälle zu betrachten sind, denn es ist entweder $m > 2$, $m < 2$ oder $m = 2$.

1) Es sey $m > 2$, so hat $1 - mu + u^2$ die Form $(u - a)\left(u - \frac{1}{a}\right)$ so daß $m = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a}$, und weil

$$\frac{du}{(u-a)\left(u - \frac{1}{a}\right)} = \frac{a}{a^2 - 1} \cdot \frac{du}{u - a} - \frac{a}{a^2 - 1} \cdot \frac{du}{u - \frac{1}{a}}, \text{ so wird}$$

$$lx = - \tfrac{1}{2} l (1 - mu + u^2) - \frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)} l \left(\frac{u - a}{u - \frac{1}{a}} \right) + \text{Const.},$$

$$\text{oder } lx\sqrt{(1 - mu + u^2)} + \frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)} l \frac{au - a^2}{au - 1} = lc,$$

und wenn wieder $u = \frac{y}{x}$ gesetzt wird, erhält man die Integralgleichung

$$l\sqrt{(x^2 - mxy + y^2)} + \frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)} l \frac{ay - a^2x}{ay - x} = lc, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{ay - a^2 x}{ay - x} \right)^{\frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)}} \sqrt{(x^2 - mxy + y^2)} = c.$$

2) Sey $m < 2$ oder $m = 2\cos.\alpha$, so wird:

$$\int \frac{du}{1 - 2u\cos.\alpha + u^2} = \frac{1}{\sin.\alpha} \text{ arc. tang. } \frac{u\sin.\alpha}{1 - u\cos.\alpha}.$$

Daher:

$$lx\sqrt{(1 - mu + u^2)} = C - \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha} \text{ arc. tang. } \frac{u\sin.\alpha}{1 - u\cos.\alpha},$$

oder:

$$l\sqrt{(x^2 - mxy + y^2)} = C - \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha} \text{ arc. tang. } \frac{y\sin.\alpha}{x - y\cos.\alpha}.$$

3) Sey $m = 2$, so wird $\int \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{1}{1-u}$, und daher:

$$lx(1 - u) = C - \frac{1}{1-u} \text{ oder } l(x - y) = B - \frac{x}{x-y}.$$

B e y s p i e l 2.

§. 412. Die homogene Differenzialgleichung

$$dx(\alpha x + \beta y) = dy(\gamma x + \delta y)$$

zu integriren.

Setzt man $y = ux$, so wird $udx + xdu = dx.\frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u}$, und daher:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du(\gamma + \delta u)}{\alpha + \beta u - \gamma u - \delta u^2} = \frac{du(\delta u + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\beta) + du(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta)}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta u^2}.$$

Also durch Integration:

$$lx = C - l\sqrt{[\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta u^2]} + \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\int \frac{du}{\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta u^2}$$

wobey dieselben Fälle wie vorhin zu betrachten sind; nämlich wenn der Nenner $\alpha + (\beta - \gamma)u - \delta u^2$ entweder zwey reelle und ungleiche, oder gleiche, oder endlich imaginäre Factoren hat.

B e y s p i e l 3.

§. 413. Man bestimme das Integrale der homogenen Differenzialgleichung

$$xdx + ydy = xdy - ydx.$$

Weil hier $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ ist, so wird für $y = ux$

$$udx + xdu = \frac{1+u}{1-u}dx \text{ oder } xdu = \frac{1+u^2}{1-u}dx;$$

hieraus folgt: $\frac{dx}{x} = \frac{du - udu}{1+u^2}$, und durch Integration:

$$lx = \text{arc. tang. } u - l\sqrt{(1+u^2)} + C, \text{ oder}$$

$$l\sqrt{(x^2+y^2)} = C + \text{arc. tang. } \frac{y}{x}.$$

Beyspiel 4.

§. 414. Man suche das Integrale der homogenen Differenzialgleichung $x^2 dy = (x^2 - ay^2)\, dx$.

Hier ist also $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay^2}{x^2}$, und für $y = ux$ erhält man

$$u\,dx + x\,du = (1 - au^2)\, dx; \text{ daher}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1 - u - au^2} \text{ und } lx = \int \frac{du}{1 - u - au^2},$$

mit dessen Entwickelung wir uns nicht aufzuhalten brauchen.

Beyspiel 5.

§. 415. Man bestimme das Integrale der homogenen Differenzialgleichung

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Es ist $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$, und wenn $y = ux$ gesetzt wird, erhält man

$u\,dx + x\,du = (u + \sqrt{(1 + u^2)})\, dx$ oder $x\,du = dx\sqrt{(1 + u^2)}$,

so daß $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{(1 + u^2)}}$ wird; das Integrale hievon ist:

$$lx = la + l\sqrt{[u + \sqrt{(1 + u^2)}]} = la + l\left[\frac{y + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}\right]$$

oder $lx = la + l\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)} - y}$, und hieraus folgt:

$x = \frac{ax}{\sqrt{(x^2 + y^2)} - y}$ oder $\sqrt{(x^2 + y^2)} = a + y$, und daher

$$x^2 = a^2 + 2ay.$$

Anmerkung.

§. 416. Hieher kann man auch die transcendenten Functionen rechnen, wenn nur die Functionen in Bezug auf x und y keine Dimensionen haben, weil sie für $y = ux$ zugleich in Functionen von u übergehen. Wenn z. B. in der Gleichung $P\,dx = Q\,dy$, in welcher P und Q homogene Functionen desselben Grades bezeichnen, auch noch Ausdrücke von der Form

$$l.\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x},\quad e^{\frac{y}{x}};\quad \text{arc. sin.} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},\quad \cos. \frac{nx}{y} \text{ u. s. w.}$$

vorkommen würden, so läßt sich die erklärte Methode mit gleichem Erfolge auch hier anwenden, weil für $y = ux$ der Quotient $\frac{dy}{dx}$ eine Function einer einzigen Veränderlichen u wird.

Aufgabe 52.

§. 417. In der Differenzialgleichung des ersten Grades

$$dx(\alpha + \beta x + \gamma y) = dy(\delta + \varepsilon x + \zeta y)$$

die veränderlichen Größen abzusondern, und die so erhaltene Gleichung zu integriren.

Auflösung.

Man setze $\alpha + \beta x + \gamma y = t$ und $\delta + \varepsilon x + \zeta y = u$, so daß $t dx = u dy$ wird; hieraus erhalten wir aber

$$x = \frac{\zeta t - \gamma u + \alpha\zeta + \gamma\delta}{\beta\zeta - \gamma\varepsilon} \text{ und } y = \frac{\beta u - \varepsilon t + \alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta\zeta - \gamma\varepsilon},$$

und hieraus: $dx : dy = \zeta dt - \gamma du : \beta du - \varepsilon dt$, und hieraus erhalten wir folgende Gleichung:

$$\zeta t dt - \gamma t du = \beta u du - \varepsilon u dt, \text{ oder}$$

$$dt(\zeta t + \varepsilon u) = du(\beta u + \gamma t).$$

Da diese Gleichung homogen ist, und mit dem Beyspiele §. 412 übereinstimmt, so ist die Integration schon bekannt.

Es gibt übrigens einen Fall, in welchem die vorgelegte Gleichung sich nicht homogen darstellen läßt, wenn nämlich $\beta\zeta - \gamma\varepsilon = 0$ ist, weil dann dadurch die eingeführten neuen Veränderlichen t und u verschwinden. Dieser Fall erfordert also eine besondere Auflösung, welche wir auf folgende Art erhalten, weil sich die vorgelegte Gleichung in diesem Falle auf die Form

$$\alpha dx + (\beta x + \gamma y) dx = \delta dy + n(\beta x + \gamma y) dy$$

bringen läßt, so setzen wir $\beta x + \gamma y = z$, und erhalten dadurch $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + z}{\delta + nz}$.

Nun ist aber $dy = \frac{dz - \beta dx}{\gamma}$ also $\frac{dz - \beta dx}{\gamma} = \frac{\alpha + z}{\delta + nz} dx$, wo sich offenbar die Veränderlichen absondern lassen, denn es wird $dx = \frac{dz(\delta + nz)}{\alpha\gamma + \beta\delta + (\gamma + n\beta) z}$. Die Integration dieses Ausdruckes führt auf Logarithmen, wenn nicht $\gamma + n\beta = 0$ ist, in welchem Falle das Integrale algebraisch wird, nämlich $x = \frac{2\delta z + nz^2}{2(\alpha\gamma + \beta\delta)} + C$.

Zusatz 1.

§. 418. Es läßt sich demnach die sogenannte Differenzialgleichung des ersten Grades im Allgemeinen nicht homogen darstellen, sondern es müssen die Fälle, in welchen $\beta z = \gamma \epsilon$ ist, ausgenommen werden, welche auch zu einer abgesonderten, allerdings von der frühern verschiedenen Gleichung führen.

Zusatz 2.

§. 419. Wenn bey diesen Ausnahmen $n = 0$ wird, oder wenn folgende Gleichung $\delta dy = dx(\alpha + \beta x + \gamma y)$ vorgelegt wird, und man setzt $\beta x + \gamma y = z$, so erhält man, weil $\delta = 1$ ist, die Gleichung $dx = \frac{dz}{\alpha\gamma + \beta + \gamma z}$, deren Integrale

$$\gamma x = l.\frac{\beta + \alpha\gamma + \gamma z}{C} = l.\frac{\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma x + \gamma^2 y}{C} \text{ oder}$$

$$\beta + \gamma(\alpha + \beta x + \gamma y) = C e^{\gamma x}.$$

Aufgabe 53.

§. 420. In der Differenzialgleichung

$$dy + Pydx = Qdx,$$

in welcher P und Q was immer für Functionen von x seyn mögen, die andere Veränderliche y aber mit ihrem Differenziale nirgends mehr als eine Dimension haben soll, die Veränderliche abzusondern und selbe zu integriren.

Auflösung.

Man suche eine solche Function X von x, daß nach der Substitution $y = Xu$ in der neuen Gleichung die Absonderung möglich wird, man erhält dann

$$Xdu + udX + PXudx = Qdx,$$

welche Gleichung die Absonderung offenbar zuläßt, wenn

$$dX + PXdx = 0 \text{ oder } \frac{dX}{X} = -Pdx \text{ ist;}$$

die Integration gibt $lX = -\int Pdx$ oder $X = e^{-\int Pdx}$.

Lassen wir diesen Ausdruck als die gesuchte Function X gelten, so erhalten wir die transformirte Gleichung

$$Xdu = Qdx \text{ oder } du = \frac{Qdx}{X} = e^{\int Pdx}.Qdx,$$

und daher ist, weil P und Q gegebene Functionen von x sind,

$$u = \int e^{\int P dx} Q dx = \frac{y}{X}.$$

Es ist demnach das Integrale der gegebenen Gleichung:

$$y = e^{-\int P dx} \int e^{\int P dx} Q dx.$$

Zusatz 1.

§. 421. Bey der Auflösung der Gleichung $dy + Pydx = Qdx$, hat man demnach eine doppelte Integration vorzunehmen, denn einmal hat man den Ausdruck $\int P dx$ und dann $\int e^{\int P dx} Q dx$ zu entwickeln. Übrigens ist es hinreichend, wenn man dem letztern Integrale eine willkürliche Constante hinzufügt, weil der Werth von y nur eine einzige erhält. Wenn man auch bey der ersten Integration $\int Pdx + C$ statt $\int P dx$ setzt, so findet man dennoch dasselbe Resultat für y.

Zusatz 2.

§. 422. Bey der Bestimmung des Integrals von $P dx$ ist es also hinreichend, ein besonderes Integrale davon zu nehmen, und daher wird man den in der Rechnung erscheinenden Constanten einen solchen Werth beylegen, daß das Integrale in einer möglichst einfachen Gestalt erscheine.

Anmerkung.

§. 423. Es gibt noch eine andere Gattung von homogenen Gleichungen, und zwar von derselben Ausdehnung, wie die vorige; bey welchen die Absonderung der Veränderlichen, demnach auch die Integration möglich ist. Hieraus fließt ein ungemeiner Nutzen für die Analysis, weil P und Q was immer für Functionen von x bezeichnen können. Auf diese Weise sieht man demnach ein, daß die Gleichung $R dx + P y dy = Q dx$, wobey R irgend eine Function von x bezeichnet, eben so behandelt werden könne; denn dividirt man die Gleichung durch R, so erscheint die transformirte in der vorgelegten Form, so bald man statt P und Q die Quotienten $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ setzt, und demnach ist das gesuchte Integrale

$$y = e^{-\int \frac{P dx}{R}} \int \frac{e^{\int \frac{P dx}{R}} Q dx}{R}.$$

Um dieses Problem recht deutlich darzustellen, werden wir einige Beyspiele beyfügen.

Beyspiel 1.

§. 424. Die Differenzialgleichung

$$dy + ydx = ax^n dx$$

zu integriren.

Hier ist $P = 1$ und $Q = ax^n$, also $\int P dx = x$, und die Integralgleichung wird seyn

$$y = e^{-x} \int e^x x^n dx;$$

welche Gleichung für ganze positive Werthe von n sich in folgender Form darstellt:

$$y = e^{-x} [e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \text{rc.}) + C],$$

oder durch wirkliche Entwickelung:

$$y = Ce^{-x} + x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{rc.};$$

und hieraus ergeben sich für die besondern Werthe von n folgende Ausdrücke:

für $n = 0$ wird $y = Ce^{-x} + 1$,
» $n = 1$ » $y = Ce^{-x} + x - 1$,
» $n = 2$ » $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2.1$,
» $n = 3$ » $y = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 3.2.x - 3.2.1$

u. s. w.

Zusatz 1.

§. 425. Setzt man demnach die Constante $C = 0$, so erhalten wir das besondere Integrale

$$y = x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{rc.},$$

welches also algebraisch ist, so bald n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Zusatz 2.

§. 426. Wenn das Integrale so bestimmt werden müßte, daß es für $x = 0$ verschwindet, so muß die Constante C gleich dem letzten Gliede, welches beständig ist, mit veränderten Zeichen gesetzt werden, und daher wird das Integrale immer transcendent seyn.

Beyspiel 2.

§. 427. Die Gleichung $(1 - x^2)dy + xydx = adx$ zu integriren.

Dividirt man diese Gleichung durch $1 - x^2$, so erhält sie die Form $dy + \frac{xy\,dx}{1 - x^2} = \frac{a\,dx}{1 - x^2}$, so daß also

$$P = \frac{x}{1 - x^2} \text{ und } Q = \frac{a}{1 - x^2}, \text{ und daher}$$

$$\int P\,dx = -\, l\sqrt{(1 - x^2)} \quad \text{und} \quad e^{\int P\,dx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}},$$

woraus man folgendes Integrale findet:

$$y = \sqrt{(1 - x^2)} \int \frac{a\,dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{ax}{\sqrt{(1 - x^2)}} + C\right) \sqrt{(1 - x^2)},$$

und daher ist das gesuchte Integrale

$$y = ax + C\sqrt{(1 - x^2)};$$

welches, wenn es so bestimmt werden soll, daß es für $x = 0$ verschwindet, übergeht in $y = ax$, weil dann $C = 0$ ist.

Beyspiel 3.

§. 428. **Die Gleichung $dy + \frac{ny\,dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = a\,dx$ zu integriren.**

Hier ist $P = \frac{n}{\sqrt{(1 + x^2)}}$ und $Q = a$, demnach

$$\int P\,dx = n\,l\,(x + \sqrt{(1 + x^2)}) \quad \text{und} \quad e^{\int P\,dx} = (x + \sqrt{(1 + x^2)})^n$$

$$\text{und} \quad e^{-\int P\,dx} = (\sqrt{(1 + x^2)} - x)^n;$$

wir erhalten demnach das gesuchte Integrale

$$y = (\sqrt{(1 + x^2)} - x)^n \int a\,dx\,[x + \sqrt{(1 + x^2)}]^n.$$

Um dieses zu entwickeln, setze man $x + \sqrt{(1 + x^2)} = u$, so wird

$$x = \frac{u^2 - 1}{2u}, \text{ daher } dx = \frac{du\,(1 + u^2)}{2u^2}, \text{ also}$$

$$\int u^n\,dx = \frac{u^{n-1}}{2(n-1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n+1)} + C$$

Weil nun $[\sqrt{(1 + x^2)} - x]^n = + u^{-n}$, [illegible] wird

$$y = Cu^{-n} + \frac{a u^{-1}}{2(n-1)} [illegible] \frac{du}{2(n+1)}, \text{ oder}$$

$$y = C[\sqrt{(1 + x^2)} - x]^n + [illegible] - 1)}\,[\sqrt{(1 + x^2)} - x]$$

$$[illegible] \frac{a}{2(n+1)}\,[\sqrt{(1 + x^2)} + x],$$

welcher Ausdruck sich auf [illegible]-nde Form bringen läßt:

Um dieses Problem recht deutlich darzustellen, werden wir einige Beyspiele beyfügen.

Beyspiel 1.

§. 424. Die Differenzialgleichung

$$dy + ydx = ax^n dx$$

zu integriren.

Hier ist $P = 1$ und $Q = ax^n$, also $\int P dx = x$, und die Integralgleichung wird seyn

$$y = e^{-x} \int e^x x^n dx;$$

welche Gleichung für ganze positive Werthe von n sich in folgender Form darstellt:

$$y = e^{-x} [e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \text{etc.}) + C],$$

oder durch wirkliche Entwickelung:

$$y = Ce^{-x} + x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{etc.};$$

und hieraus ergeben sich für die besondern Werthe von n folgende Ausdrücke:

für $n = 0$ wird $y = Ce^{-x} + 1$,

» $n = 1$ » $y = Ce^{-x} + x - 1$,

» $n = 2$ » $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2.1$,

» $n = 3$ » $y = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 3.2.x - 3.2.1$

u. s. w.

Zusatz 1.

§. 425. Setzt man demnach die Constante $C = 0$, so erhalten wir das besondere Integrale

$$y = x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{etc.},$$

welches also algebraisch ist, so bald n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Zusatz 2.

§. 426. Wenn das Integrale so bestimmt werden müßte, daß es für $x = 0$ verschwindet, so muß die Constante C gleich dem letzten Gliede, welches beständig ist, mit veränderten Zeichen gesetzt werden, und daher wird das Integrale immer transcendent seyn.

Beyspiel 2.

§. 427. Die Gleichung $(1 - x^2) dy + xydx = adx$ zu integriren.

Dividirt man diese Gleichung durch $1 - x^2$, so erhält sie die Form $dy + \frac{xydx}{1 - x^2} = \frac{adx}{1 - x^2}$, so daß also

$$P = \frac{x}{1 - x^2} \text{ und } Q = \frac{a}{1 - x^2}, \text{ und daher}$$

$$\int Pdx = -l\sqrt{(1 - x^2)} \text{ und } e^{\int Pdx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}},$$

woraus man folgendes Integrale findet:

$$y = \sqrt{(1 - x^2)} \int \frac{adx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{ax}{\sqrt{(1 - x^2)}} + C\right) \sqrt{(1 - x^2)},$$

und daher ist das gesuchte Integrale

$$y = ax + C\sqrt{(1 - x^2)};$$

welches, wenn es so bestimmt werden soll, daß es für $x = 0$ verschwindet, übergeht in $y = ax$, weil dann $C = 0$ ist.

Beyspiel 3.

§. 428. Die Gleichung $dy + \frac{nydx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = adx$ zu integriren.

Hier ist $P = \frac{n}{\sqrt{(1 + x^2)}}$ und $Q = a$, demnach

$$\int Pdx = nl(x + \sqrt{(1 + x^2)}) \text{ und } e^{\int Pdx} = (x + \sqrt{(1 + x^2)})^n$$

$$\text{und } e^{-\int Pdx} = (\sqrt{(1 + x^2)} - x)^n;$$

wir erhalten demnach das gesuchte Integrale

$$y = (\sqrt{(1 + x^2)} - x)^n \int adx\, [x + \sqrt{(1 + x^2)}]^n.$$

Um dieses zu entwickeln, setze man $x + \sqrt{(1 + x^2)} = u$, so wird

$$x = \frac{u^2 - 1}{2u}, \text{ daher } dx = \frac{du\,(1 + u^2)}{2u^2}, \text{ also}$$

$$\int u^n dx = \frac{u^{n-1}}{2(n - 1)} + \frac{u^{n+1}}{2(n + 1)} + C.$$

Weil nun $[\sqrt{(1 + x^2)} - x]^n = + u^{-n}$, so wird

$$y = Cu^{-n} + \frac{au^{-1}}{2(n - 1)} + \frac{au}{2(n + 1)}, \text{ oder}$$

$$y = C[\sqrt{(1 + x^2)} - x]^n + \frac{a}{2(n - 1)}[\sqrt{(1 + x^2)} - x]$$

$$+ \frac{a}{2(n + 1)}[\sqrt{(1 + x^2)} + x],$$

welcher Ausdruck sich auf folgende Form bringen läßt:

$$y = C[\sqrt{(1+x^2)} - x]^n + \frac{na}{n^2-1}\sqrt{(1+x^2)} - \frac{ax}{n^2-1};$$

wenn das Integrale so bestimmt werden soll, daß es für $x=0$ verschwindet, so muß man $C = -\frac{na}{n^2-1}$ setzen.

Aufgabe 54.

§. 429. In der Differenzialgleichung

$$dy + Pydx = Qy^{n+1}dx,$$

in welcher P und Q was immer für Functionen von x sind, die Veränderlichen abzusondern, und dieselbe dann zu integriren.

Auflösung.

Setzt man $\frac{1}{y^n} = z$, so geht diese Gleichung sogleich in die vorhin behandelte über; denn weil $\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{nz}$ ist, so verwandelt sich unsere Gleichung, wenn sie durch y dividirt wird, nämlich

$$\frac{dy}{y} + Pdx = Qy^n dx,$$ sogleich in

$$-\frac{dz}{nz} + Pdx = Q\frac{dx}{z},$$ oder

$$dz - nPzdx = -nQdx,$$ dessen Integrale

$$z = -e^{n\int Pdx}\int e^{-n\int Pdx} nQdx,$$ und daher

$$\frac{1}{y^n} = -ne^{n\int Pdx}\int e^{-n\int Pdx} Qdx$$ ist.

Man kann aber diesen Fall wie den vorhergehenden behandeln, indem man eine solche Function X sucht, daß durch die Substitution $y = uX$ eine Gleichung erhalten werde, bey welcher die Absonderung möglich ist; man erhält nämlich

$$Xdu + udX + PXudx = X^{n+1}u^{n+1}Qdx.$$

Man setze demnach $dX + PXdx = 0$ oder $X = e^{-\int Pdx}$, so erhält man

$$\frac{du}{u^{n+1}} = X^n Qdx = e^{-n\int Pdx}Qdx,$$

und durch Integration

$$-\frac{1}{nu^n} = \int e^{-n\int Pdx}Qdx.$$

Weil nun $u = \frac{y}{X} = e^{\int Pdx}y$, so erhält man wie vorhin

$$\frac{1}{y^n} = -ne^{n\int Pdx}\int e^{-n\int Pdx}Qdx.$$

Anmerkung.

§. 430. Es ist also dieser Fall von dem vorigen nicht verschieden, so daß hier nichts Neues gefunden wurde. Diese beyden Arten von Gleichungen sind beynahe die einzigen, welche einigermaßen allgemein sind, und die Absonderung der Veränderlichen zulassen. Die übrigen Fälle, welche durch Substitution zur Absonderung der Veränderlichen vorbereitet werden können, sind gewöhnlich zu speciell, als daß sich ein besonderer Nutzen davon erwarten ließe. Übrigens werden wir dennoch einige der merkwürdigsten Fälle hier aus einander setzen.

Aufgabe 55.

§. 431. Die Differenzialgleichung

$$\alpha y dx + \beta x dy + x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy) = o$$

absonderungsfähig darzustellen und sie zu integriren.

Auflösung.

Dividiren wir die ganze Gleichung durch xy, so erhalten wir die Formel

$$\alpha . \frac{dx}{x} + \beta . \frac{dy}{y} + x^m y^n \left(\gamma \frac{dx}{x} + \delta \frac{dy}{y}\right) = o,$$

und hieraus schließen wir sogleich, daß die Substitutionen $x^\alpha y^\beta = t$ und $x^\gamma y^\delta = u$ vorzüglich gut seyen, denn wir erhalten dadurch

$$\alpha . \frac{dx}{x} + \beta . \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \text{ und } \frac{\gamma dx}{x} + \frac{\delta dy}{y} = \frac{du}{u};$$

und daher geht unsere Gleichung über in

$$\frac{dt}{t} + x^m y^n \frac{du}{u} = o.$$

Allein aus unserer Substitution folgt

$$x^{\alpha\delta - \beta\gamma} = t^\delta u^{-\beta} \text{ und } y^{\alpha\delta - \beta\gamma} = u^\alpha t^{-\gamma},$$

und demnach

$$x = t^{\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}} . u^{\frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}} \text{ und } y = t^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}} . u^{\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$\frac{dt}{t} + t^{\frac{\delta m - \gamma n}{\alpha\delta - \beta\gamma}} . u^{\frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}} \frac{du}{u} = o, \text{ und daher}$$

$$t^{\frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma} - 1} dt + u^{\frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma} - 1} du = o.$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$\frac{t^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}}{\gamma n-\delta m}+\frac{u^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}}{\alpha n-\beta m}=C.$$

Wir haben also hier nur noch die Werthe $t=x^\alpha y^\beta$ und $u=x^\nu y^\delta$ zu setzen. Übrigens ist noch zu bemerken, daß wenn entweder $\gamma n-\delta m=o$ oder $\alpha n-\beta m=o$ ist, statt jener Glieder entweder $l t$ oder $l u$ gesetzt werden müsse.

Anmerkung.

§. 432. Auf die vorgelegte Gleichung wird man geleitet, wenn es sich um eine solche Relation zwischen den Veränderlichen x und y handelt, daß $\int y\,dx=axy+bx^{m+1}y^{n+1}$ werde. Um diese Frage zu beantworten, muß man die Differenzialien nehmen, wodurch man die Gleichung

$$y\,dx=ax\,dy+ay\,dx+bx^m y^n\,[(m+1)\,y\,dx+(n+1)\,x\,dy].$$

Vergleicht man diese Gleichung mit unserer Formel, so findet man

$\alpha=a-1$; $\beta=a$; $\gamma=(m+1)\,b$ und $\delta=(n+1)b$, also
$\alpha\delta-\beta\gamma=(n-m)\,ab-(n+1)\,b$,
$\alpha n-\beta m=(n-m)\,a-n$ und $\gamma n-\delta m=(n-m)\,b$,
woraus dann die Integralgleichung von selbst folgt.

Aufgabe. 56.

§. 433. In der Differenzialgleichung

$$y\,dy+dy\,(a+bx+nx^2)=y\,dx\,(c+nx)$$

die Veränderlichen abzusondern und dann zu integriren.

Auflösung.

Da hier $\frac{dy}{dx}=\frac{y\,(c+nx)}{y+a+bx+nx^2}$, so versuche man die Substitution $\frac{y\,(c+nx)}{y+a+bx+nx^2}=u$, oder $y=\frac{u\,(a+bx+nx^2)}{c+nx-u}$, so muß $dy=u\,dx$ werden, oder $\frac{dy}{y}=u\frac{dx}{y}=\frac{dx\,(c+nx-u)}{a+bx+nx^2}$.

Aber mit Hülfe der Logarithmen findet man

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dx\,(b+2nx)}{a+bx+nx^2}-\frac{n\,dx+du}{c+nx-u}=\frac{dx\,(c+nx-u)}{a+bx+nx^2},$$

welche Formel sich reducirt auf

$$\frac{du(c+nx)-nudx}{u(c+nx-u)}=\frac{dx(c-b-nx-u)}{a+bx+nx^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{du(c+nx)}{u(c+nx-u)}=\frac{dx(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}{(c+nx-u)(a+bx+nx^2)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch $c+nx-u$, so läßt sie sich offenbar absondern, und man erhält

$$\frac{dx}{(a+bx+nx^2)(c+nx)}=\frac{du}{u(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)},$$

deren Integration mittelst Logarithmen und Kreisbogen bewerkstelliget werden kann. In diesem Falle, welcher sich hier kaum voraussehen ließ, glückte zwar diese Substitution nach Wunsche, übrigens aber wird dieses Problem wenig nützen.

Aufgabe 57.

§. 434. Die Differenzialgleichung

$$(y-x)dy=\frac{ndx(1+y^2)\sqrt{(1+y^2)}}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

absonderungsfähig darzustellen und zu integriren.

Auflösung.

Wegen der doppelten Irrationalität läßt sich kaum absehen, was für eine Substitution man zu machen habe. Sicher aber muß sie so gewählt werden, daß nicht beyde Veränderliche zugleich mit demselben Wurzelzeichen behaftet werden. Zur Erreichung dieses Zweckes scheint die Substitution $y=\frac{x-u}{1+xu}$ die bequemste, denn dadurch wird

$$y-x=-\frac{u(1+x^2)}{1+xu};\quad 1+y^2=\frac{(1+x^2)(1+u^2)}{(1+xu)^2} \text{ und}$$

$$dy=\frac{dx(1+u^2)-du(1+x^2)}{(1+xu)^2}.$$

Setzen wir diese Werthe in unsere Gleichung, so erhalten wir

$$-udx(1+u^2)+udu(1+x^2)=ndx(1+u^2)\sqrt{(1+u^2)},$$

bey welcher Gleichung offenbar die Veränderlichen abgesondert werden können; man erhält nämlich

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{udu}{(1+u^2)[n\sqrt{(1+u^2)}+u]},$$

welche Gleichung für $1 + u^2 = t^2$ sich viel kürzer auf folgende Art darstellt:

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dt}{t[nt + \sqrt{(t^2 - 1)}]};$$

und wenn man $t = \frac{1 + s^2}{2s}$ setzt, so fällt die Irrationalität weg, und man erhält die Gleichung

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{-2ds(1 - s^2)}{(1 + s^2)(n + 1 + (n - 1)s^2)} = \frac{2ds}{1 + s^2} - \frac{2n\,ds}{n + 1 + (n - 1)s^2},$$

deren Integration weiter keine Schwierigkeit darbiethet.

Anmerkung.

§. 435. Hier verdient vorzüglich die Substitution $y = \frac{x - u}{1 + xu}$ bemerkt zu werden, durch welche die doppelte Irrationalität beseitigt wurde; es wird sich daher der Mühe lohnen, zu untersuchen, welche Dienste die allgemeinere Substitution $y = \frac{\alpha x + u}{1 + \beta xu}$ leistet. Wir erhalten hiedurch

$$\alpha - \beta y^2 = \frac{(\alpha - \beta u^2)(1 - \alpha\beta x^2)}{(1 + \beta xu)^2}, \quad y - \alpha x = \frac{u(1 - \alpha\beta x^2)}{1 + \beta xu} \text{ und}$$

$$dy = \frac{dx(\alpha - \beta u^2) + du(1 - \alpha\beta x^2)}{(1 + \beta xu)^2},$$

und wir sehen nun leicht ein, bey welchen Gleichungen wir diese Substitutionen mit Vortheil anwenden können; es wird nämlich durch dieselbe die doppelte Irrationalität $\frac{\sqrt{(\alpha - \beta y^2)}}{\sqrt{(1 - \alpha\beta x^2)}}$ auf die einfache $\frac{\sqrt{(\alpha - \beta u^2)}}{1 + \beta xu}$ zurückgeführt, welche sich dann weiter auf eine leichte Weise rational darstellen läßt. Dieß sind beyläufig die Fälle, bey welchen die Absonderung möglich ist; zieht man diese gut in Erwägung, so bahnt man sich leicht den Weg zu den übrigen Fällen, welche bisher behandelt worden sind; übrigens wollen wir noch jene Fälle untersuchen, in welchen die Gleichung $dy + y^2 dx = ax^m dx$ die Absonderung der Veränderlichen zuläßt, weil man häufig auf solche Gleichungen stößt, und die vorgelegte ehemals von den Geometern mit vielem Eifer behandelt worden ist.

Aufgabe 58.

§. 436. Für die Gleichung $dy + y^2 dx = ax^m dx$ die Werthe des Exponenten m zu bestimmen, für welche

in derselben die Veränderlichen abgesondert werden können.

Auflösung.

Ist $m = 0$, so findet in dieser Gleichung die Absonderung an und für sich Statt, denn weil dann $dy = dx(a - y^2)$, so wird $dx = \frac{dy}{a - y^2}$. Unsere ganze Untersuchung muß demnach dahin gerichtet seyn, mittelst Substitution die übrigen Fälle auf diese zurückzuführen. Setzen wir $y = \frac{b}{z}$, so wird $-bdz + b^2 dx = ax^m z^2 dx$; damit nun diese Formel der vorgelegten ähnlich werde, setze man $x^{m+1} = t$, damit $x^m dx = \frac{dt}{m+1}$ und $dx = \frac{t^{\frac{-m}{m+1}} dt}{m+1}$ werde, so erhält man

$$bdz + \frac{az^2 dt}{m+1} = \frac{b^2}{m+1} \cdot t^{\frac{-m}{m+1}} dt.$$

Setzt man nun $b = \frac{a}{m+1}$, so wird dieser Ausdruck dem gegebenen mehr ähnlich, man erhält dann nämlich

$$dz + z^2 dt = \frac{a}{(m+1)^2} t^{\frac{-m}{m+1}} dt.$$

Wäre also diese Gleichung absonderungsfähig, so würde es auch die vorgelegte Gleichung durch jene Substitution, und umgekehrt. Hieraus ziehen wir nun den Schluß, daß wenn die gegebene Gleichung für $m = n$ die Absonderung zuläßt, diese auch für $m = \frac{-n}{n+1}$ Statt finden werde. Der Fall für $m = 0$ biethet uns nicht die Auflösung eines anderen Falles dar.

Setzen wir $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{x^2}$, damit

$$dy = -\frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{x^2} + \frac{2zdx}{x^3} \text{ und}$$

$$y^2 dx = \frac{dx}{x^2} - \frac{2zdx}{x^3} + \frac{z^2 dx}{x^4} \text{ werde,}$$

so erhalten wir

$$-\frac{dz}{x^2} + \frac{z^2 dx}{x^4} = ax^m dx, \text{ oder}$$

$$dz - \frac{z^2 dx}{x^2} = -ax^{m+2} dx.$$

Wird nun $x = \frac{1}{t}$ gesetzt, also $dz + z^2 dt = a t^{-m-4} dt$, so sehen wir aus der Ähnlichkeit dieses Ausdruckes mit dem vorgelegten, daß wenn die Absonderung für $m = n$ gelingt, diese auch für $m = -n-4$ möglich seyn müsse. Aus dem Falle, wo $m = n$, folgern wir demnach zwey andere, in welchen nämlich $m = \frac{-n}{n+1}$ und $m = -n-4$. Da nun der Fall, wo $m = 0$, bekannt ist, so erhalten wir, wenn diese Formeln abwechselnd angewendet werden, folgende Fälle:

$$m = -4,\ m = -\tfrac{4}{3},\ m = -\tfrac{8}{3},\ m = -\tfrac{8}{5},\ m = -\tfrac{12}{5},$$
$$m = -\tfrac{12}{7},\ m = -\tfrac{16}{7},\ \text{rc.},$$

welche Fälle sämmtlich in der Formel $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$ enthalten sind.

Zusatz 1.

§. 437. Wenn demnach entweder

$$m = \frac{-4i}{2i+1} \quad \text{oder} \quad m = \frac{-4i}{2i-1}$$

ist, so läßt sich die Gleichung $dy + y^2 dx = a x^m dx$ durch einige wiederholte Substitutionen endlich auf die Form $du + u^2 dv = c dv$ bringen, für welche die Absonderung sowohl, als die Integration bekannt ist.

Zusatz 2.

§. 438. Wenn nämlich $m = \frac{-4i}{2i+1}$ ist, so wird die Gleichung

$$dy + y^2 dx = a x^m dx$$

durch die Substitutionen $x = t^{\frac{1}{m+1}}$ und $y = \frac{a}{(m+1)z}$ zurückgeführt auf die Form $dz + z^2 dt = \frac{a}{(m+1)^2} t^n dt$, wo $n = \frac{-4i}{2i-1}$ ist, welcher Fall um einen Grad niedriger zu erachten ist.

Zusatz 3.

§. 439. Ist aber $m = \frac{-4i}{2i-1}$, so wird die Gleichung

$$dy + y^2 dx = a x^m dx$$

durch die Substitutionen

$$x = \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} \quad \text{oder} \quad y = t - t^2 z$$

auf den Ausdruck

$$dz + z^2 dt = at^n dt$$

reducirt, in welchem

$$n = \frac{-4(i-1)}{2i-1} = \frac{-4(i-1)}{2(i-1)+1},$$

welcher Fall ebenfalls um einen Grad niedriger ist.

Zusatz 4.

§. 440. In allen Fällen also, in welchen, wie wir eben gefunden haben, die Absonderung möglich ist, erhält man für den Exponenten m negative Zahlen zwischen den Gränzen 0 und -4. Ist i unendlich groß, so erhält man den Fall, in welchem $m = -2$ ist, der schon für sich bekannt ist, indem die Gleichung $dy + y^2 dx = \frac{a dx}{x^2}$ für $y = \frac{1}{z}$ homogen wird.

Anmerkung 1.

§. 441. Die Gleichung $dy + y^2 dx = ax^m dx$ nennt man gewöhnlich die Riccatische, nach dem Grafen Riccati, welcher zuerst absonderungsfähige Fälle vorlegte. Ich habe sie hier in der einfachsten Form dargestellt, denn die Gleichung $dy + Ay^2 t^\mu dt = Bt^\lambda dt$ läßt sich sogleich auf dieselbe zurückführen, wenn man $At^\mu dt = dx$ und $At^{\mu+1} = (\mu+1)x$ setzt. Obgleich die beyden Substitutionen, deren wir uns hier bedienten, äußerst einfach sind, so lassen sich dennoch durch die Anwendung zusammengesetzterer Substitutionen keine andere absonderungsfähige Fälle entdecken. Es scheint deßhalb allerdings merkwürdig, daß diese Gleichung äußerst selten die Absonderung zulasse, obgleich die Anzahl der Fälle, in welchen dieses angeht, wirklich unendlich groß ist. Übrigens kann diese Untersuchung vom Exponenten auf den einfachsten Coefficienten geführt werden, denn setzt man $y = x^{\frac{m}{2}} z$, so erhält man

$$dz + \frac{mz dx}{2x} + x^{\frac{m}{2}} z^2 dx = ax^{\frac{m}{2}} dx,$$

wo, wenn $x^{\frac{m}{2}} dx = dt$ und $x^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m+2}{2} t$ gesetzt wird,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{(m+2)t}$$ wird, und daher ist

$$dz + \frac{mz\,dt}{(m+2)t} + z^2 dt = a\,dt,$$

welche Gleichung demnach, so oft $\frac{m}{m+2} = \pm 2i$, oder gleich einer positiven oder negativen geraden Zahl ist, die Absonderung zuläßt, so daß die Gleichung

$$dz \pm \frac{2iz\,dt}{t} + z^2 dt = a\,dt$$

immer integrabel ist. Setzt man außerdem $z = u - \frac{m}{2(m+2)t}$, so erhält man

$$du + u^2 dt = a\,dt - \frac{m(m+4)\,dt}{4(m+2)^2 t^2},$$

und für die absonderungsfähigen Fälle $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$ findet man

$$du + u^2 dt = a\,dt + \frac{i(i \pm 1)\,dt}{t^2}.$$

Die weitere Entwickelung dieser äußerst wichtigen Gleichung werden wir in dem Folgenden lehren, wo wir von der Integration der Differenzialgleichungen durch unendliche Reihen handeln werden, weil wir dort die absonderungsfähigen Fälle leichter auffinden, und zugleich die Integralien werden angeben können.

Anmerkung 2.

§. 442. Es scheint kaum möglich zu seyn, ausführlichere, auch nur einigermaßen brauchbare Vorschriften für die Absonderung der Veränderlichen zu geben, woraus denn erhellt, daß diese Methode nur bey den wenigsten Differenzialgleichungen ihre Anwendung finde; ich werde daher zur Erklärung eines anderen Princips übergehen, nach welchem die Integrationen ausgeführt werden können, und welches zugleich viel umfassender ist, indem es ebenfalls auf Differenzialgleichungen höherer Grade angewendet werden kann, so daß dieses Princip als die wahre und natürliche Quelle aller Integrationen angesehen werden darf. Es gründet sich dieses Princip darauf, daß, wenn irgend eine Differenzialgleichung zwischen zwey Veränderlichen gegeben ist, immer eine solche Function gefunden werden könne, mit welcher die vorgelegte Gleichung multiplicirt, integrabel werde. Man muß nämlich alle Glieder der Gleichung auf dieselbe Seite bringen, damit die Gleichung die Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

erhalte, und dann behaupte ich, gibt es immer eine solche Function von x und y, z. B. V, daß nach verrichteter Multiplication die Formel

$$VPdx + VQdy$$

den Charakter der Integrabilität annimmt, oder daß diese Formel als das wirkliche Differenziale irgend einer Function zweyer veränderlichen Größen erscheint. Denn setzt man diese Function $= S$, so daß $dS = VPdx + VQdy$ wird, so erhält man, weil $Pdx + Qdy = o$ ist, auch $dS = o$, und daher $S = Const.$, welche Gleichung demnach das Integrale, und zwar das vollständige Integrale der Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = o$ seyn wird. Es kömmt also hier alles darauf an, jenen Multiplicator V aufzufinden.

Kapitel II.

Von der Integration der Gleichungen, mit Hülfe der Multiplicatoren.

Aufgabe 69.

§. 443. Zu untersuchen, ob eine vorgelegte Differenzialgleichung für sich integrabel sey, oder nicht.

Auflösung.

Hat man alle Theile einer Gleichung auf dieselbe Seite des Gleichheitszeichens gebracht, damit dieselbe die Form $Pdx + Qdy = 0$ erhalte, so ist diese Gleichung für sich integrabel, wenn die Formel $Pdx + Qdy$ wirklich das Differenziale irgend einer Function zweyer Veränderlichen x und y ist. Dieß ist aber, wie wir in der Differenzialrechnung gezeigt haben, der Fall, wenn das Differenziale von P in Bezug auf y (wenn y allein als veränderlich betrachtet wird) zu dy dasselbe Verhältniß hat, in welchem das Differenziale von Q in Bezug auf x zu dx steht, oder nach der in der Differenzialrechnung angenommenen Bezeichnungsart, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist; denn es sey Z jene Function, deren Differenziale $Pdx + Qdy$ ist, so ist nach der angeführten Bezeichnungsart $P = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$ und $Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$; hieraus folgt also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,dx}\right)$. Nun ist aber $\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,.\,dx}\right)$ und daher $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ist daher die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ vorgegeben, so wird man auf folgende Art erkennen, ob dieselbe integrabel sey, oder nicht. Man suche durch Differenziation $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$; sind diese Werthe einander gleich, so ist die Gleichung für sich integrabel; im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Zusatz 1.

§. 444. Alle Differenzialgleichungen, in welchen die Veränderlichen abgesondert erscheinen, sind also für sich integrabel, denn sie

haben die Form $X dx + Y dy = 0$, wobey X bloß eine Function von x, und Y bloß eine Function von y ist; und man erhält demnach $\left(\frac{dX}{dy}\right) = 0$ und $\left(\frac{dY}{dx}\right) = 0$.

Zusatz 2.

§. 445. Wenn daher in der vorgelegten Differenzialgleichung $P dx + Q dy = 0$, der Quotient $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$, und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$ ist, so sind umgekehrt in derselben die veränderlichen Größen abgesondert, denn es wird dann P bloß eine Function von x, und Q bloß eine Function von y seyn. Die abgesonderten Gleichungen bilden demnach gleichsam die erste Gattung der für sich integrabeln Gleichungen.

Zusatz 3.

§. 446. Übrigens leuchtet die Möglichkeit von selbst ein, daß $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ werde, obgleich keiner dieser Werthe der Nulle gleich ist. Es gibt demnach auch Gleichungen, die für sich integrabel sind, obgleich die Veränderlichen in denselben nicht abgesondert erscheinen.

Anmerkung.

§. 447. Dieses Kennzeichen für die Beurtheilung der Integrabilität der Gleichungen ist für die Integrationsmethode, welche wir lehren wollen, von größter Wichtigkeit; denn hat man eine für sich integrable Gleichung, so kann das Integrale derselben nach den bereits gelehrten Vorschriften gefunden werden. Ist aber die gegebene Gleichung nicht für sich integrabel, so wird es immer eine Größe geben, mit welcher dieselbe multiplicirt den Charakter der Integrabilität erhält. Ist daher irgend eine Gleichung gegeben, die für sich nicht integrabel ist, so wird es bloß darauf ankommen, einen schicklichen Multiplicator zu finden, welcher dieselbe integrabel macht. Würden wir stets einen solchen Factor aufzufinden im Stande seyn, so wäre bey dieser Integrationsmethode nichts mehr zu wünschen übrig; allein diese Bestimmung gelingt höchst selten, und erstreckt sich kaum weiter als auf jene Gleichungen, welche wir mit Hülfe der Absonderung der Veränderlichen zu behandeln bereits gelehrt haben. Übrigens trage ich keineswegs Bedenken, dieser Methode einen entschiedenen Vorzug vor der vorigen einzuräumen, weil sie der Natur der Gleichungen mehr ange-

messen scheint, und sich auf Differenzialgleichungen höherer Grade erstreckt, bey welchen die Absonderung keine Anwendung mehr findet.

Aufgabe 60.

§. 448. **Das Integrale einer Differenzialgleichung zu bestimmen, von welcher bekannt ist, daß sie integrabel sey.**

Auflösung.

Es sey $Pdx + Qdy = 0$ die Differenzialgleichung, in welcher $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn soll, so ist $Pdx + Qdy$ das Differenziale irgend einer Function zweyer Veränderlichen x und y, welche wir durch Z bezeichnen wollen, so daß also $dZ = Pdx + Qdy$ wird. Weil wir also die Gleichung $dZ = 0$ haben, so ist das gesuchte Integrale $Z = C$. Es kommt also hier einzig und allein darauf an, die Function Z zu bestimmen, was ohne Schwierigkeit geschehen kann, indem wir wissen, daß $dZ = Pdx + Qdy$ sey. Denn betrachtet man bloß x als veränderlich, y aber als constant, so ist $dZ = Pdx$, und wir haben demnach eine einfache Differenzialformel mit einer einzigen Veränderlichen x, welche nach den Vorschriften des vorhergehenden Abschnittes integrirt $Z = \int Pdx + \text{Const.}$ gibt, wobey jedoch zu bemerken ist, daß in dieser Constanten die als unveränderlich betrachtete Größe y wie immer verbunden vorkommen könne. Man schreibe also dafür Y so, daß $Z = \int Pdx + Y$ werde. Hierauf betrachte man eben so x als constant, und bloß y als veränderlich, so wird, weil $dZ = Qdy$ ist, auch $Z = \int Qdy + \text{Const.}$, welche Constante aber die Größe x enthält, so daß sie als Function von x erscheint; bezeichnet man diese durch X, so wird $Z = \int Qdy + X$. Obgleich aber weder hier die Function X, noch oben Y bestimmt ist, so wird sich dennoch der Werth einer jeden derselben ergeben, weil $\int Pdx + Y = \int Qdy + X$ seyn muß, denn da

$$\int Pdx - \int Qdy = X - Y$$

ist, so wird die Größe $\int Pdx - \int Qdy$ immer in zwey solche Theile getrennt werden, deren einer bloß eine Function von x, und deren anderer bloß eine Function von y ist, wodurch dann die Werthe von X und Y von selbst bekannt werden.

Zusatz 1.

§. 449. Weil $Q = \left(\frac{d.Z}{d\,y}\right)$ ist, so hat man nicht einmal die doppelte Integration nöthig, denn hat man das Integrale $\int P\,d\,x$ gefunden, so differentiire man dieses in Bezug auf y, wodurch der Ausdruck Vdy erhalten werden soll, so muß nothwendig $Vdy + dY = Qdy$ und daher $d\,Y = Q\,d\,y - V\,d\,y = (Q - V)\,d\,y$ werden.

Zusatz 2.

§. 450. Die Integration der für sich integrabeln Gleichungen von der Form $P\,d\,x + Q\,d\,y = 0$ kann also auf folgende Weise ausgeführt werden. Man suche das Integrale $\int P\,d\,x$, indem man y als unveränderlich betrachtet, und differentiire wieder das so gefundene Resultat, indem man bloß y als veränderlich ansieht, wodurch man den Ausdruck $V\,d\,y$ finden soll; so wird dann $Q - V$ bloß eine Function von y seyn. Man suche demnach $Y = \int (Q - V)\,d\,y$, so erhält man die Integralgleichung $\int P\,d\,x + Y = \text{Const.}$

Zusatz 3.

§. 451. Oder man suche $\int Q\,d\,y$, indem man x als constant betrachtet, differentiire dieses Integrale wieder, indem man x als veränderlich, y aber als constant annimmt, und bezeichne das Resultat durch $U\,d\,x$, so wird zuverläßig $P - U$ bloß eine Function von x seyn; man suche daher $X = \int (P - U)\,d\,x$, so erhält man die gesuchte Integralgleichung $\int Q\,d\,y + X = \text{Const.}$

Zusatz 4.

§. 452. Es erhellt aus der Natur der Sache, daß es gleichgültig sey, welchen von den bezeichneten Wegen man einschlagen will; denn man muß nothwendig auf dieselbe Integralgleichung kommen, sobald die vorgelegte Differenzialgleichung für sich integrabel ist; dann aber wird zuverläßig im ersten Falle $Q - V$ bloß eine Function von y, im andern aber $P - U$ bloß eine Function von x werden.

Anmerkung.

§. 453. Man könnte diese Integrationsmethode auch versuchen, bevor man noch untersucht hätte, ob der Gleichung der Charakter der Integrabilität zukomme, denn wenn es sich nach der Methode des Zusatzes 2 zeigen würde, daß $Q - V$ bloß eine Function von y werde,

oder würde man auf dem im Zusatze 3 angegebenen Wege finden, daß $P - U$ bloß eine Function von x wäre, so würde es sich schon hieraus schließen lassen, daß die Gleichung für sich integrabel sey. Übrigens aber ist es besser, vor allen andern zu untersuchen, ob die Gleichung für sich integrabel sey oder nicht, oder ob die Bedingungsgleichung $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ Statt finde, weil man zu dieser Untersuchung bloß zu differentiiren braucht. Wir wollen demnach einige Beyspiele von integrabeln Gleichungen anführen, um dadurch nicht allein diese Integrationsmethode, sondern auch die oben erwähnten vorzüglichen Eigenschaften anschaulicher zu machen.

Beyspiel 1.

§. 454. Die Gleichung

$$dx(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy(\beta x + \delta y + \varepsilon) = 0,$$

welche, für sich integrabel ist, zu integriren.

Weil hier $P = \alpha x + \beta y + \gamma$ und $Q = \beta x + \delta y + \varepsilon$ ist, so erhält man $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \beta$. Aus der Gleichheit dieser Ausdrücke erhellt die Integrabilität von selbst.

Man suche also nach Zusatz 2, indem man y als constant voraussetzt:

$$\int P dx = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xy + \gamma x,$$

so wird $V dy = \beta x dy$ und $(Q - V) dy = dy(\delta y + \varepsilon) = dY$, und daher $Y = \frac{1}{2}\delta y^2 + \varepsilon y$, folglich ist das Integrale

$$\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta yx + \gamma x + \tfrac{1}{2}\delta y^2 + \varepsilon y = C.$$

Betrachtet man aber nach Zusatz 3, x als constant, so wird

$$\int Q dy = \beta xy + \tfrac{1}{2}\delta y^2 + \varepsilon y,$$

welche Gleichung, wenn y als constant genommen wird, $U dx = \beta y dx$ gibt, und daher $(P - U) dx = (\alpha x + \gamma) dx$ und $X = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \gamma x$, folglich erhält man das Integrale $\int Q dy + X = C$ wie vorhin. Man sieht hier zugleich, daß

$$\int P dx - \int Q dy = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \gamma x - \tfrac{1}{2}\delta y^2 - \varepsilon y$$

sey, welcher Ausdruck schon in zwey Functionen $X - Y$ abgesondert erscheint.

Aufgabe 52.

§. 417. In der Differenzialgleichung des ersten rades

$$dx(\alpha + \beta x + \gamma y) = dy(\delta + \varepsilon x + \zeta y)$$

e veränderlichen Größen abzusondern, und die so haltene Gleichung zu integriren.

Auflösung.

Man setze $\alpha + \beta x + \gamma y = t$ und $\delta + \varepsilon x + \zeta y = u$, so ; $t dx = u dy$ wird; hieraus erhalten wir aber

$$x = \frac{\zeta t - \gamma u + \alpha\zeta + \gamma\delta}{\beta\zeta - \gamma\varepsilon} \text{ und } y = \frac{\beta u - \varepsilon t + \alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta\zeta - \gamma\varepsilon},$$

) hieraus: $dx : dy = \zeta dt - \gamma du : \beta du - \varepsilon dt$, und hier- ı erhalten wir folgende Gleichung:

$$\zeta t dt - \gamma t du = \beta u du - \varepsilon u dt, \text{ oder}$$

$$dt(\zeta t + \varepsilon u) = du(\beta u + \gamma t).$$

Da diese Gleichung homogen ist, und mit dem Beyspiele §. 412 reinstimmt, so ist die Integration schon bekannt.

Es gibt übrigens einen Fall, in welchem die vorgelegte Gleichung nicht homogen darstellen läßt, wenn nämlich $\beta\zeta - \gamma\varepsilon = 0$ ist, l dann dadurch die eingeführten neuen Veränderlichen t und u verbinden. Dieser Fall erfordert also eine besondere Auflösung, welche auf folgende Art erhalten, weil sich die vorgelegte Gleichung in iem Falle auf die Form

$$\alpha dx + (\beta x + \gamma y) dx = \delta dy + n(\beta x + \gamma y) dy$$

ıgen läßt, so setzen wir $\beta x + \gamma y = z$, und erhalten dadurch $= \frac{\alpha + z}{\delta + nz}$.

Nun ist aber $dy = \frac{dz - \beta dx}{\gamma}$ also $\frac{dz - \beta dx}{\gamma} = \frac{\alpha + z}{\delta + nz} dx$, sich offenbar die Veränderlichen absondern lassen, denn es wird $= \frac{dz(\delta + nz)}{\alpha\gamma + \beta\delta + (\gamma + n\beta)z}$. Die Integration dieses Ausdruckes t auf Logarithmen, wenn nicht $\gamma + n\beta = 0$ ist, in welchem lle das Integrale algebraisch wird, nämlich $x = \frac{2\delta z + nz^2}{2(\alpha\gamma + \beta\delta)} + C$.

Wird nun $x = \frac{1}{t}$ gesetzt, also $dz + z^2 dt = at^{-m-4}dt$, so sehen wir aus der Ähnlichkeit dieses Ausdruckes mit dem vorgelegten, daß wenn die Absonderung für $m = n$ gelingt, diese auch für $m = -n - 4$ möglich seyn müsse. Aus dem Falle, wo $m = n$, folgern wir demnach zwey andere, in welchen nämlich $m = \frac{-n}{n+1}$ und $m = -n - 4$. Da nun der Fall, wo $m = 0$, bekannt ist, so erhalten wir, wenn diese Formeln abwechselnd angewendet werden, folgende Fälle:

$$m = -4,\ m = -\tfrac{4}{3},\ m = -\tfrac{8}{3},\ m = -\tfrac{8}{5},\ m = -\tfrac{12}{5},$$
$$m = -\tfrac{12}{7},\ m = -\tfrac{16}{7},\ \text{ꝛc.},$$

welche Fälle sämmtlich in der Formel $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$ enthalten sind.

Zusatz 1.

§. 437. Wenn demnach entweder

$$m = \frac{-4i}{2i+1} \quad \text{oder} \quad m = \frac{-4i}{2i-1}$$

ist, so läßt sich die Gleichung $dy + y^2 dx = ax^m dx$ durch einige wiederholte Substitutionen endlich auf die Form $du + u^2 dv = c dv$ bringen, für welche die Absonderung sowohl, als die Integration bekannt ist.

Zusatz 2.

§. 438. Wenn nämlich $m = \frac{-4i}{2i+1}$ ist, so wird die Gleichung

$$dy + y^2 dx = ax^m dx$$

durch die Substitutionen $x = t^{\frac{1}{m+1}}$ und $y = \frac{a}{(m+1)z}$ zurückgeführt auf die Form $dz + z^2 dt = \frac{a}{(m+1)^2} t^n dt$, wo $n = \frac{-4i}{2i-1}$ ist, welcher Fall um einen Grad niedriger zu erachten ist.

Zusatz 3.

§. 439. Ist aber $m = \frac{-4i}{2i-1}$, so wird die Gleichung

$$dy + y^2 dx = ax^m dx$$

durch die Substitutionen

$$x = \frac{1}{t} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} \quad \text{oder} \quad y = t - t^2 z$$

auf den Ausdruck

$$dz + z^2 dt = at^n dt$$

reducirt, in welchem

$$n = \frac{-4(i-1)}{2i-1} = \frac{-4(i-1)}{2(i-1)+1},$$

welcher Fall ebenfalls um einen Grad niedriger ist.

Zusatz 4.

§. 440. In allen Fällen also, in welchen, wie wir eben gefunden haben, die Absonderung möglich ist, erhält man für den Exponenten m negative Zahlen zwischen den Gränzen 0 und -4. Ist i unendlich groß, so erhält man den Fall, in welchem $m = -2$ ist, der schon für sich bekannt ist, indem die Gleichung $dy + y^2 dx = \frac{a dx}{x^2}$ für $y = \frac{1}{z}$ homogen wird.

Anmerkung 1.

§. 441. Die Gleichung $dy + y^2 dx = ax^m dx$ nennt man gewöhnlich die Riccatische, nach dem Grafen Riccati, welcher zuerst absonderungsfähige Fälle vorlegte. Ich habe sie hier in der einfachsten Form dargestellt, denn die Gleichung $dy + Ay^2 t^\mu dt = Bt^\lambda dt$ läßt sich sogleich auf dieselbe zurückführen, wenn man $At^\mu dt = dx$ und $At^{\mu+1} = (\mu+1)x$ setzt. Obgleich die beyden Substitutionen, deren wir uns hier bedienten, äußerst einfach sind, so lassen sich dennoch durch die Anwendung zusammengesetzterer Substitutionen keine andere absonderungsfähige Fälle entdecken. Es scheint deßhalb allerdings merkwürdig, daß diese Gleichung äußerst selten die Absonderung zulasse, obgleich die Anzahl der Fälle, in welchen dieses angeht, wirklich unendlich groß ist. Übrigens kann diese Untersuchung vom Exponenten auf den einfachsten Coefficienten geführt werden, denn setzt man $y = x^{\frac{m}{2}} z$, so erhält man

$$dz + \frac{mz dx}{2x} + x^{\frac{m}{2}} z^2 dx = ax^{\frac{m}{2}} dx,$$

wo, wenn $x^{\frac{m}{2}} dx = dt$ und $x^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m+2}{2} t$ gesetzt wird,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{(m+2)t}$$ wird, und daher ist

$$dz + \frac{mz\,dt}{(m+2)t} + z^2 dt = a\,dt,$$

welche Gleichung demnach, so oft $\frac{m}{m+2} = \pm 2i$, oder gleich einer positiven oder negativen geraden Zahl ist, die Absonderung zuläßt, so daß die Gleichung

$$dz \pm \frac{2iz\,dt}{t} + z^2 dt = a\,dt$$

immer integrabel ist. Setzt man außerdem $z = u - \frac{m}{2(m+2)t}$, so erhält man

$$du + u^2 dt = a\,dt - \frac{m(m+4)\,dt}{4(m+2)^2 t^2},$$

und für die absonderungsfähigen Fälle $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$ findet man

$$du + u^2 dt = a\,dt + \frac{i(i \pm 1)\,dt}{t^2}.$$

Die weitere Entwickelung dieser äußerst wichtigen Gleichung werden wir in dem Folgenden lehren, wo wir von der Integration der Differenzialgleichungen durch unendliche Reihen handeln werden, weil wir dort die absonderungsfähigen Fälle leichter auffinden, und zugleich die Integralien werden angeben können.

Anmerkung 2.

§. 442. Es scheint kaum möglich zu seyn, ausführlichere, auch nur einigermaßen brauchbare Vorschriften für die Absonderung der Veränderlichen zu geben, woraus denn erhellt, daß diese Methode nur bey den wenigsten Differenzialgleichungen ihre Anwendung finde; ich werde daher zur Erklärung eines anderen Princips übergehen, nach welchem die Integrationen ausgeführt werden können, und welches zugleich viel umfassender ist, indem es ebenfalls auf Differenzialgleichungen höherer Grade angewendet werden kann, so daß dieses Princip als die wahre und natürliche Quelle aller Integrationen angesehen werden darf. Es gründet sich dieses Princip darauf, daß, wenn irgend eine Differenzialgleichung zwischen zwey Veränderlichen gegeben ist, immer eine solche Function gefunden werden könne, mit welcher die vorgelegte Gleichung multiplicirt, integrabel werde. Man muß nämlich alle Glieder der Gleichung auf dieselbe Seite bringen, damit die Gleichung die Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

alte, und dann behaupte ich, gibt es immer eine solche Function
ı x und y, z. B. V, daß nach verrichteter Multiplication die Formel

$$VPdx + VQdy$$

ı Charakter der Integrabilität annimmt, oder daß diese Formel als
ỉ wirkliche Differenziale irgend einer Function zweyer veränderlichen
ößen erscheint. Denn setzt man diese Function $= S$, so daß
$= VPdx + VQdy$ wird, so erhält man, weil $Pdx + Qdy = 0$
, auch $dS = 0$, und daher $S = Const.$, welche Gleichung dem-
ch das Integrale, und zwar das vollständige Integrale der Differen-
lgleichung $Pdx + Qdy = 0$ seyn wird. Es kömmt also hier
es darauf an, jenen Multiplicator V aufzufinden.

Kapitel II.

Von der Integration der Gleichungen, mit Hülfe der Multiplicatoren.

Aufgabe 69.

§. 443. Zu untersuchen, ob eine vorgelegte Differenzialgleichung für sich integrabel sey, oder nicht.

Auflösung.

Hat man alle Theile einer Gleichung auf dieselbe Seite des Gleichheitszeichens gebracht, damit dieselbe die Form $Pdx + Qdy = 0$ erhalte, so ist diese Gleichung für sich integrabel, wenn die Formel $Pdx + Qdy$ wirklich das Differenziale irgend einer Function zweyer Veränderlichen x und y ist. Dieß ist aber, wie wir in der Differenzialrechnung gezeigt haben, der Fall, wenn das Differenziale von P in Bezug auf y (wenn y allein als veränderlich betrachtet wird) zu dy dasselbe Verhältniß hat, in welchem das Differenziale von Q in Bezug auf x zu dx steht, oder nach der in der Differenzialrechnung angenommenen Bezeichnungsart, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist; denn es sey Z jene Function, deren Differenziale $Pdx + Qdy$ ist, so ist nach der angeführten Bezeichnungsart $P = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$ und $Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$; hieraus folgt also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,dx}\right)$. Nun ist aber $\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,.\,dx}\right)$ und daher $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ist daher die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ vorgegeben, so wird man auf folgende Art erkennen, ob dieselbe integrabel sey, oder nicht. Man suche durch Differenziation $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$; sind diese Werthe einander gleich, so ist die Gleichung für sich integrabel; im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Zusatz 1.

§. 444. Alle Differenzialgleichungen, in welchen die Veränderlichen abgesondert erscheinen, sind also für sich integrabel, denn sie

haben die Form $X dx + Y dy = 0$, wobey X bloß eine Function von x, und Y bloß eine Function von y ist; und man erhält demnach $\left(\frac{dX}{dy}\right) = 0$ und $\left(\frac{dY}{dx}\right) = 0$.

Zusatz 2.

§. 445. Wenn daher in der vorgelegten Differenzialgleichung $P dx + Q dy = 0$, der Quotient $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$, und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$ ist, so sind umgekehrt in derselben die veränderlichen Größen abgesondert, denn es wird dann P bloß eine Function von x, und Q bloß eine Function von y seyn. Die abgesonderten Gleichungen bilden demnach gleichsam die erste Gattung der für sich integrabeln Gleichungen.

Zusatz 3.

§. 446. Übrigens leuchtet die Möglichkeit von selbst ein, daß $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ werde, obgleich keiner dieser Werthe der Nulle gleich ist. Es gibt demnach auch Gleichungen, die für sich integrabel sind, obgleich die Veränderlichen in denselben nicht abgesondert erscheinen.

Anmerkung.

§. 447. Dieses Kennzeichen für die Beurtheilung der Integrabilität der Gleichungen ist für die Integrationsmethode, welche wir lehren wollen, von größter Wichtigkeit; denn hat man eine für sich integrable Gleichung, so kann das Integrale derselben nach den bereits gelehrten Vorschriften gefunden werden. Ist aber die gegebene Gleichung nicht für sich integrabel, so wird es immer eine Größe geben, mit welcher dieselbe multiplicirt den Charakter der Integrabilität erhält. Ist daher irgend eine Gleichung gegeben, die für sich nicht integrabel ist, so wird es bloß darauf ankommen, einen schicklichen Multiplicator zu finden, welcher dieselbe integrabel macht. Würden wir stets einen solchen Factor aufzufinden im Stande seyn, so wäre bey dieser Integrationsmethode nichts mehr zu wünschen übrig; allein diese Bestimmung gelingt höchst selten, und erstreckt sich kaum weiter als auf jene Gleichungen, welche wir mit Hülfe der Absonderung der Veränderlichen zu behandeln bereits gelehrt haben. Übrigens trage ich keineswegs Bedenken, dieser Methode einen entschiedenen Vorzug vor der vorigen einzuräumen, weil sie der Natur der Gleichungen mehr ange-

messen scheint, und sich auf Differenzialgleichungen höherer Grade erstreckt, bey welchen die Absonderung keine Anwendung mehr findet.

Aufgabe 60.

§. 448. Das Integrale einer Differenzialgleichung zu bestimmen, von welcher bekannt ist, daß sie integrabel sey.

Auflösung.

Es sey $P dx + Q dy = 0$ die Differenzialgleichung, in welcher $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ seyn soll, so ist $P dx + Q dy$ das Differenziale irgend einer Function zweyer Veränderlichen x und y, welche wir durch Z bezeichnen wollen, so daß also $dZ = P dx + Q dy$ wird. Weil wir also die Gleichung $dZ = 0$ haben, so ist das gesuchte Integrale $Z = C$. Es kommt also hier einzig und allein darauf an, die Function Z zu bestimmen, was ohne Schwietigkeit geschehen kann, indem wir wissen, daß $dZ = P dx + Q dy$ sey. Denn betrachtet man bloß x als veränderlich, y aber als constant, so ist $dZ = P dx$, und wir haben demnach eine einfache Differenzialformel mit einer einzigen Veränderlichen x, welche nach den Vorschriften des vorhergehenden Abschnittes integrirt $Z = \int P dx + \text{Const.}$ gibt, wobey jedoch zu bemerken ist, daß in dieser Constanten die als unveränderlich betrachtete Größe y wie immer verbunden vorkommen könne. Man schreibe also dafür Y so, daß $Z = \int P dx + Y$ werde. Hierauf betrachte man eben so x als constant, und bloß y als veränderlich, so wird, weil $dZ = Q dy$ ist, auch $Z = \int Q dy + \text{Const.}$, welche Constante aber die Größe x enthält, so daß sie als Function von x erscheint; bezeichnet man diese durch X, so wird $Z = \int Q dy + X$. Obgleich aber weder hier die Function X, noch oben Y bestimmt ist, so wird sich dennoch der Werth einer jeden derselben ergeben, weil $\int P dx + Y = \int Q dy + X$ seyn muß, denn da

$$\int P dx - \int Q dy = X - Y$$

ist, so wird die Größe $\int P dx - \int Q dy$ immer in zwey solche Theile getrennt werden, deren einer bloß eine Function von x, und deren anderer bloß eine Function von y ist, wodurch dann die Werthe von X und Y von selbst bekannt werden.

Zusatz 1.

§. 449. Weil $Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$ ist, so hat man nicht einmal die doppelte Integration nöthig, denn hat man das Integrale $\int P\,dx$ gefunden, so differentiire man dieses in Bezug auf y, wodurch der Ausdruck $V dy$ erhalten werden soll, so muß nothwendig $V dy + dY = Q dy$ und daher $dY = Q\,dy - V\,dy = (Q - V)\,dy$ werden.

Zusatz 2.

§. 450. Die Integration der für sich integrabeln Gleichungen von der Form $P\,dx + Q\,dy = 0$ kann also auf folgende Weise ausgeführt werden. Man suche das Integrale $\int P\,dx$, indem man y als unveränderlich betrachtet, und differentiire wieder das so gefundene Resultat, indem man bloß y als veränderlich ansieht, wodurch man den Ausdruck $V\,dy$ finden soll; so wird dann $Q - V$ bloß eine Function von y seyn. Man suche demnach $Y = \int (Q - V)\,dy$, so erhält man die Integralgleichung $\int P\,dx + Y = \text{Const.}$

Zusatz 3.

§. 451. Oder man suche $\int Q\,dy$, indem man x als constant betrachtet, differentiire dieses Integrale wieder, indem man x als veränderlich, y aber als constant annimmt, und bezeichne das Resultat durch $U\,dx$, so wird zuverläßig $P - U$ bloß eine Function von x seyn; man suche daher $X = \int (P - U)\,dx$, so erhält man die gesuchte Integralgleichung $\int Q\,dy + X = \text{Const.}$

Zusatz 4.

§. 452. Es erhellt aus der Natur der Sache, daß es gleichgültig sey, welchen von den bezeichneten Wegen man einschlagen will; denn man muß nothwendig auf dieselbe Integralgleichung kommen, sobald die vorgelegte Differenzialgleichung für sich integrabel ist; dann aber wird zuverläßig im ersten Falle $Q - V$ bloß eine Function von y, im andern aber $P - U$ bloß eine Function von x werden.

Anmerkung.

§. 453. Man könnte diese Integrationsmethode auch versuchen, bevor man noch untersucht hätte, ob der Gleichung der Charakter der Integrabilität zukomme, denn wenn es sich nach der Methode des Zusatzes 2 zeigen würde, daß $Q - V$ bloß eine Function von y werde,

oder würde man auf dem im Zusatze 3 angegebenen Wege finden, daß $P - U$ bloß eine Function von x wäre, so würde es sich schon hieraus schließen lassen, daß die Gleichung für sich integrabel sey. Übrigens aber ist es besser, vor allen andern zu untersuchen, ob die Gleichung für sich integrabel sey oder nicht, oder ob die Bedingungsgleichung $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ Statt finde, weil man zu dieser Untersuchung bloß zu differentiiren braucht. Wir wollen demnach einige Beyspiele von integrabeln Gleichungen anführen, um dadurch nicht allein diese Integrationsmethode, sondern auch die oben erwähnten vorzüglichen Eigenschaften anschaulicher zu machen.

Beyspiel 1.

§. 454. Die Gleichung

$$dx(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy(\beta x + \delta y + \varepsilon) = 0,$$

welche für sich integrabel ist, zu integriren.

Weil hier $P = \alpha x + \beta y + \gamma$ und $Q = \beta x + \delta y + \varepsilon$ ist, so erhält man $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \beta$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \beta$. Aus der Gleichheit dieser Ausdrücke erhellt die Integrabilität von selbst.

Man suche also nach Zusatz 2, indem man y als constant voraussetzt:

$$\int P dx = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xy + \gamma x,$$

so wird $V dy = \beta x dy$ und $(Q - V) dy = dy(\delta y + \varepsilon) = dY$, und daher $Y = \frac{1}{2}\delta y^2 + \varepsilon y$, folglich ist das Integrale

$$\tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta yx + \gamma x + \tfrac{1}{2}\delta y^2 + \varepsilon y = C.$$

Betrachtet man aber nach Zusatz 3, x als constant, so wird

$$\int Q dy = \beta xy + \tfrac{1}{2}\delta y^2 + \varepsilon y,$$

welche Gleichung, wenn y als constant genommen wird, $U dx = \beta y dx$ gibt, und daher $(P - U) dx = (\alpha x + \gamma) dx$ und $X = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \gamma x$, folglich erhält man das Integrale $\int Q dy + X = C$ wie vorhin. Man sieht hier zugleich, daß

$$\int P dx - \int Q dy = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \gamma x - \tfrac{1}{2}\delta y^2 - \varepsilon y$$

sey, welcher Ausdruck schon in zwey Functionen $X - Y$ abgesondert erscheint.

Beyspiel 2.

§. 455. Die an und für sich integrable Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdy - ydx}{y\sqrt{x^2+y^2}} \text{ oder } \frac{dx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) = 0$$

zu integriren.

Da hier $P = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ und $Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$, so erhalten wir als Kennzeichen der Integrabilität

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und } \frac{dQ}{dx} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

welche beyden Werthe wirklich einander gleich sind. Zur Bestimmung des Integrals wollen wir die im Zusatze 2 angeführte Regel anwenden, so erhalten wir

$$\int P\,dx = l(x + \sqrt{(x^2+y^2)}) \text{ und } Vdy = \frac{ydy}{[x+\sqrt{(x^2+y^2)}]\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{(x^2+y^2)} - x$ multiplicirt

$$V = \frac{(\sqrt{(x^2+y^2)} - x)}{y\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

also $Q - V = 0$ und $Y = \int(Q - V)\,dy = 0$, und demnach ist das gesuchte Integrale $l\,[x + \sqrt{(x^2+y^2)}] = \text{Const.}$

Nach der Vorschrift des Zusatzes 3 erhält man

$$\int Q\,dy = ly - x\int\frac{dy}{y\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

und wenn man $y = \frac{1}{z}$ setzt:

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(x^2+y^2)}} = -\int\frac{dz}{\sqrt{(x^2z^2+1)}} = -\frac{1}{x}\,l\,[xz + \sqrt{x^2z^2+1}], \text{ also}$$

$$\int Q\,dy = ly + l\,\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} = l\,[x + \sqrt{(x^2+y^2)}];$$

hieraus folgt $U\,dx = \frac{dx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, und daher $(P - U)\,dx = 0$.

Beyspiel 3.

§. 456. Die integrable Gleichung

$$(x^2 + y^2 - a^2)\,dy + (a^2 + 2xy + x^2)\,dx = 0$$

zu integriren.

Hier ist $P = a^2 + 2xy + x^2$ und $Q = x^2 + y^2 - a^2$,

$$\text{also } \left(\frac{dP}{dy}\right) = 2x \text{ und } \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x,$$

aus welcher Gleichheit die Integrabilität erkannt wird. Es ist aber

$$\int P\,dx = a^2x + x^2y + \tfrac{1}{3}x^3 \text{ und } V\,dy = x^2\,dy, \text{ daher}$$

$$(Q - V)\,dy = (y^2 - a^2)\,dy \text{ und } Y = \tfrac{1}{3}y^3 - a^2y,$$

also ist das Integrale:

$$a^2x + x^2y + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}y^3 - a^2y = \text{Const.}$$

Nach der zweyten Methode ist

$$\int Q\,dy = x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 - a^2y, \text{ und daher}$$

$$U\,dx = 2xy\,dx, \text{ also}$$

$$(P - U)\,dx = (a^2 + x^2)\,dx \text{ und } X = a^2x + \tfrac{1}{3}x^3,$$

woraus dasselbe Integrale wie vorhin gefunden wird.

Anmerkung.

§. 467. Bey diesen Beyspielen konnte man das Integrale $\int P\,dx$ wirklich darstellen, daher das Differenziale $V\,dy$ desselben entwickeln, indem man bloß y als veränderlich ansah; wenn aber dieses Integrale $\int P\,dx$ nicht aufgefunden werden kann, so läßt sich auch das Differenziale $V\,dy$ nicht bestimmen, in wiefern die Formel $\int P\,dx$ für sich betrachtet, irgend eine Constante, die auch die Größe y in sich schließt, enthält. Wir wollen nun sehen, wie man in solchen Fällen vorgehen müsse. Setzen wir $Z = \int P\,dx + Y$, so wird, weil $\left(\frac{d.\int P dx}{dy}\right) = V$ gesucht wird, und $\int P\,dx = Z - Y$ ist, offenbar $V = \left(\frac{dZ}{dy}\right) - \left(\frac{dY}{dy}\right)$. Nun ist aber $\left(\frac{dZ}{dx}\right) = P$, also $\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right)$, indem $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = V + \left(\frac{dY}{dy}\right)$ ist. Es ist demnach $V = \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$, also findet man die Größe V durch Integration der Formel $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$, wobey y als constant betrachtet wird, nachdem man in dem zu bestimmenden Werthe $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ bloß y als veränderlich angenommen hat; weil aber hier von neuem eine Constante mit y verbunden erscheint, so läßt sich hieraus die gesuchte Function Y nicht bestimmen. Der Grund dieses Übelstandes liegt offenbar in der Unbestimmtheit der Integrale $\int P\,dx$ und $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$, indem ein jedes derselben willkürliche Func-

tionen von y enthält. Es wird demselben also abgeholfen werden, wenn wir beyde Integralien unter gewissen Bedingungen bestimmen. Setzen wir demnach, daß das Integrale $\int P\,dx$ so genommen werde, daß es für $x = f$ verschwinde, wobey wir der Constanten f einen beliebigen Werth beylegen können; dann bestimme man das andere Integrale $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ unter derselben Bedingung. Ist dieß geschehen, so erscheint $Q - \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ bloß als eine Function von y, und der Gleichung $P\,dx + Q\,dy = o$ entspricht als Integrale

$$\int P\,dx + \int dy \left[Q - \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)\right] = \text{Const.},$$

sobald beyde Integralien $\int P\,dx$ und $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$, bey welchen y als unveränderlich angesehen wird, so bestimmt werden, daß sie für denselben Werth f von x verschwinden. Hieraus abstrahiren wir nun folgende Regel für die Integration der Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy = o, \text{ bey welcher } \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \text{ ist.}$$

§. 458. Man bestimme die Integralien $\int P\,dx$ und $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$, indem man y als constant betrachtet, so daß beyde verschwinden, wenn man der Größe x irgend einen bestimmten Werth, z. B. $x = f$ beylegt, dann erscheint $Q - \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ bloß als eine Function von y, die wir gleich Y setzen wollen, und das gesuchte Integrale ist

$$\int P\,dx + \int Y\,dy = \text{Const.},$$

oder was dasselbe ist, man bestimme die Integralien $\int Q\,dy$ und $\int dy \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, x als constant betrachtet, so daß beyde verschwinden, so bald man der Veränderlichen y einen bestimmten Werth, z. B. $y = g$ beylegt, dann ergibt sich $P - \int dy \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ bloß als Function von x, und wird diese gleich X gesetzt, so ist das gesuchte Integrale $\int Q\,dy + \int X\,dx = \text{Const.}$

Beweis.

Die Richtigkeit dieser Regel leuchtet aus dem Vorhergehenden ein, wenn auch etwa jemand glauben sollte, wir hätten aufs Gerathewohl

angenommen, daß die beyden Formeln $\int P\,dx$ und $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ unter derselben Bedingung bestimmt werden müssen, damit beyde für denselben bestimmten Werth von x, z. B. für $x = f$, verschwinden. Diesen Beweis füge ich nur bey, damit niemand die Meinung fassen möge, daß die zweyte Integration eben so gut unter einer andern Bedingung bestimmt werden könnte. Die erste Integration steht zwar ganz in unserer Willkür, weßhalb wir auch annehmen, daß sie so bestimmt werde, daß das Integrale $\int P\,dx$ für $x = f$ verschwindet, dann aber behaupte ich, muß das andere Integrale $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ nothwendiger Weise unter derselben Bedingung bestimmt werden; denn es sey $\int P\,dx = Z$, so ist Z eine Function von x und y, welche für $x = f$ verschwindet, sie enthält daher den Factor $f - x$ oder irgend eine positive Potenz $(f-x)^\lambda$ desselben, so daß $Z = (f-x)^\lambda T$ wird. Weil nun $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ den Werth von $\left(\frac{dZ}{dy}\right)$ ausdrückt, so ist $\int dx \left(\frac{dP}{dy}\right) = (f-x)^\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dy}\right)$, woraus erhellt, daß auch dieses Integrale für $x = f$ verschwinde, so daß also die Bestimmung dieses Integrals nicht mehr unserer Willkür überlassen wird. Dieß vorausgesetzt, ist $\int P\,dx + \int Y\,dy = \text{Const.}$, wobey $Y = Q - \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ ist, das Integrale der für sich integrabeln Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$. Denn wird $\int P\,dx = Z$ gesetzt, in wiefern nämlich bey dieser Integration y als constant behandelt wird, so erhält man die Gleichung $Z + \int Y\,dy = \text{Const.}$ Daß dieses das gesuchte Integrale sey, erhellt auch schon aus der Differenziation, denn da

$$dZ = P\,dx + dy \left(\frac{dZ}{dy}\right) = P\,dx + dy \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right),$$

so ist das Differenziale der gefundenen Gleichung

$$P\,dx + dy \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right) + Y\,dy = 0.$$

Allein es ist $Y = Q - \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$, und hieraus folgt $P\,dx + Q\,dy = 0$, welches die vorgelegte Differenzialgleichung selbst ist; daß aber $Q - \int dx \left(\frac{dP}{dy}\right)$ bloß eine Function von y sey, folgt daraus, weil die Differenzialgleichung für sich integrabel ist.

, und dann behaupte ich, gibt es immer eine solche Function
und y, z. B. V, daß nach verrichteter Multiplication die Formel

$$VPdx + VQdy$$

arakter der Integrabilität annimmt, oder daß diese Formel als
:fliche Differenziale irgend einer Function zweyer veränderlichen
ı erscheint. Denn setzt man diese Function $= S$, so daß
$VPdx + VQdy$ wird, so erhält man, weil $Pdx + Qdy = 0$
ch $dS = 0$, und daher $S = Const.$, welche Gleichung dem-
ıs Integrale, und zwar das vollständige Integrale der Differen-
chung $Pdx + Qdy = 0$ seyn wird. Es kömmt also hier
arauf an, jenen Multiplicator V aufzufinden.

Kapitel II.

Von der Integration der Gleichungen, mit Hülfe der Multiplicatoren.

Aufgabe 59.

§. 443. **Zu untersuchen, ob eine vorgelegte Differenzialgleichung für sich integrabel sey, oder nicht.**

Auflösung.

Hat man alle Theile einer Gleichung auf dieselbe Seite des Gleichheitszeichens gebracht, damit dieselbe die Form $Pdx + Qdy = o$ erhalte, so ist diese Gleichung für sich integrabel, wenn die Formel $Pdx + Qdy$ wirklich das Differenziale irgend einer Function zweyer Veränderlichen x und y ist. Dieß ist aber, wie wir in der Differenzialrechnung gezeigt haben, der Fall, wenn das Differenziale von P in Bezug auf y (wenn y allein als veränderlich betrachtet wird) zu dy dasselbe Verhältniß hat, in welchem das Differenziale von Q in Bezug auf x zu dx steht, oder nach der in der Differenzialrechnung angenommenen Bezeichnungsart, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist; denn es sey Z jene Function, deren Differenziale $Pdx + Qdy$ ist, so ist nach der angeführten Bezeichnungsart $P = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$ und $Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$; hieraus folgt also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,dx}\right)$. Nun ist aber $\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,.\,dx}\right)$ und daher $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Ist daher die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = o$ vorgegeben, so wird man auf folgende Art erkennen, ob dieselbe integrabel sey, oder nicht. Man suche durch Differenziation $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$; sind diese Werthe einander gleich, so ist die Gleichung für sich integrabel; im entgegengesetzten Falle aber nicht.

Zusatz 1.

§. 444. Alle Differenzialgleichungen, in welchen die Veränderlichen abgesondert erscheinen, sind also für sich integrabel, denn sie

Aufgabe 61.

§. 463. **Wenn ein Multiplicator L gegeben ist, welcher die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ integrabel macht, unzählige andere Multiplicatoren aufzufinden, die denselben Zweck erfüllen.**

Auflösung.

Weil $L(Pdx + Qdy)$ das wirkliche Differenziale irgend einer Function Z ist, so suche man nach den obigen Vorschriften diese Function Z so, daß $L(Pdx + Qdy) = dZ$ werde. Nun ist klar, daß diese Formel dZ auch dann noch die Integration zulassen werde, wenn wir sie durch irgend eine Function Z, die wir durch $\varphi(z)$ bezeichnen wollen, multipliciren. Da also auch die Formel $(Pdx + Qdy) L\varphi(z)$ integrabel ist, so wird auch $L\varphi(z)$ ein solcher Factor seyn, durch welchen die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ integrabel gemacht wird. Ist daher ein Multiplicator L gefunden, so suche man durch Integration $Z = \int L(Pdx + Qdy)$, so gibt dann der Ausdruck $L\varphi(z)$ unendlich viele andere integrirende Factoren, indem statt $\varphi(z)$ jede beliebige Function von z gesetzt werden kann.

Anmerkung.

§. 464. Obgleich es hinreichend ist, für jede Differenzialgleichung einen einzigen Multiplicator zu kennen, so gibt es doch Fälle, in welchen es sehr nützlich ist, mehrere, ja selbst unendlich viele Factoren zu wissen. Wenn z. B. die vorgelegte Gleichung sich bequem in zwey Theile von der Form

$$(Pdx + Qdy) + (Rdx + Sdy) = 0$$

absondern läßt, und es sind alle Multiplicatoren bekannt, durch welche jeder der beyden Theile, $Pdx + Qdy$ und $Rdx + Sdy$, für sich integrabel gemacht werden kann, so läßt sich dann bisweilen ein gemeinschaftlicher Multiplicator erschließen, welcher beyde Theile zugleich integrabel macht. Denn es sey $L\varphi(z)$ der allgemeine Ausdruck für alle Multiplicatoren der Formel $Pdx + Qdy$, und $M\varphi(V)$ der allgemeine Ausdruck für alle Multiplicatoren der Formel $Rdx + Sdy$, so wird, weil $\varphi(Z)$ und $\varphi(V)$ was immer für Functionen von Z und V bezeichnen, wenn man dieselben so wählen kann, daß

$$L\varphi(Z) = M\varphi(V)$$

wird, ein zweckmäßiger Multiplicator für die Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdx + Sdy = 0$$

gefunden. Es versteht sich jedoch von selbst, daß dieses nur in jenen Fällen möglich sey, in welchen der Multiplicator für die ganze Gleichung, auch zugleich die einzelnen Theile derselben für sich genommen, integrabel macht. Man hüte sich also, von dieser Methode zu viel zu erwarten, und im Falle dieselbe nicht zum Ziele führt, die Gleichung für unauflöslich zu halten; denn es kann sich auch ereignen, daß der ganzen Gleichung ein Factor entspricht, welcher den einzelnen Theilen derselben die gewünschte Eigenschaft nicht verleiht. Ist z. B. die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ angegeben, so ist der Multiplicator, welcher den Theil Pdx abgesondert integrabel macht, offenbar $\frac{X}{P}$, wobey X irgend eine Function von x bezeichnet, und der den andern Theil Qdy integrirende Factor ist $\frac{Y}{Q}$. Obgleich es aber schlechterdings unmöglich ist, daß $\frac{X}{P} = \frac{Y}{Q}$ oder $\frac{P}{Q} = \frac{X}{Y}$ werde, ausgenommen in Fällen, die für sich klar sind, so gibt es dennoch zuverläßig immer einen Multiplicator, welcher den ganzen Ausdruck $Pdx + Qdy$ integrabel macht.

Beyspiel 1.

§. 465. **Alle Factoren zu bestimmen, durch welche die Formel $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabel gemacht wird.**

Der erste Multiplicator $\frac{1}{xy}$ biethet sich von selbst dar, denn er gibt $\frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, dessen Integrale $\alpha lx + \beta ly = lx^\alpha y^\beta$ ist. Es gibt demnach jede Function $\varphi(x^\alpha y^\beta)$ hievon, mit $\frac{1}{xy}$ multiplicirt, einen brauchbaren Multiplicator, dessen allgemeine Form demnach $\frac{1}{xy}\varphi(x^\alpha y^\beta)$ ist; denn eine Function der Größe $x^\alpha y^\beta$ ist auch eine Function des Logarithmus eben dieser Größe; denn wenn P eine Function von p ist, und π eine Function von P, so ist π eine Function von p und umgekehrt.

Zusatz.

§. 466. Nimmt man für die Function irgend eine Potenz $x^{n\alpha} y^{n\beta}$, so wird die Formel $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabel, wenn man

sie mit $x^{n\alpha-1}y^{n\beta-1}$ multiplicirt, in welchem Falle das Integrale sich von selbst darbiethet; es ist nämlich $\frac{x^{n\alpha}y^{n\beta}}{n}$.

Beyspiel 2.

§. 467. Man suche für die Formel $Xydx + dy$ alle integrirende Factoren.

Es biethet sich $\frac{1}{y}$ von selbst als erster Multiplicator dar, und da $\int\left(Xdx + \frac{dy}{y}\right) = \int Xdx + ly$ oder $l e^{\int Xdx} y$ ist, so geben alle Functionen dieser Größe, oder alle Functionen des Ausdruckes $e^{\int Xdx}y$ durch y dividirt, integrirende Factoren. Es ist demnach der allgemeine Ausdruck für alle diese Multiplicatoren $= \frac{1}{y}\varphi\,(e^{\int Xdx}y)$.

Zusatz.

§. 468. Für die Formel $Xydx + dy$ ist auch $e^{\int Xdx}$, welches bloß eine Function von x ist, ein integrirender Factor. Da also durch jenen Factor auch die Formel $\mathfrak{X}dx$, wo $\mathfrak{X}$ irgend eine Function von x bezeichnet, integrabel gemacht wird, so wird jener Multiplicator auch dem Ausdrucke $dy + Xydx + \mathfrak{X}dx$ Genüge leisten.

Aufgabe 62.

§. 469. Es sey die Gleichung $dy + Xydx = \mathfrak{X}dx$, in welcher X und $\mathfrak{X}$ was immer für Functionen von x bezeichnen, gegeben; man suche einen schicklichen Multiplicator und integrire dieselbe.

Auflösung.

Da das zweyte Glied $\mathfrak{X}dx$ durch was immer für eine Function von x multiplicirt, integrabel wird, so untersuche man, ob auch für das erste Glied $dy + Xydx$ ein solcher integrirender Factor existire. Da $e^{\int Xdx}$ ein solcher Factor ist, so erhält man mittelst demselben die gesuchte Integralgleichung

$$e^{\int Xdx}y = \int e^{\int Xdx}\mathfrak{X}dx, \text{ oder}$$
$$y = e^{-\int Xdx}\int e^{\int Xdx}\mathfrak{X}dx,$$

wie wir schon oben gefunden haben.

Zusatz 1.

§. 470. Es ist klar, daß wenn statt y irgend eine Function von y vorhanden wäre, wenn man also die Gleichung $dY + YXdx = \mathfrak{X}dx$ hätte, diese durch den Factor $e^{\int X dx}$ integrabel gemacht werde, und daß das Integrale derselben $e^{\int X dx} Y = \int e^{\int X dx} \mathfrak{X} dx$ gefunden werde.

Zusatz 2.

§. 471. Da die Gleichung $dy + yXdx = y^n \mathfrak{X} dx$ durch y^n dividirt, übergeht in $\frac{dy}{y^n} + \frac{X dx}{y^{n-1}} = \mathfrak{X} dx$, so wird, wenn $\frac{1}{y^{n-1}} = Y$ gesetzt wird, wegen $-\frac{n-1}{y^n} dy = dY$, oder $\frac{dy}{y^n} = -\frac{dY}{n-1}$, offenbar $-\frac{dY}{n-1} + YXdx = \mathfrak{X}dx$, oder

$$dY - (n-1) YXdx = -(n-1) \mathfrak{X}dx,$$

welche Gleichung durch den Multiplicator $e^{-(n-1)\int X dx}$ integrabel wird, und das Integrale derselben wird seyn:

$$e^{-(n-1)\int X dx} Y = -(n-1) \int e^{-(n-1)\int X dx} \mathfrak{X} dx, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{y^{n-1}} = -(n-1)\, e^{(n-1)\int X dx} \int e^{-(n-1)\int X dx} \mathfrak{X} dx.$$

Anmerkung.

§. 472. Da für das Glied $dy + yXdx$ der allgemeine Factor $\frac{1}{y} \varphi (e^{\int X dx} y)$ ist, so wird, wenn statt der Function eine Potenz genommen wird, der Ausdruck $e^{m\int X dx} y^{m-1}$ ein integrirender Factor, welcher das Integrale $\frac{1}{m} e^{m\int X dx} y^{m-1}$. gibt. Man muß also den Zweck zu erreichen suchen, daß derselbe Factor auch das andere Glied $y^n \mathfrak{X} dx$ integrabel mache, und dieß wird der Fall seyn, wenn man $m - 1 = -n$ oder $m = 1 - n$ nimmt, wodurch das Integrale dieses Gliedes $= \int e^{m\int X dx} \mathfrak{X} dx$ wird, und dann ist die gesuchte Integralgleichung folgende:

$$\frac{1}{1-n} e^{(1-n)\int X dx} y^{(1-n)} = \int e^{(1-n)\int X dx} \mathfrak{X} dx,$$

welche mit der so eben gefundenen ganz übereinstimmt.

Aufgabe 63.

§. 473. Für die gegebene Differenzialgleichung

$$\alpha y dx + \beta x dy = x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy);$$

einen integrirenden Factor zu finden, und das Integrale selbst anzugeben.

Auflösung.

Man betrachte jedes Glied für sich, so wissen wir bereits, daß für das erste Glied $\alpha y dx + \beta x dy$, alle integrirende Factoren in der Form $\frac{1}{xy}\varphi(x^\alpha y^\beta)$ enthalten seyen; für das andere Glied der Gleichung

$$x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy)$$

ist der erste Factor $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, durch welche man $\frac{\gamma dx}{x} + \frac{\delta dy}{y}$ erhält, wovon das Integrale $l x^\gamma y^\delta$ ist. Es ist daher die allgemeine Form für die Multiplicatoren jedes Gliedes $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}\varphi(x^\gamma y^\delta)$. Damit nun diese beyden Multiplicatoren gleich werden, nehme man statt der Functionen, Potenzen, und setze

$$x^{\mu\alpha-1} y^{\mu\beta-1} = x^{\nu\gamma-m-1} y^{\nu\delta-n-1}.$$

Man muß also $\mu\alpha = \nu\gamma - m$ und $\mu\beta = \nu\delta - n$ setzen; hieraus folgt:

$$\mu = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \text{ und } \nu = \frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Es ist also der Multiplicator

$$x^{\mu\alpha-1} y^{\mu\beta-1} = x^{\nu\gamma-m-1} y^{\nu\delta-n-1},$$

wodurch unsere Gleichung folgende Form annimmt:

$$x^{\mu\alpha-1} y^{\mu\beta-1} (\alpha y dx + \beta x dy) = x^{\nu\gamma-1} y^{\nu\delta-1} (\gamma y dx + \delta x dy),$$

worin jedes Glied für sich integrabel ist, und demnach ist das gesuchte Integrale

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu\alpha} y^{\mu\beta} = \frac{1}{\nu} x^{\nu\gamma} y^{\nu\delta} + \text{Const.},$$

welches Resultat mit dem im vorigen Kapitel gefundenen übereinstimmt.

Zusatz 1.

§. 474. Da also Kürze halber

$$\mu = \frac{\gamma n - \delta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \text{ und } \nu = \frac{\alpha n - \beta m}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

gesetzt wurde, so entspricht der Differenzialgleichung

$$\alpha y dx + \beta x dy = x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy)$$

folgendes vollständige Integrale:

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu\alpha} y^{\mu\beta} = \frac{1}{\nu} x^{\nu\gamma} y^{\nu\delta} + \text{Const.}$$

Zusatz 2.

§. 475. Für den Fall, daß $\mu = 0$ oder $\gamma n = \delta m$ ist, wird das Integrale auf Logarithmen zurückgeführt, und wird

$$l x^\alpha y^\beta = \frac{1}{\nu} x^{\nu\gamma} y^{\nu\delta} + \text{Const.};$$

wird aber $\nu = 0$ oder $\alpha n = \beta m$, so wird das Integrale

$$\frac{1}{\mu} x^{\mu\alpha} y^{\mu\beta} = l x^\gamma y^\delta + \text{Const.}$$

Anmerkung.

§. 476. Hier scheinen die Fälle ausgenommen werden zu müssen, in welchen $\alpha\delta = \beta\gamma$ wird, weil dann die beyden Werthe von μ und ν unendlich werden. Wenn aber $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ ist, so erhält unsere Gleichung die Form

$$\alpha y dx + \beta x dy = \frac{\gamma}{\alpha} x^m y^n (\alpha y dx + \beta x dy), \text{ oder}$$

$$(\alpha y dx + \beta x dy) \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} x^m y^n\right) = 0.$$

Da diese Gleichung zwey Factoren enthält, so läßt selbe eine doppelte Auflösung zu, die man erhält, sobald jeder derselben für sich gleich Null gesetzt wird. Die erste Auflösung ergibt sich nämlich aus der Gleichung $\alpha y dx + \beta x dy = 0$, deren Integrale $x^\alpha y^\beta = \text{Const.}$ ist; der andere Factor aber gibt für sich die endliche Gleichung

$$1 - \frac{\gamma}{\alpha} x^m y^n = 0.$$

Jede dieser beyden Auflösungen leistet Genüge; überhaupt hat man sich bey allen Differenzialgleichungen, welche sich in Factoren auflösen lassen, wo daher eben so wie bey den endlichen Gleichungen die einzelnen Factoren Auflösungen geben, auf dieselbe Art zu benehmen. Gewöhnlich aber schafft man die endlichen Factoren vor der Integration noch durch Division weg, besonders wenn dieselben nicht durch die Natur

der Sache, sondern durch die angewandten Operationen erst in die Rechnung verwebt worden sind, weil sie eben so, wie es in der Algebra öfters der Fall ist, auf unnütze Auflösungen führen würden.

Aufgabe 64.

§. 477. **Für eine gegebene homogene Differenzialgleichung einen integrirenden Factor zu finden, und mittelst desselben das Integrale der Gleichung selbst zu finden.**

Auflösung.

Es sey $Pdx + Qdy = 0$ die gegebene Gleichung, in welchen P und Q homogene Functionen des n^{ten} Grades von x und y seyn sollen. Wir suchen also den Multiplicator L, welcher ebenfalls eine homogene Function vom Grade λ seyn soll. Wenn schon die Formel $L(Pdx + Qdy)$ integrabel ist, so ist das Integrale eine Function zwischen x und y, vom Grade $\lambda + n + 1$, welche Function wir durch Z bezeichnen wollen. Wir finden den homogenen Functionen gemäß

$$LPx + LQy = (\lambda + n + 1) Z;$$

setzt man nun $\lambda = -n - 1$, so wird $LPx + LQy$ entweder verschwinden oder eine beständige Größe werden, und wir erhalten hieraus $L = \frac{1}{Px + Qy}$, welches demnach der für unsere Gleichung gesuchte Multiplicator ist. Zu demselben Resultate gelangt man auch durch Absonderung der Veränderlichen; denn setzt man $y = ux$, so wird $P = x^n U$ und $Q = x^n V$, wo U und V bloß Functionen von u sind, und da $dy = udx + xdu$ ist, so erhält man

$$Pdx + Qdy = x^n Udx + x^n Vudx + x^n Vxdu, \text{ oder}$$
$$Pdx + Qdy = x^n (U + Vu) dx + x^{n+1} Vdu.$$

Diese Formel wird durch $x^{n+1}(U + Vu)$ dividirt, integrabel, und daher wird auch unsere Formel $Pdx + Qdy$ integrabel, wenn man selbe durch $x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy$ dividirt, nachdem man $U = \frac{P}{x^n}$ und $V = \frac{Q}{x^n}$ und $u = \frac{y}{x}$ gesetzt hat, oder der integrirende Factor ist

$\frac{1}{Px + Qy}$, und daher ist die Gleichung $\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy} = 0$ immer für sich integrabel.

Um nun das Integrale zu finden, integrire man die Formel $\int \frac{P\,dx}{Px+Qy}$, indem man y als constant betrachtet, und bestimme dessen Werth unter der Voraussetzung, daß er für $x = f$ verschwinde. Dann setzt man Kürze halber $\frac{P}{Px+Qy} = R$, suche den Werth von $\left(\frac{dR}{dy}\right)$ und bestimme auf dieselbe Art das Integrale $\int dx \left(\frac{dR}{dy}\right)$, indem man y wieder als constant ansieht. Es wird dann

$$\frac{Q}{Px+Qy} - \int dx \left(\frac{dR}{dy}\right)$$

bloß eine Function von y seyn, oder

$$\frac{Q}{Px+Qy} - \int dx \left(\frac{dR}{dy}\right) = Y,$$

und hieraus ergibt sich das gesuchte Integrale

$$\int \frac{P\,dx}{Px+Qy} + \int Y\,dy = \text{Const.}$$

Zusatz 1.

§. 478. Weil also die Formel $\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px+Qy}$ für sich integrabel ist, so wird, wenn Kürze wegen

$$\frac{P}{Px+Qy} = R \text{ und } \frac{Q}{Px+Qy} = S$$

gesetzt wird, nothwendig $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dS}{dx}\right)$. Es ist aber

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left[Qy\left(\frac{dP}{dy}\right) - Py\left(\frac{dQ}{dy}\right) - PQ\right] : (Px+Qy)^2$$

und

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left[Px\left(\frac{dQ}{dx}\right) - Qx\left(\frac{dP}{dx}\right) - PQ\right] : (Px+Qy)^2,$$

und daher erhält man

$$Qy\left(\frac{dP}{dy}\right) - Py\left(\frac{dQ}{dy}\right) = Px\left(\frac{dQ}{dx}\right) - Qx\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

Zusatz 2.

§. 479. Diese Gleichheit ergibt sich auch schon aus der Natur der homogenen Functionen; denn da P und Q Functionen zwischen x und y vom n^{ten} Grade sind, und

$dP = dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $dQ = dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) + dy\left(\frac{dQ}{dy}\right)$
ist, so wird

$$nP = x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dP}{dy}\right) \text{ und } nQ = x\left(\frac{dQ}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

Wir haben aber die Gleichung

$$Q\left[x\left(\frac{dP}{dx}\right) + y\left(\frac{dP}{dy}\right)\right] = P\left[x\left(\frac{dQ}{dx}\right) + y\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]$$

gefunden, und diese geht demnach über in die identische

$$nPQ = nPQ.$$

Zusatz 3.

§. 480. Wenn die homogene Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ für sich integrabel wäre, und es sind P und Q Functionen vom Grade -1, so ist $Px + Qy$ eine constante Größe, so z. B. ist $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = 0$ eine solche homogene Gleichung, und, schreibt man x und y an die Stelle von dx und dy, so erhält man $\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$.

Anmerkung.

§. 481. Wir haben in der Differenzialrechnung gezeigt, daß wenn V eine homogene Function von x und y des n^{ten} Grades ist, und man setzt $dV = Pdx + Qdy$, nothwendig $Px + Qy = nV$ sey. Ist demnach $Pdx + Qdy$ ein integrabler Ausdruck, und es bezeichnen P und Q homogene Functionen von $n - 1$ Dimensionen, so wird das Integrale auf der Stelle erhalten, denn es ist $V = \frac{1}{n}(Px + Qy)$, wo weiter keine Integration nöthig ist. Übrigens sehen wir doch, daß der Fall, in welchem $n = 0$ ist, ausgenommen werden muß, wie dieß bey unserer Gleichung der Fall ist, wenn sie durch einen Multiplicator integrabel gemacht wird; denn dann geht sie über in $\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy} = 0$, wo also dx und dy durch Functionen vom Grade -1 multiplicirt werden, wo das Integrale nicht ohne Integration erhalten werden kann. Der Grund dieser Ausnahme liegt darin, daß das Integrale der integrabeln Formel $Pdx + Qdy$, wo P und Q homogene Functionen des $(n-1)^{ten}$ Grades sind, nur dann eine homogene Function des n^{ten} Grades wird, so bald n nicht $= 0$ wird; denn nur in die-

sem einzigen Falle ist es möglich, daß das Integrale nicht eine Function vom 0ten Grade wird, wie dieß der Fall ist bey der Differenzial-Formel $\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$, deren Integrale $\frac{1}{2} l (x^2 + y^2)$ ist. Wir haben aus diesem Grunde die Integrabilität der Formel $\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy}$ auf diesem besonderen Wege erwiesen, der sich aus dem Grunde der Absonderungsfähigkeit ergibt. Übrigens ist dieß doch, ohne Rücksicht auf die Quelle, woher wir es wissen, für unsere gegenwärtigen Untersuchungen höchst merkwürdig, daß alle homogenen Differenzialgleichungen von der Form $P\,dx + Q\,dy = 0$, durch den Multiplicator $\frac{1}{Px + Qy}$ integrabel gemacht werden. Es handelt sich demnach um eine Methode, mit Hülfe deren dieser Multiplicator a priori gefunden werden könnte, wodurch die Analysis am Umfange allerdings gewinnen würde. So lange wir aber nicht so weit vordringen können, so wird es doch höchst wichtig seyn, solche Multiplicatoren für die übrigen Fälle zu kennen. Für zwey Gattungen von Gleichungen haben wir das Verlangte bereits geleistet, für die übrigen Gleichungen, welche wir oben zu integriren lehrten, werden wir Multiplicatoren aufsuchen; die Reduction aber auf die Absonderung wird uns zur Bestimmung dieser Multiplicatoren verhelfen, wie wir bey der folgenden Aufgabe zeigen werden.

Aufgabe 65.

§. 482. **Wenn eine Differenzialgleichung gegeben ist, welche die Absonderung der Veränderlichen zuläßt, einen Multiplicator zu finden, durch welchen dieselbe integrabel wird.**

Auflösung.

Es sey $P\,dx + Q\,dy = 0$, welche Gleichung durch irgend eine Substitution, indem man statt x und y zwey andere Veränderliche, t und u einführt, der Absonderung fähig wird. Nehmen wir demnach an, es werden durch diese Substitutionen $P\,dx + Q\,dy = R\,dt + S\,du$, und daß dann diese Formel $R\,dt + S\,du$, durch V dividirt, abgesondert werde, so daß in dem Ausdrucke $R\,dt + S\,du$ die Größe $\frac{R}{V}$ bloß eine Function von t, und $\frac{S}{V}$ bloß eine Function von u werde. Da also die Formel $\frac{R\,dt + S\,du}{V}$ für sich integrabel ist, so wird auch

der Ausdruck $\frac{Pdx + Qdy}{V}$ integrabel, denn dieser Ausdruck ist jenem gleich, sobald in V die Veränderlichen x und y wieder gesetzt werden. Durch die Zurückführung der Gleichung $Pdx + Qdy = o$ auf die Absonderung lernen wir also, daß der Multiplicator, durch welchen jene Gleichung integrabel gemacht wird, $\frac{1}{V}$ sey, und so können wir auch für jene Gleichungen, welche die Absonderung der Veränderlichen zulassen, den integrirenden Factor angeben.

Zusatz 1.

§. 483. Die Methode, die Differenzialgleichungen durch Multiplicatoren zu integriren, ist daher eben so umfassend, als die erstere Methode, nach welcher man denselben Zweck durch Absonderung der Veränderlichen erreicht, und zwar aus dem Grunde, weil die Absonderung für jede Gleichung, bey welcher sie Statt findet, den Multiplicator selbst darbiethet.

Zusatz 2.

§. 484. Dagegen ist die Methode, durch Multiplicatoren zu integriren, allgemeiner als die andere, wenn man Multiplicatoren für solche Gleichungen angeben kann, bey welchen wir keinen Kunstgriff kennen, durch welchen in denselben die Veränderlichen abgesondert werden können.

Anmerkung.

§. 485. Obgleich wir aber durch die Absonderung den zweckmäßigen Multiplicator finden können, so biethet uns dennoch die Kenntniß des Multiplicators keine Mittel dar, die Absonderung zu bewerkstelligen; aus welchem Grunde die Methode, durch Factoren zu integriren, ebenfalls bey weitem den Vorzug vor der ersten Methode zu verdienen scheint. Denn hat uns bisher gleichwohl die Absonderung der Veränderlichen auf die Bestimmung der Multiplicatoren geleitet, so gibt es dennoch ohne Zweifel einen Weg, die Multiplicatoren ausfindig zu machen, ohne die Absonderung zu berücksichtigen, obgleich dieser Weg uns noch unbekannt ist. Wir werden aber unserem Ziele allmählich näher rücken, wenn wir für recht viele Gleichungen zweckmäßige Multiplicatoren kennen werden. Wir wollen daher in den folgenden Beyspielen jene Factoren noch aufsuchen, welche mit Hülfe der Absondernng gefunden werden können.

Beyspiel 1.

§. 486. Die Differenzialgleichung des ersten Grades

$$dx\,(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy\,(\delta x + \varepsilon y + \zeta) = 0$$

sey gegeben, man bestimme für dieselbe einen tauglichen Multiplicator.

Diese Gleichung wird zur Absonderung vorbereitet, wenn man

$$\alpha x + \beta y + \gamma = r \quad \text{und} \quad \delta x + \varepsilon y + \zeta = s$$

setzt, also

$$\alpha dx + \beta dy = dr \quad \text{und} \quad \delta dx + \varepsilon dy = ds,$$

hieraus folgt

$$dx = \frac{\varepsilon dr - \beta ds}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \quad \text{und} \quad dy = \frac{\alpha ds - \delta dr}{\alpha\varepsilon - \beta\delta};$$

unsere Gleichung geht daher, wenn wir den Nenner, als eine constante Größe, weglassen, über in

$$\varepsilon r dr - \beta r ds + \alpha s ds - \delta s dr = 0,$$

welche Gleichung homogen ist, und durch $\varepsilon r^2 - (\beta + \delta)\, s r + \alpha s^2$ dividirt, integrabel wird. Dasselbe Resultat erhalten wir auch durch Absonderung, denn wird $r = su$ gesetzt, so findet man

$$\varepsilon s^2 u du + \varepsilon s u^2 ds - \beta s u ds + \alpha s ds - \delta s^2 du - \delta s u ds = 0,$$

oder

$$s^2 du\,(\varepsilon u - \delta) + s ds\,(\varepsilon u^2 - \beta u - \delta u + \alpha) = 0;$$

dividirt man diese Gleichung durch $s^2(\varepsilon u^2 - \beta u - \delta u + \alpha)$, so werden die Veränderlichen abgesondert. Es ist daher der Multiplicator unserer vorgelegten Gleichung

$$\frac{1}{s^2(\varepsilon u^2 - \beta u - \delta u + \alpha)} = \frac{1}{\varepsilon r^2 - \beta rs - \delta rs + \alpha s^2} = \frac{1}{r(\varepsilon r - \beta s) + s(\alpha s - \delta r)}$$

oder wenn man die obigen Werthe wieder substituirt:

$$\frac{1}{(\alpha x + \beta y + \gamma)\,[(\alpha\varepsilon - \beta\delta)\,x + \gamma\varepsilon - \beta\zeta] + (\delta x + \varepsilon y + \zeta)\,[(\alpha\varepsilon - \beta\delta)\,y + \alpha\zeta - \gamma\delta]}$$

und nach verrichteter Multiplication

$$\frac{1}{\left\{\begin{matrix}(\alpha\varepsilon - \beta\delta)\,[\alpha x^2 + (\beta + \delta)\,xy + \varepsilon y^2 + \gamma x + \zeta y] + \alpha\zeta^2 - (\beta - \delta)\,\gamma\zeta + \gamma^2\varepsilon + \\ + [\alpha\gamma\varepsilon - (\beta - \delta)\,\alpha\zeta - \gamma\delta^2]\,x + [\alpha\varepsilon\zeta + (\beta - \delta)\,\gamma\varepsilon - \beta^2\zeta]\,y.\end{matrix}\right\}}$$

Die Gleichung

$$\frac{dx\,(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy\,(\delta x + \varepsilon y + \zeta)}{(\alpha\varepsilon - \beta\delta)\,[\alpha x^2 + (\beta + \delta)\,xy + \varepsilon y^2 + \gamma x + \zeta y] + Ax + By + C} = 0,$$

wobey
$$A = \alpha\gamma\varepsilon - (\beta - \delta)\,\alpha\zeta - \gamma\delta^2,$$
$$B = \alpha\varepsilon\zeta + (\beta - \delta)\,\gamma\varepsilon - \beta^2\zeta,$$
$$C = \alpha\zeta^2 - (\beta - \delta)\,\gamma\zeta + \gamma^2\varepsilon,$$

ist demnach für sich integrabel.

Zusatz.

§. 487. Sollte etwa $\alpha\varepsilon - \beta\delta$ gleich Null werden, so wird dadurch dieser Multiplicator nicht gestört, da doch die Absonderung wenigstens durch diese Operation nicht gelingt, denn es sey $\alpha = ma$, $\beta = mb$, $\delta = na$, $\varepsilon = nb$, damit man folgende Gleichung erhält:

$$dx\,[m\,(ax + by) + \gamma] + dy\,[n\,(ax + by) + \zeta] = 0,$$

weil
$$A = a\,(na - mb)\,(m\zeta - n\gamma),$$
$$B = b\,(na - mb)\,(m\zeta - n\gamma) \text{ und}$$
$$C = (m\zeta - n\gamma)\,(a\zeta - b\gamma).$$

Läßt man nun den gemeinschaftlichen Factor weg, so ist der Multiplicator

$$\frac{1}{(na - mb)\,(ax + by) + a\zeta - b\gamma},$$

so daß also die Gleichung

$$\frac{(ax + by)\,(m\,dx + n\,dy) + \gamma\,dx + \zeta\,dy}{(na - mb)\,(ax + by) + a\zeta - b\gamma} = 0$$

für sich integrabel wird.

Beyspiel 2.

§. 488. Für die Differenzialgleichung

$$y\,dx\,(c + nx) - dy\,(y + a + bx + nx^2) = 0$$

einen schicklichen Multiplicator zu finden.

Man setze $\frac{y\,(c + nx)}{y + c + bx + nx^2} = u$, oder $y = \frac{u\,(a + bx + nx^2)}{a + nx - u}$, damit unsere Gleichung die einfachere Form erhalte:

$$y\,dx\,(c + nx) - \frac{y\,dy\,(c + nx)}{u} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{y\,(c + nx)}{u}\,(u\,dx - dy) = 0, \text{ oder } \frac{y^2\,(c + nx)}{u}\left(\frac{dy}{y} - u\frac{dx}{y}\right) = 0,$$

denn man muß sich hier wohl in Acht nehmen, keinen Factor auszulassen. Durch diese Substitution findet man

$$\frac{dy}{y} - \frac{n\,dx}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dx\,(b+2nx)}{a+bx+nx^2} + \frac{du - n\,dx}{c+nx-u} - \frac{dx\,(c+nx-u)}{a+bx+nx^2}$$

$$= \frac{du\,(c+nx)}{u\,(c+nx-u)} - \frac{dx\,(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}{(c+nx-u)(a+bx+nx^2)}.$$

Unsere Gleichung nimmt daher folgende Form an:

$$\frac{y^2(c+nx)^2}{u(c+nx-u)}\left(\frac{du}{u} - \frac{dx\,(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}{(a+bx+nx^2)(c+nx)}\right) = o,$$

welche durch Multiplication mit dem Factor

$$\frac{u\,(c+nx-u)}{y^2(c+nx)^2(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}$$

abgesondert wird, denn man erhält dann

$$\frac{du}{u\,(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)} - \frac{dx}{(a+bx+nx^2)(c+nx)} = o.$$

Damit wir nun den gesuchten Multiplicator erhalten, darf man nur in den letzten Ausdruck für u seinen Werth setzen, und man findet dann für jenen Factor

$$\frac{a+bx+nx^2}{\left\{\begin{array}{c}n(a+bx+nx^2)y^3+(a+bx+nx^2)[2na-bc+n(b-2c)x]y^2+\\+(na+c^2-bc)(a+bx+nx^2)^2y,\end{array}\right\}}$$

welches sich auf folgende Form reducirt:

$$\frac{1}{ny^3+(2na-bc)y^2+n(b-2c)xy^2+(na+c^2-bc)(a+bx+nx^2)y}.$$

Beyspiel 3.

§. 489. Für die Differenzialgleichung

$$\frac{n\,dx\,(1+y^2)\surd(1+y^2)}{\surd(1+x^2)} + (x-y)\,dy = o$$

einen integrirenden Factor zu finden.

Wir setzten oben (§. 435) $y = \frac{x-u}{1+xu}$ oder $u = \frac{x-y}{1+xy}$, so wird $x - y = \frac{u(1+x^2)}{1+xu}$ und $1 + y^2 = \frac{(1+x^2)(1+u^2)}{(1+xu)^2}$, daher nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$\frac{n\,dx\,(1+x^2)(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+xu)^3} + \frac{u\,dx\,(1+x^2)(1+u^2) - u\,du\,(1+x^2)^2}{(1+xu)^3} = o.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1+xu)^3$ und dividirt sie dann durch $(1+x^2)^2(1+u^2)[u+n\sqrt{(1+u^2)}]$, so wird dieselbe abgesondert, der integrirende Factor unserer Gleichung ist demnach

$$\frac{(1+xu)^3}{(1+x^2)^2(1+u^2)(u+n\sqrt{(1+u^2)})},$$

welcher in $\dfrac{1+xu}{(1+x^2)\,(1+y^2)\,(u+n\sqrt{(1+u^2)})}$ übergeht, weil $1+u^2=\dfrac{(1+y^2)(1+xu)^2}{(1+x^2)}$ ist.

Da nun $u=\dfrac{x-y}{1+xy}$ ist, so wird $\sqrt{(1+u^2)}=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+xy}$ und $1+xu=\dfrac{1+x^2}{1+xy}$, und daher ist unser Multiplicator

$$\frac{1}{(1+y^2)(x-y+n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)})},$$

so daß die Gleichung

$$\frac{n\,dx\,(1+y^2)\sqrt{(1+y^2)}+(x-y)\,dy\sqrt{(1+x^2)}}{(1+y^2)(x-y+n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)})\sqrt{(1+x^2)}}=0$$

für sich integrabel wird, bey deren Integration wir aber nicht verweilen wollen, weil wir das Integrale schon oben angegeben haben.

Beyspiel 4.

§. 490. Ein anderes merkwürdiges Beyspiel biethet folgende Gleichung dar:

$$ydx-xdy+ax^ny\,dy\,(x^n+b)^{\frac{1}{n}}=0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$xdy-ydx+\frac{1}{b}x^{n+1}dy=\frac{1}{b}x^{n+1}dy+ax^ny\,dy\,(x^n+b)^{\frac{1}{n}}$$

so werden beyde Theile der Gleichung für sich integrabel, wenn man die Gleichung mit dem Factor

$$\frac{y^{n-1}}{x^{n+1}+abx^ny(x^n+b)^{\frac{1}{n}}}$$

multiplicirt, um diesen durch die Absonderung der Veränderlichen zu bestimmen, muß man die nicht so leicht in die Augen fallende Substitution $\dfrac{x}{(x^n+b)^{\frac{1}{n}}}=vy$ machen, denn dann wird $x^n=\dfrac{b\,v^ny^n}{1-v^ny^n}$,

und dadurch geht die Gleichung $\frac{y\,dx - x\,dy}{(x^n + b)^{\frac{1}{n}}} + a x^n y\,dy = 0$ über in folgende:

$$\frac{y^2 dv + v^{n+1} y^{n+1} dy + ab\,v^n y^{n+1} dy}{1 - v^n y^n} = 0;$$

multiplicirt man diese letztere Gleichung durch $\frac{1 - v^n y^n}{y^2 v^n (ab + v)}$, so erhält man die abgesonderte Gleichung

$$\frac{dv}{v^n (ab + v)} + y^{n-1} dy = 0,$$

woraus derselbe Multiplicator gefunden wird.

Beyspiel 5.

§. 491. Für die Differenzialgleichung

$$dy + y^2 dx - \frac{a\,dx}{x^4} = 0$$

einen integrirenden Factor zu finden.

Nach §. 436 setze man $x = \frac{1}{t}$, also $dx = -\frac{dt}{t^2}$, so geht unsere Formel über in $dy - \frac{y^2 dt}{t^2} + a t^2 dt$, in welcher letztern man von Neuem $y = t - t^2 z$ setzt, wodurch man $-t^2 (dz + z^2 dt - a\,dt)$ erhält, welcher Ausdruck durch Division mit $t^2 (z^2 - a)$ abgesondert wird; es wird demnach auch unsere Gleichung, durch

$$t^2 (z^2 - a) = \frac{(t - y)^2 - a t^4}{t^2} = (1 - xy)^2 - \frac{a}{x^2}$$

dividirt, integrabel werden, hieraus ergibt sich nun der Multiplicator $= \frac{x^2}{x^2 (1 - xy)^2 - a}$ und die integrable Gleichung

$$\frac{x^4 dy + x^4 y^2 dx - a\,dx}{x^4 (1 - xy)^2 - a x^2} = 0.$$

Betrachtet man nun x als constant, so daß das aus dy entstandene Integrale

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\, l\, \frac{\sqrt{a} + x(1 - xy)}{\sqrt{a} - x(1 - xy)} + X \text{ ist.}$$

Um den Werth von X zu erhalten, differenziire man dieses Integrale, so erhält man $\frac{axy\,dx - dx}{x^2 (1 - xy)^2 - a} + dX = \frac{x^4 y^2 dx - a\,dx}{x^4 (1 - xy)^2 - a x^2}$ und hieraus folgt

$$dX = \frac{x^4 y^2 dx - a\,dx - 2 x^3 y\,dx + x^2 dx}{x^4 (1 - xy)^2 - a x^2} = \frac{dx}{x^2} \text{ und } X = -\frac{1}{x} + C,$$

Folglich ist die vollständige Integralgleichung

$$l\frac{\sqrt{a} + x(1 - xy)}{\sqrt{a} - x(1 - xy)} = \frac{2\sqrt{a}}{x} + C.$$

Anmerkung.

§. 492. Wir haben also mehrere Fälle von Differenzialgleichungen, für welche wir die integrirenden Factoren kennen; die Betrachtung derselben wird die folgende schöne Untersuchung sehr erleichtern. Sind wir gleichwohl von der zuverläßigen Methode, für jeden Fall die integrirenden Factoren zu bestimmen, noch weit entfernt, so können wir denn doch auf die Formen jener Gleichungen schließen, welche durch gegebene Factoren integrabel werden, und dieß scheint schon in dieser schwierigen Lehre von großem Nutzen zu seyn. In dem folgenden Kapitel werden wir solche Gleichungen aufsuchen, welche gegebenen Factoren entsprechen. Die hier entwickelten Beyspiele biethen uns nämlich die zweckmäßigen Formen der Multiplicatoren dar, und wir werden daher auf dieselben unsere ganze Untersuchung gründen.

Kapitel III.

Von der Auffindung der Differenzialgleichungen, welche durch Factoren von gegebener Form integrabel gemacht werden.

Aufgabe 66.

§. 493. Die Functionen P und Q von x so zu bestimmen, daß die Differenzialgleichung

$$Pydx + (y + Q)dy = 0$$

durch den Factor $\frac{1}{y^3 + My^2 + Ny}$, wo M und N Functionen von x sind, integrabel werden.

Auflösung.

Es muß also das Differenziale des Coefficienten von dx, nämlich $\frac{Py}{y^3 + My^2 + Ny}$, in Bezug auf y genommen, gleich seyn dem Differenziale des Coefficienten von dy, nämlich $\frac{y + Q}{y^3 + My^2 + Ny}$, nach x genommen. Die Gleichheit dieser beyden Werthe gibt mit Vernachläßigung des gemeinschaftlichen Nenners

$$-2Py^3 - PMy^2 = (y^3 + My^2 + Ny)\frac{dQ}{dx} - (y + Q)\frac{(y^2dM + ydN)}{dx},$$

und diese Gleichung, nach den Potenzen von y geordnet, gibt

$$\begin{aligned} 0 = 2Py^3dx &+ PMy^2dx \\ + \quad y^3dQ &+ My^2dQ + NydQ \\ - \quad y^3dM &- y^2dN \\ &- Qy^2dM - QydN. \end{aligned}$$

Setzt man die Coefficienten der einzelnen Potenzen für sich gleich Null, so erhalten wir erstens $NdQ - QdN = 0$, oder $\frac{dN}{N} = \frac{dQ}{Q}$, und durch Integration $N = \alpha Q$. Die beyden anderen Bedingungen geben

$$\text{I. } 2Pdx + dQ - dM = 0 \text{ und}$$

$$\text{II. } PMdx + MdQ - \alpha dQ - QdM = 0,$$

und daher gibt die Differenz I. M — II. 2 folgende Gleichung:

$$-MdQ - MdM + 2\alpha dQ + 2QdM = 0, \text{ oder}$$

$$dQ + 2Q\frac{dM}{2\alpha - M} = \frac{MdM}{2\alpha - M}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $(2\alpha - M)^2$ und integrirt, so findet man

$$\frac{Q}{(2\alpha - M)^2} = \int\frac{MdM}{(2\alpha - M)^3} = -\int\frac{dM}{(2\alpha - M)^2} + 2\alpha\int\frac{dM}{(2\alpha - M)^3}$$

oder

$$\frac{Q}{(2\alpha - M)^2} = -\frac{1}{2\alpha - M} + \frac{\alpha}{(2\alpha - M)^2} + \beta = \frac{M - \alpha}{(2\alpha - M)^2} + \beta.$$

Es ist demnach $Q = M - \alpha + \beta(2\alpha - M)^2$, und daher

$$2Pdx = dM - dQ = 2\beta dM(2\alpha - M),$$

und so können wir für M jede beliebige Function von M setzen. Man nehme also $M = 2\alpha - X$, so wird $Pdx = -\beta XdX$ und $Q = \alpha - X + \beta X^2$ und $N = \alpha^2 - \alpha X + \alpha\beta X^2$. Wir erhalten demnach für die Gleichung

$$-\beta yXdX + dy(\alpha - X + \beta X^2 + y) = 0,$$

folgenden integrirenden Factor:

$$\frac{1}{y^3 + (2\alpha - X)y^2 + \alpha(\alpha - X + \beta X^2)y}.$$

Zusatz 1.

§. 494. Man gebe der Gleichung die Form

$$dy(y + A + BV + CV^2) - CyVdV = 0,$$

so wird $\alpha = A$, $X = -BV$, $\beta X^2 = \beta B^2V^2 = CV^2$, also $\beta = \frac{C}{B^2}$, und daher wird

$$\frac{1}{y^3 + (2A + BV)y^2 + A(A + BV + CV^2)y}$$

der integrirende Factor seyn.

Zusatz 2.

§. 495. Setzt man hier $V = a + x$, so erhält man eine Gleichung, ähnlich jener, welche wir §. 488 integrirt haben, und der Multiplicator stimmt auch mit dem am angeführten Orte gegebenen überein. Dieser Multiplicator läßt sich bequemer unter folgender Form darstellen:

$$\frac{1}{y(y + A)^2 + BVy(y + A) + ACV^2y}.$$

Zusatz 3.

§. 496. Setzen wir $y + A = z$, so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$dz(z + BV + CV^2) - C(z - A) V dV = 0,$$

welcher Gleichung der Multiplicator $\frac{1}{(z - A)(z^2 + BVz + ACV^2)}$ entspricht, so daß die Gleichung

$$\frac{dz(z + BV + CV^2) - C(z - A) V dV}{(z - A)(z^2 + BVz + ACV^2)} = 0$$

für sich integrabel ist.

Anmerkung.

§. 497. So wie wir hier für die Gleichung

$$Pydx + (y + Q) dy = 0$$

den Multiplicator $= \frac{y^{-1}}{y^2 + My + N}$ angenommen haben, so hätten wir allgemein $\frac{y^{n-1}}{y^2 + My + N}$ statt desselben nehmen können, damit die Gleichung $\frac{Py^n dx + (y^n + Qy^{n-1}) dy}{y^2 + My + N} = 0$ für sich integrabel seyn müsse. Vergleicht man diese Gleichung mit der Form $Rdx + Sdy = 0$, so daß $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dS}{dx}\right)$ wird, so erhalten wir

$$(n - 2) Py^{n+1} + (n - 1) PMy^n + nPNy^{n-1} =$$
$$= (y^2 + My + N) y^{n-1} \frac{dQ}{dx} - (y^n + Qy^{n-1}) \left(y \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx}\right),$$

oder wenn die Gleichung geordnet wird

$$\left.\begin{array}{lll} (n-2) Py^{n+1} dx & + (n-1) PMy^n dx & + nPNy^{n-1} dx \\ - y^{n+1} dQ & - My^n dQ & - Ny^{n-1} dQ \\ + y^{n+1} dM & + y^n dN & + y^{n-1} QdN \\ & + y^n QdM & \end{array}\right\} = 0.$$

Setzt man nun die einzelnen Glieder gleich Null, so wird

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & (n-2) Pdx & = dQ - dM, \\ \text{II.} & (n-1) MPdx & = MdQ - QdM - dN, \\ \text{III.} & nNPdx & = NdQ - QdN. \end{array}$$

Es sey nun $Pdx = dV$, so gibt die erste Gleichung

$$Q = A + M + (n - 2) V.$$

Setzt man diesen Werth in die zweyte Gleichung, so erhält man

$$MdV + (n-2)\,VdM + AdM + dN = 0,$$

und die dritte Gleichung verwandelt sich in

$$2NdV + (n-2)\,VdN + MdN - NdM + AdN = 0,$$

und durch Elimination von dV findet man hieraus

$$(n-2)\,V + A = \frac{M^2dN - MNdM - 2NdN}{2NdM - MdN}.$$

Wollten wir aber hieraus V bestimmen, so würden wir auf eine Differenzio-Differenzialgleichung stoßen. Für den Fall, daß $n=2$ ist, ist die Sache für sich klar.

Beyspiel.

§. 498. Es sey bey der Entwickelung dieses Falles $n=2$, so daß die Gleichung

$$\frac{y\,[Pydx + (y+Q)\,dy]}{y^2 + My + N} = 0$$

für sich integrabel werde.

Zuerst muß $Q = A + M$ seyn, dann aber

$$2ANdM - AMdN = M\,(MdN - NdM) - 2NdN,$$

welche Gleichung wir also integriren müssen; und da diese Gleichung in keiner der bisher behandelten enthalten ist, so müssen wir ihr eine bessere Form zu geben suchen. Man setze demnach $M = Nu$, damit

$$MdN - NdM = -N^2du \text{ und}$$
$$2NdM - MdN = 2N^2du + NudN$$

werde, so wird

$$2AN^2du + ANudN + N^3udu + 2NdN = 0, \text{ oder}$$
$$\frac{2dN}{N^2} + \frac{AudN}{N^2} + \frac{2Adu}{N} + udu = 0.$$

Man setze ferner $\frac{1}{N} = v$, oder $N = \frac{1}{v}$, so wird

$$-2dv - Audv + 2Avdu + udu = 0, \text{ oder}$$
$$dv - \frac{2Avdu}{2+Au} = \frac{udu}{2+Au}.$$

Hier hat die Veränderliche v nur eine Dimension, und daher leuchtet ein, daß diese Gleichung integrabel werde, wenn man dieselbe durch $(2+Au)^2$ dividirt. Man erhält nämlich

$$\frac{v}{(2+Au)^3} = \int \frac{u\,du}{(2+Au)^2} = \frac{C}{A^2} - \frac{1+Au}{A^2(2+Au)^2}$$ und daher

$$v = \frac{C(2+Au)^2 - 1 - Au}{A^2}.$$

Nimmt man also für u eine beliebige Function von x, so wird

$$N = \frac{A^2}{C(2+Au)^2 - 1 - Au} \text{ und } M = \frac{A^2 u}{C(2+Au)^2 - 1 - Au},$$

endlich $Q = \frac{AC(2+Au)^2 - A}{C(2+Au)^2 - 1 - Au}$.

Nun erhalten wir aus der dritten Gleichung

$$2NPdx = NdQ - QdN \quad \text{oder} \quad 2Pdx = Nd\frac{Q}{N},$$

und $\frac{Q}{N} = \frac{C(2+Au)^2 - 1}{A}$ daher $d\frac{Q}{N} = 2Cdu(2+Au)$, und demnach $Pdx = \frac{A^2 Cdu(2+Au)}{C(2+Au)^2 - 1 - Au}$.

Die für sich integrable Gleichung ist also

$$\frac{A^2Cy^2du(2+Au) + ydy[C(2+Au)^2y - (1+Au)y + AC(2+Au)^2 - A]}{C(2+Au)^2y^2 - (1+Au)y^2 + A^2uy + A^2} = 0,$$

welche für $Au + 2 = t$ folgende Form annimmt:

$$y.\frac{ACytdt + ydy(Ct^2 - t + 1) + Ady(Ct^2 - 1)}{Ct^2y^2 - (t-1)y^2 + A(t-2)y + A^2} = 0.$$

Setzen wir aber $A = \alpha$, $C = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$ und $t = -\frac{\beta x}{\alpha}$, so finden wir

$$y.\frac{\alpha\gamma xydx + ydy(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \alpha dy(\alpha - \gamma x^2)}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)y^2 - \alpha(2\alpha + \beta x)y + \alpha^3} = 0.$$

Zusatz 1.

§. 499. Die Gleichung

$$\alpha\gamma xydx + ydy(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \alpha dy(\alpha - \gamma x^2) = 0$$

läßt sich demnach auf dem vorgezeichneten Wege integriren. Wie man aber in dieser Gleichung die Veränderlichen absondern könne, fällt nicht sogleich in die Augen. Der integrirende Multiplicator aber ist

$$\frac{y}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)y^2 - \alpha(2q + \beta x)y + \alpha^3}.$$

Zusatz 2.

§. 500. Dieser Multiplicator läßt sich aber auch so darstellen, daß sein Nenner in Factoren aufgelöst erscheint, nämlich:

$$\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)y}{[(\alpha+\beta x+\gamma x^2)y-(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta x)+\alpha x\sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma)}]}\times$$

$$\frac{1}{[(\alpha+\beta x+\gamma x^2)y-\alpha(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta x)-\alpha x\sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma)}]}$$

Zusatz 3.

§. 501. Setzen wir also

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)y-\alpha(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta x)=\alpha z,$$

so wird der Multiplicator

$$\frac{\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+z}{[z+x\sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2-\gamma)}]\;[z-x\sqrt{(\tfrac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma)}]}.$$

Weil aber $y=\dfrac{\alpha^2+\tfrac{1}{2}\alpha\beta x+\alpha z}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, so ist unsere Gleichung

$$\gamma x y\,dx+dy\,(z+\tfrac{1}{2}\beta x+\gamma x^2)=0.$$

Nun ist aber

$$dy=\frac{-\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha\beta+4\alpha\gamma x+\beta\gamma x^2)dx-\alpha z dx(\beta+2\gamma x)+\alpha dz(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2},$$

welcher Werth jedoch substituirt, auf eine zu sehr verwickelte Gleichung führt.

Aufgabe 67.

§. 502. Eine Differenzialgleichung von der Form

$$yP\,dx+(Qy+R)\,dy=0$$

aufzufinden, bey welcher für P, Q, R solche Functionen von x zu bestimmen sind, daß die vorgelegte Gleichung durch den Multiplicator $\dfrac{y^m}{(1+Sy)^n}$, wobey S ebenfalls eine Function von x bezeichnet, integrabel werde.

Auflösung.

Weil dx durch $\dfrac{y^{m+1}P}{(1+Sy)^n}$ und dy durch $\dfrac{Qy^{m+1}+Ry^m}{(1+Sy)^n}$ multiplicirt wird, so muß folgende Gleichung Statt haben:

$$(m+1)Py^m(1+Sy)-nPSy^{m+1}=$$

$$=\frac{(1+Sy)(y^{m+1}dQ+y^m dR)-ny\,dS\,(Qy^{m+1}+Ry^m)}{dx}.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so findet man

$$\left.\begin{array}{lll}(m+1)Py^m dx + (m+1-n)PSy^{m+1}dx & & -y^{m+2}SdQ \\ \quad -y^m dR - y^{m+1}dQ & & +ny^{m+2}QdS \\ \qquad -y^{m+1}SdR & & \\ \qquad +ny^{m+1}RdS. & & \end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus folgt $Pdx = \frac{dR}{m+1}$ und $SdQ = nQdS$, und daher $Q = AS^n$ und $dQ = nAS^{n-1}dS$. Substituirt man diese Werthe in dem mittlern Gliede, so wird

$\frac{m+1-n}{m+1}SdR - nAS^{n-1}dS - SdR + nRdS = 0$, oder

$$-\frac{SdR}{m+1} - AS^{n-1}dS + RdS = 0, \text{ und daher}$$

$$dR - \frac{(m+1)RdS}{S} = -(m+1)AS^{n-1}dS.$$

Dividirt man die letzte Gleichung durch S^{m+1} und integrirt, so erhält man

$$\frac{R}{S^{m+1}} = B - \frac{(m+1)AS^{n-m-2}}{n-m-2}.$$

Setzen wir demnach $A = (m+2-n)C$, damit $Q = (m+2-n)CS^n$ und $R = BS^{m+1} + (m+1)CS^{n-1}$ werde, so ist

$$Pdx = BS^m dS + (n-1)CS^{n-2}dS.$$

Wir erhalten demnach die Gleichung

$$ydS\,[BS^m + (n-1)CS^{n-2}]$$
$$+ dy\,[(m+2-n)CS^n y + BS^{m+1} + (m+1)CS^{n-1}] = 0;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, so wird sie integrabel und man kann für S jede beliebige Function setzen.

Zusatz 1.

§. 503. Die Gleichung

$$BySmdS + BS^{m+1}dy + (n-1)CyS^{n-2}dS$$
$$+ (m+1)CS^{n-1}dy + (m+2-n)CS^n y dy = 0$$

läßt sich demnach integriren, auch zerfällt sie von selbst in zwey Theile, nämlich

$$BS^m(ydS + Sdy)$$
$$+ CS^{n-2}[(n-1)ydS + (m+1)Sdy + (m+2-n)S^2ydy] = 0.$$

deren jeder für sich integrabel wird, sobald man ihn mit $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$ multiplicirt.

Zusatz 2.

§. 504. Der erste Theil $BS^m(ydS + Sdy)$ wird integrabel gemacht durch den Multiplicator $\frac{1}{S^m}\varphi(Sy)$, denn es ist die Formel $B(ydS + Sdy)\varphi(Sy)$ für sich integrabel; für diesen Theil wird demnach $S^{\lambda-m}y^\lambda(1+Sy)^\mu$ der Multiplicator seyn; dieser enthält zugleich den angenommenen Factor $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, sobald man $\lambda = m$ und $\mu = -n$ setzt. Es ist aber $\int\frac{y^m}{(1+Sy)^n}BS^m(ydS + Sdy) = B\int\frac{v^m dv}{(1+v)^n}$, wenn $Sy = v$ gesetzt wird.

Zusatz 3.

§. 505. Für den andern Theil unserer Gleichung, welcher für $S = \frac{1}{v}$ in

$$\frac{C}{v^n}[-(n-1)ydv + (m+1)vdy + (m+2-n)ydy]$$

übergeht, erhalten wir

$$-\frac{(n-1)}{v^n}Cy\left(dv - \frac{(m+1)vdy}{(n-1)y} - \frac{(m+2-n)dy}{n-1}\right) =$$

$$= -\frac{(n-1)Cy^{\frac{m+n}{n-1}}}{v^n}\left(y^{\frac{-m-1}{n-1}}dv - \frac{m+1}{n-1}y^{-\frac{m+n}{n-1}}vdy - \frac{m+2-n}{n-1}y^{-\frac{m+1}{n-1}}dy\right)$$

$$= -\frac{(n-1)Cy^{\frac{m+n}{n-1}}}{v^n}d.\left(y^{-\frac{m+1}{n-1}}v + y^{\frac{n-m-1}{n-1}}\right).$$

Der zweyte Theil unserer Gleichung stellt sich demnach unter folgender Form dar:

$$-(n-1)CS^n y^{\frac{m+n}{n-1}}d.\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}S}.$$

Der diesen Ausdruck integrirende Multiplicator ist daher allgemein

$$\frac{1}{S^n y^{\frac{m+n}{n-1}}}\varphi\left(\frac{1+Sy}{Sy^{\frac{m+1}{n-1}}}\right).$$

Zusatz 4.

§. 506. Für den zweyten Theil erhalten wir also den Multiplicator $\frac{(1+Sy)^\mu}{S^{n+\mu}\, y^{\frac{m+n+\mu(m+1)}{n-1}}}$, durch welchen dieser Theil sich verwandelt in

$$-(n-1)\, C\, .\, \frac{(1+Sy)^\mu}{S^\mu\, y^{\frac{\mu(m+1)}{n-1}}}\, d\, .\, \frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}\, S}.$$

Das Integrale hievon ist

$$-\frac{(n-1)\, C z^{\mu+1}}{\mu+1}, \text{ wenn wir } z = \frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}\, S} \text{ setzen.}$$

Zusatz 5.

§. 507. Nun wird der Multiplicator für den ersten Theil

$$S^{\lambda-m}\, y^\lambda\, (1+Sy)^\mu$$

mit dem so eben dargestellten Multiplicator des anderen Theils in Übereinstimmung gebracht, wenn $\lambda = m$ und $\mu = -n$ gesetzt wird, woraus sich der gemeinschaftliche Multiplicator $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$ ergibt, und demnach erhalten wir für $Sy = v$ und $\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}\, S} = z$, als das Integrale unserer Gleichung

$$B\int \frac{v^m\, dv}{(1+v)^n} + C z^{1-n} = D, \text{ oder}$$

$$B\int \frac{v^m\, dv}{(1+v)^n} + \frac{C S^{n-1} y^{m+1}}{(1+Sy)^{n-1}} = D.$$

Anmerkung.

§. 508. Die Gleichung, welche wir in diesem Probleme integriren gelernt haben, läßt sich also nach den oben festgesetzten Principien behandeln, wenn für die beyden Theile derselben abgesondert die Multiplicatoren gesucht, und dann übereinstimmend gemacht werden; eine Methode, deren Anwendung wir hier als vorzüglich bereits erklärt haben. Wir könnten dem Multiplicator auch die Form $\frac{y^m}{(1+Sy+Ty^2)^n}$

geben, so daß die Gleichung

$$\frac{y^m[yPdx + (Qy + R)dy]}{(1 + Sy + Ty^2)^n} = 0$$

für sich integrabel werden müßte; führen wir dieselbe Rechnung durch, wie oben, so finden wir

$$\left.\begin{array}{l}(m+1)Pdx\\ -dR\end{array}\right\}y^m \left.\begin{array}{l}+(m+1-n)PSdx\\ -dQ\\ -SdR\\ +nRdS\end{array}\right\}y^{m+1} \left.\begin{array}{l}+(m+1-n)PTdx\\ -SdQ\\ -TdR\\ +nQdS\\ +nRdT\end{array}\right\}y^{m+2} \left.\begin{array}{l}+-TdQ\\ +nQdT\end{array}\right\}y^{m+3} = 0.$$

Aus dem letzten Gliede $-TdQ + nQdT = 0$ schließen wir, daß $Q = AT^n$ und aus dem ersten Gliede folgt $Pdx = \frac{dR}{m+1}$; diese Werthe, in den beyden mittlern Gliedern substituirt, geben.

$$RdS - \frac{SdR}{m+1} - AT^{n-1}dT = 0, \text{ und}$$

$$RdT - \frac{2TdR}{m+1} + AT^n dS - AST^{n-1}dT = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen wird integrabel für $m = -2$, die letztere aber für $m = 2n - 1$, denn es wird

$$RdT - \frac{TdR}{n} + AT^{n-1}(TdS - SdT) = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{nRdT - TdR}{nT^{n+1}} + \frac{A(TdS - SdT)}{T^2} = 0.$$

Das Integrale hievon ist: $-\frac{R}{nT^n} + \frac{AS}{T} = -\frac{B}{n}$, und daher $R = BT^n + nAT^{n-1}S$.

Der Fall, wo $m = -1$ ist, verdient besonders bemerkt zu werden; wir werden denselben in dem beygefügten Beyspiele behandeln.

Beyspiel 1.

§. 509. Die Gleichung

$$yPdx + (Qy + R)\,dy = 0$$

so zu bestimmen, daß sie mit $\frac{1}{y(1 + Sy + Ty^2)^n}$ multiplicirt, integrabel werde.

Weil $m = -1$ ist, so erhalten wir sogleich $dR = 0$ und daher $R = C$, dann aber ist wie vorher $Q = AT^n$ und $dQ = nAT^{n-1}dT$, woraus sich die beyden übrigen Bestimmungen ergeben, nämlich:

$$-PSdx - AT^{n-1}dT + CdS = 0,$$
$$-2PTdx - AST^{n-1}dT + AT^n dS + CdT = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Größe Pdx, so erhält man

$$AS^2T^{n-1}dT - 2AT^n dT - AT^n SdS + 2CTdS - CSdT = 0.$$

Man setze hier $S^2 = Tv$, so daß

$$2TdS - SdT = TS\left(\frac{2dS}{S} - \frac{dT}{T}\right) = \frac{TSdv}{v} = \frac{Tdv\sqrt{T}}{\sqrt{v}},$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{2}AT^n v\,dT - 2AT^n dT - \tfrac{1}{2}AT^{n+1}dv + CT\frac{dv\sqrt{T}}{\sqrt{v}} = 0,$$

oder auch

$$-\tfrac{1}{2}AT^{n+2}d\,\frac{v-4}{T} + CT\frac{dv\sqrt{T}}{\sqrt{v}} = 0.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes wird integrabel durch den Multiplicator

$$\frac{1}{T^{n+2}}\,\varphi\left(\frac{v-4}{T}\right),$$

der letztere Theil aber durch den Multiplicator

$$\frac{1}{T\sqrt{T}}\,\varphi(v);$$

daher ist der gemeinschaftliche integrirende Factor

$$\frac{1}{T(v-4)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{T}},$$

mit Hülfe dessen folgende Integralgleichung erhalten wird:

$$\frac{AT^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)(v-4)^{n-\frac{1}{2}}} + C\int\frac{dv}{(v-4)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{v}} = D.$$

Hiedurch bestimmt T durch v, dann aber $S = \sqrt{Tv}$, $R = C$, $Q = AT^n$ und $Pdx = \frac{CdS - AT^{n-1}dT}{S}$.

Zusatz 1.

§. 510. Für $n = \frac{1}{2}$ erhält man, weil $\frac{1}{0} z^0 = lz$ ist:

$$\tfrac{1}{2} A l \frac{T}{v-4} + C \int \frac{dv}{(v-4)\sqrt{v}} = \tfrac{1}{2} D, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2} A l \frac{T}{v-4} - \tfrac{1}{2} C l \frac{\sqrt{v}+2}{\sqrt{v}-2} = \tfrac{1}{2} D.$$

Setzt man demnach $v = 4u^2$ und $C = \lambda A$, so wird

$$l \frac{T}{1-u^2} - \lambda l \frac{1+u}{1-u} = \text{Const.}, \text{ oder}$$

$$T = E(1-u^2)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda}.$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$S = 2u\sqrt{T} = 2u\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{E(1-u^2)} \text{ und}$$

$R = C = \lambda A$, ferner

$$Q = A\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{E(1-u^2)} \text{ und}$$

$$Pdx = \frac{\lambda A du}{u} + \frac{\lambda A dT}{2T} - \frac{A dT}{2Tu}.$$

Es ist aber $\frac{dT}{T} = \frac{-2udu + 2\lambda du}{1-u^2}$, also

$$Pdx = \frac{Adu(1+\lambda^2 - 2\lambda u)}{1-u^2},$$

und demnach erhalten wir für die Gleichung

$$\frac{Aydu(1+\lambda^2-2\lambda u)}{1-u^2} + Ady\left[\lambda + y\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{E(1-u^2)}\right] = 0$$

folgenden integrirenden Factor:

$$\frac{1}{y\sqrt{\left[1 + 2uy\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{E(1-u^2)} + Ey^2(1-u^2)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda}\right]}}$$

Zusatz 2.

§. 511. Wenn $n = -\frac{1}{2}$ ist, erhalten wir

$$-\frac{A(v-4)}{2T} + 2C\sqrt{v} = -2D \text{ oder } T = \frac{A(v-4)}{4D+4C\sqrt{v}}.$$

Setzen wir nun $v = 4u^2$, so daß $T = \frac{A(u^2-1)}{D+2Cu}$, so erhalten wir

$$S = 2u\sqrt{T} = 2u\sqrt{\frac{A(u^2-1)}{D+2Cu}},$$

$$R = C, \quad Q = \sqrt{\frac{A(D+2Cu)}{u^2-1}} \text{ und}$$

$$Pdx = \frac{Cdu}{u} + \frac{CdT}{2T} - \frac{AdT}{2T^2u} = \frac{du(C+Du+Cu^2)(Cu^3-3Cu-D)}{u(u^2-1)^2(D+2Cu)},$$

wodurch sowohl die Gleichung als der Multiplicator bestimmt wird.

Beyspiel 2.

§. 512. Die Gleichung

$$yPdx + (Qy+R)dy = 0$$

so zu bestimmen, daß sie durch den Multiplicator $\frac{1}{y^2(1+Sy+Ty^2)^n}$ integrabel werde.

Wegen $m = -2$ finden wir nach dem Vorhergehenden

$$RS = \frac{A}{n}T^n + B \text{ oder } R = \frac{AT^n}{nS} + \frac{B}{S},$$

welcher Werth in der andern Gleichung substituirt, nachstehende Gleichung gibt:

$$\frac{(2n+1)AT^n dT}{nS} - \frac{2AT^{n+1}dS}{nS^2} + AT^n dS - AST^{n-1}dT$$
$$+ \frac{BdT}{S} - \frac{2BTdS}{S^2} = 0.$$

Diese Gleichung zerlege man in drey Theile, nämlich:

$$\frac{AS}{nT^n}\left[\frac{(2n+1)T^{2n}dT}{S^2} - \frac{2T^{2n+1}dS}{S^3}\right] + AT^{n+1}\left[\frac{dS}{T} - \frac{SdT}{T^2}\right]$$
$$+ BS\left[\frac{dT}{S^2} - \frac{2TdS}{S^3}\right] = 0,$$

oder

$$\frac{AS}{nT^n}d.\frac{T^{2n+1}}{S^2} + AT^{n+1}d.\frac{S}{T} + BSd.\frac{T}{S^2} = 0.$$

Zur Abkürzung wollen wir

$$\frac{T^{2n+1}}{S^2} = p, \quad \frac{S}{T} = q \text{ und } \frac{T}{S^2} = r$$

setzen, so wird

$$S = \frac{1}{qr},\ T = \frac{1}{q^2 r},\ \text{und daher } p = \frac{1}{q^{4n} r^{2n-1}},$$

und unsere Gleichung wird sich daher unter folgender Form darstellen:

$$\frac{A}{nq\sqrt{pr}}\, dp + \frac{A\sqrt{p}}{q^2 r\sqrt{r}}\, dq + \frac{B}{qr}\, dr = 0,$$

oder

$$\frac{A\sqrt{r}}{n\sqrt{p}}\, dp + \frac{A\sqrt{p}}{q\sqrt{r}}\, dq + B\, dr = 0.$$

Diese drey Theile wollen wir abgesondert betrachten; der erste Theil wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\varphi(p)$, der zweyte aber durch $\frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\varphi(q)$, und der dritte durch $\varphi(r)$. Um die beyden ersten in Übereinstimmung zu bringen, setze man

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\, p^{\lambda} = \frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\, q^{\mu} \text{ oder } p^{\lambda+1} = q^{\mu+1}\, r,\ \text{daher}$$

$$p = q^{\frac{\mu+1}{\lambda+1}}\, r^{\frac{1}{\lambda+1}} = q^{-4n}\, r^{-2n+1}.$$

Es wird also

$$\lambda + 1 = -\frac{1}{2n-1} \text{ und } \mu + 1 = -4n(\lambda+1) = \frac{4n}{2n-1},\ \text{also}$$

$$\mu = \frac{2n+1}{2n-1} \text{ und } \lambda = -\frac{2n}{2n+1}.$$

Man multiplicire demnach die Gleichung durch

$$\frac{q^{\frac{4n}{2n-1}}\sqrt{r}}{\sqrt{p}} = q^{2n+\frac{4n}{2n-1}}\, r^{n+1},\ \text{so wird}$$

$$\frac{A}{n}\, p^{\lambda}\, dp + A q^{\mu}\, dq + B q^{2n+\frac{4n}{2n+1}}\, r^{n+1}\, dr = 0,\ \text{oder}$$

$$A\, d\left[\frac{p^{\lambda+1}}{n(\lambda+1)} + \frac{q^{\mu+1}}{\mu+1}\right] + B q^{\frac{4n^2+6n}{2n+1}}\, r^{n+1}\, dr = 0,\ \text{oder}$$

$$-\frac{(2n+1)A}{4n}\, d\,.\, q^{\frac{4n}{2n+1}}(1-4r) + B q^{\frac{4n^2+6n}{2n+1}}\, r^{n+1}\, dr = 0.$$

Multiplicirt man durch $q^{\frac{4\nu n}{2n+1}}(1-4r)^{\nu}$, so wird

$$\frac{(2n+1)A}{4n}\, q^{\frac{4\nu n}{2n+1}}(1-4r)^{\nu}\, d\,.\, q^{\frac{4n}{2n+1}}(1-4r) +$$

$$+ B q^{\frac{4n^2+6n+4\nu n}{2n+1}}\, r^{n+1}\, dr\, (1-4r)^{\nu} = 0.$$

$$\frac{v}{(2+Au)^3} = \int \frac{u\,du}{(2+Au)^2} = \frac{C}{A^2} - \frac{1+Au}{A^2(2+Au)^2}$$ und daher

$$v = \frac{C(2+Au)^2 - 1 - Au}{A^2}.$$

Nimmt man also für u eine beliebige Function von x, so wird

$$N = \frac{A^2}{C(2+Au)^2 - 1 - Au} \text{ und } M = \frac{A^2 u}{C(2+Au)^2 - 1 - Au},$$

endlich $$Q = \frac{AC(2+Au)^2 - A}{C(2+Au)^2 - 1 - Au}.$$

Nun erhalten wir aus der dritten Gleichung

$$2NPdx = NdQ - QdN \text{ oder } 2Pdx = Nd\frac{Q}{N},$$

und $\frac{Q}{N} = \frac{C(2+Au)^2 - 1}{A}$ daher $d\frac{Q}{N} = 2Cdu(2+Au)$, und

demnach $$Pdx = \frac{A^2 Cdu(2+Au)}{C(2+Au)^2 - 1 - Au}.$$

Die für sich integrable Gleichung ist also

$$\frac{A^2Cy^2du(2+Au) + ydy\,[C(2+Au)^2y - (1+Au)y + AC(2+Au)^2 - A]}{C(2+Au)^2y^2 - (1+Au)y^2 + A^2uy + A^2} = 0,$$

welche für $Au + 2 = t$ folgende Form annimmt:

$$y.\frac{ACytdt + ydy(Ct^2 - t + 1) + Ady(Ct^2 - 1)}{Ct^2y^2 - (t-1)y^2 + A(t-2)y + A^2} = 0.$$

Setzen wir aber $A = \alpha$, $C = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$ und $t = -\frac{\beta x}{\alpha}$, so finden wir

$$y.\frac{\alpha\gamma xydx + ydy(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \alpha dy(\alpha - \gamma x^2)}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)y^2 - \alpha(2\alpha + \beta x)y + \alpha^3} = 0.$$

Zusatz 1.

§. 499. Die Gleichung

$$\alpha\gamma xydx + ydy(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - \alpha dy(\alpha - \gamma x^2) = 0$$

läßt sich demnach auf dem vorgezeichneten Wege integriren. Wie man aber in dieser Gleichung die Veränderlichen absondern könne, fällt nicht sogleich in die Augen. Der integrirende Multiplicator aber ist

$$\frac{y}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)y^2 - \alpha(2\alpha + \beta x)y + \alpha^3}.$$

Zusatz 2.

§. 500. Dieser Multiplicator läßt sich aber auch so darstellen, daß sein Nenner in Factoren aufgelößt erscheint, nämlich:

so zu bestimmen, daß sie durch $\frac{y^{2n-1}}{(1+Sy+Ty^2)^n}$ multiplicirt, integrabel werde.

Hier ist $m = 2n - 1$, $Q = AT^n$ und $Pdx = \frac{dR}{2n}$, ferner folgt aus dem Vorhergehenden $R = nAT^{n-1}S + BT^n$, und es bleibt uns noch die Gleichung

$$RdS - \frac{SdR}{2n} - AT^{n-1}dT = 0.$$

Setzt man in dieser für R den gefundenen Werth, so erhält man

$$(2n-1)AT^{n-1}SdS - (n-1)AT^{n-2}S^2dT - 2AT^{n-1}dT + 2BT^ndS - BT^{n-1}SdT = 0, \text{ oder}$$

$$(2n-1)ATSdS - (n-1)AS^2dT - 2ATdT + 2BT^2dS - BTSdT = 0.$$

Für $S^2 = u$ verwandelt sich das erste Glied in

$$(n-\tfrac{1}{2})ATdu - (n-1)AudT - 2ATdT, \text{ oder}$$

$$(n-\tfrac{1}{2})AT\left(du - \frac{(n-1)udT}{(n-\frac{1}{2})T} - \frac{2dT}{n-\frac{1}{2}}\right), \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}\left(\frac{du}{T^{\frac{2n-2}{2n-1}}} - \frac{2(n-1)udT}{(2n-1)T^{\frac{4n-3}{2n-1}}} - \frac{4dT}{(2n-1)T^{\frac{2n-2}{2n-1}}}\right) =$$

$$= (2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}d.\left(\frac{u}{T^{\frac{2n-2}{2n-1}}} - 4T^{\frac{1}{2n-1}}\right), \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}d.T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T} - 4\right) + \frac{BT^3}{S}d.\frac{S^2}{T} = 0, \text{ oder}$$

$$(2n-1)AT^{\frac{-1}{2n-1}}d.T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T} - 4\right) + \frac{2BT}{S}d.\frac{S^2}{T} = 0.$$

Setzt man $\frac{S^2}{T} = p$ und

$$T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T} - 4\right) = q = T^{\frac{1}{2n-1}}(p-4), \text{ so daß}$$

$$T^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{q}{p-4}; \text{ also}$$

$$T = \frac{q^{2n-1}}{(p-4)^{2n-1}} \text{ und } S = \sqrt{\frac{pq^{2n-1}}{(p-4)^{2n-1}}}, \text{ und daher}$$

$$\frac{(2n-1)A(p-4)dq}{q} + \frac{2B\sqrt{q^{2n-1}}}{\sqrt{p(p-4)^{2n-1}}}dp = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{(m-1)\,A\,dq}{q^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{2\,B\,dp : \sqrt{p}}{(p-4)^{n+\frac{1}{2}}} = 0,$$

welche integrirt gibt

$$\frac{-2\,A}{q^{n-\frac{1}{2}}} + 2B\int\frac{dp : \sqrt{p}}{(p-4)^{n+\frac{1}{2}}} = 2C,$$

und setzt man $\frac{p}{p-4} = v^2$ oder $p = \frac{4v^2}{v^2-1}$, so wird

$$\frac{+A}{q^{n-\frac{1}{2}}} - \frac{B}{4^{n-1}}\int dv\,(v^2-1)^{n-1} = C.$$

Anmerkung.

§. 516. Weiter wollen wir uns in diese Materie nicht einlassen, denn ich habe die vorigen Beyspiele nur deßhalb vorzüglich angeführt, um die oben gelehrte Methode, Differenzialgleichungen zu behandeln, einzuüben. Denn bey diesen Beyspielen bothen sich ziemlich schwierige Fälle dar, welche man theilweise so behandeln konnte, daß man für die einzelnen Theile die zu integrirenden Factoren suchte, und aus diesen dann den gemeinschaftlichen Multiplicator bestimmte. Nun wollen wir uns mit anderen Gattungen von Gleichungen befassen, welche durch Multiplicatoren integrabel gemacht werden können.

Aufgabe 68.

§. 517. Die Functionen P, Q, R, S, von x so zu bestimmen, daß die Gleichung $(Py+Q)\,dx + y\,dy = 0$ durch den Multiplicator $(y^2+Ry+S)^n$ integrabel werde.

Auflösung.

Es muß also nothwendig

$$\left(\frac{d.(Py+Q)\,(y^2+Ry+S)^n}{dy}\right) = \left(\frac{d.y\,(y^2+Ry+S)^n}{dx}\right)$$

seyn, und hieraus erhält man, wenn durch $(y^2+Ry+S)^{n-1}$ dividirt wird:

$$P\,(y^2+Ry+S) + n\,(Py+Q)\,(2y+R) = \frac{ny\,(y\,dR+dS)}{dx},\ \text{oder}$$

$$\left.\begin{matrix}(2n+1)\,Py^2\,dx + (n+1)\,PRy\,dx + PS\,dx \\ -\,ny^2\,dR + \quad 2nQy\,dx + nQR\,dx \\ - \quad ny\,dS\end{matrix}\right\} = 0.$$

Hieraus folgern wir $Pdx = \frac{ndR}{2n+1}$ und

$$\frac{(n+1)RdR}{2n+1} + 2Qdx - dS = 0,$$

$$\frac{SdR}{2n+1} + QRdx = 0, \text{ und ferner}$$

$$Qdx = -\frac{SdR}{(2n+1)R} = -\frac{(n+1)RdR}{2(2n+1)} + \frac{dS}{2}, \text{ daher}$$

$$dS + \frac{2SdR}{(2n+1)R} = \frac{(n+1)RdR}{2n+1};$$

welche Gleichung wir durch $R^{\frac{2}{2n+1}}$ multiplicirt und integrirt erhalten:

$$R^{\frac{2}{2n+1}} S = C + \tfrac{1}{4} R^{\frac{4n+4}{2n+1}}, \text{ und hieraus}$$

$$S = \tfrac{1}{4}R^2 + CR^{\frac{-2}{2n+1}}, \text{ und auch}$$

$$Qdx = \frac{-RdR}{4(2n+1)} - \frac{C}{2n+1} R^{\frac{-2n-3}{2n+1}} dR \text{ und } Pdx = \frac{ndR}{2n+1},$$

woher wir die Gleichung

$$\left(ny - \tfrac{1}{4}R - CR^{\frac{-2n-3}{2n+1}}\right) dR + (2n+1) y dy = 0$$

erhalten, welche durch den Multiplicator

$$\left(y^2 + Ry + \tfrac{1}{4}R^2 + CR^{\frac{-2}{2n+1}}\right)^n$$

integrabel gemacht wird.

Zusatz 1.

§. 518. Für den Fall, wo $n = -\frac{1}{2}$ ist, wird $dR = 0$ und $R = A$, und die übrigen Gleichungen sind:

$$(n+1)APdx + 2nQdx - ndS = 0 \text{ und}$$

$$PSdx + nAQdx = 0; \text{ also}$$

$$Pdx = \frac{AQdx}{2S} = \frac{2Qdx - dS}{A}, \text{ und daher}$$

$$(A^2 - 4S)Qdx = -2SdS \text{ oder}$$

$$Qdx = -\frac{2SdS}{A^2 - 4S} \text{ und } Pdx = -\frac{AdS}{A^2 - 4S};$$

so wird auch die Gleichung

Zusatz 4.

§. 506. Für den zweyten Theil erhalten wir also den Multiplicator $\frac{(1+Sy)^{\mu}}{S^{n+\mu}\,y^{\frac{m+n+\mu(m+1)}{n-1}}}$, durch welchen dieser Theil sich verwandelt in

$$-(n-1)\,C\,.\,\frac{(1+Sy)^{\mu}}{S^{\mu}\,y^{\frac{\mu(m+1)}{n-1}}}\,d\,.\,\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}\,S}.$$

Das Integrale hievon ist

$$-\frac{(n-1)\,C\,z^{\mu+1}}{\mu+1},\ \text{wenn wir}\ z=\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}\,S}\ \text{setzen.}$$

Zusatz 5.

§. 507. Nun wird der Multiplicator für den ersten Theil

$$S^{\lambda-m}\,y^{\lambda}\,(1+Sy)^{\mu}$$

mit dem so eben dargestellten Multiplicator des anderen Theils in Übereinstimmung gebracht, wenn $\lambda=m$ und $\mu=-n$ gesetzt wird, woraus sich der gemeinschaftliche Multiplicator $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$ ergibt, und demnach erhalten wir für $Sy=v$ und $\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}\,S}=z$, als das Integrale unserer Gleichung

$$B\int\frac{v^m\,dv}{(1+v)^n}+Cz^{1-n}=D,\ \text{oder}$$

$$B\int\frac{v^m\,dv}{(1+v)^n}+\frac{C\,S^{n-1}\,y^{m+1}}{(1+Sy)^{n-1}}=D.$$

Anmerkung.

§. 508. Die Gleichung, welche wir in diesem Probleme integriren gelernt haben, läßt sich also nach den oben festgesetzten Principien behandeln, wenn für die beyden Theile derselben abgesondert die Multiplicatoren gesucht, und dann übereinstimmend gemacht werden; eine Methode, deren Anwendung wir hier als vorzüglich bereits erklärt haben. Wir könnten dem Multiplicator auch die Form $\frac{y^m}{(1+Sy+Ty^2)^n}$

geben, so daß die Gleichung

$$\frac{y^m\,[y P dx + (Q y + R)\, dy]}{(1 + S y + T y^2)^n} = 0$$

für sich integrabel werden müßte; führen wir dieselbe Rechnung durch, wie oben, so finden wir

$$\left.\begin{matrix}(m+1) P dx \\ - dR\end{matrix}\right\} y^m \left.\begin{matrix} + (m+1-n) P S dx \\ - dQ \\ + S dR \\ + n R dS\end{matrix}\right\} y^{m+1} \left.\begin{matrix} + (m+1-n) P T dx \\ - S dQ \\ - T dR \\ + n Q dS \\ + n R dT\end{matrix}\right\} y^{m+2} \left.\begin{matrix} - T dQ \\ + n Q dT\end{matrix}\right\} y^{m+3} = 0.$$

Aus dem letzten Gliede $- T dQ + n Q dT = 0$ schließen wir, daß $Q = A T^n$ und aus dem ersten Gliede folgt $P dx = \frac{dR}{m+1}$; diese Werthe, in den beyden mittlern Gliedern substituirt, geben.

$$R dS - \frac{S dR}{m+1} - A T^{n-1} dT = 0, \text{ und}$$

$$R dT - \frac{2 T dR}{m+1} + A T^n dS - A S T^{n-1} dT = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen wird integrabel für $m = -2$, die letztere aber für $m = 2n - 1$, denn es wird

$$R dT - \frac{T dR}{n} + A T^{n-1} (T dS - S dT) = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{n R dT - T dR}{n T^{n+1}} + \frac{A (T dS - S dT)}{T^2} = 0.$$

Das Integrale hievon ist: $- \frac{R}{n T^n} + \frac{A S}{T} = - \frac{B}{n}$, und daher $R = B T^n + n A T^{n-1} S$.

Der Fall, wo $m = -1$ ist, verdient besonders bemerkt zu werden; wir werden denselben in dem beygefügten Beyspiele behandeln.

Beyspiel 1.

§. 509. Die Gleichung

$$yPdx + (Qy + R)\,dy = 0$$

so zu bestimmen, daß sie mit $\frac{1}{y(1 + Sy + Ty^2)^n}$ multiplicirt, integrabel werde.

Weil $m = -1$ ist, so erhalten wir sogleich $dR = 0$ und daher $R = C$, dann aber ist wie vorher $Q = AT^n$ und $dQ = nAT^{n-1}dT$, woraus sich die beyden übrigen Bestimmungen ergeben, nämlich:

$$-PSdx - AT^{n-1}dT + CdS = 0,$$
$$-2PTdx - AST^{n-1}dT + AT^n dS + CdT = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Größe Pdx, so erhält man

$$AS^2T^{n-1}dT - 2AT^n dT - AT^n SdS + 2CTdS - CSdT = 0.$$

Man setze hier $S^2 = Tv$, so daß

$$2TdS - SdT = TS\left(\frac{2dS}{S} - \frac{dT}{T}\right) = \frac{TSdv}{v} = \frac{Tdv\sqrt{T}}{\sqrt{v}},$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{2}AT^n v dT - 2AT^n dT - \tfrac{1}{2}AT^{n+1}dv + CT\frac{dv\sqrt{T}}{\sqrt{v}} = 0,$$

oder auch

$$-\tfrac{1}{2}AT^{n+2}d\frac{v-4}{T} + CT\frac{dv\sqrt{T}}{\sqrt{v}} = 0.$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes wird integrabel durch den Multiplicator

$$\frac{1}{T^{n+2}}\varphi\left(\frac{v-4}{T}\right),$$

der letztere Theil aber durch den Multiplicator

$$\frac{1}{T\sqrt{T}}\varphi(v);$$

daher ist der gemeinschaftliche integrirende Factor

$$\frac{1}{T(v-4)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{T}},$$

mit Hülfe dessen folgende Integralgleichung erhalten wird:

$$\frac{AT^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)(v-4)^{n-\frac{1}{2}}} + C\int\frac{dv}{(v-4)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{v}} = D.$$

Hiedurch bestimmt T durch v, dann aber $S = \sqrt{Tv}$, $R = C$, AT^n und $Pdx = \frac{CdS - AT^{n-1}dT}{S}$.

Zusatz 1.

§. 510. Für $n = \frac{1}{2}$ erhält man, weil $\frac{1}{0}z^0 = lz$ ist:

$$\frac{1}{2}Al\frac{T}{v-4} + C\int\frac{dv}{(v-4)\sqrt{v}} = \frac{1}{2}D, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2}Al\frac{T}{v-4} - \frac{1}{2}Cl\frac{\sqrt{v}+2}{\sqrt{v}-2} = \frac{1}{2}D.$$

Setzt man demnach $v = 4u^2$ und $C = \lambda A$, so wird

$$l\frac{T}{1-u^2} - \lambda l\frac{1+u}{1-u} = \text{Const.}, \text{ oder}$$

$$T = E(1-u^2)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda}.$$

Hieraus ergibt sich ferner

$$S = 2u\sqrt{T} = 2u\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)} \text{ und}$$

$R = C = \lambda A$, ferner

$$Q = A\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)} \text{ und}$$

$$Pdx = \frac{\lambda A du}{u} + \frac{\lambda A dT}{2T} - \frac{A dT}{2Tu}.$$

Es ist aber $\frac{dT}{T} = \frac{-2udu + 2\lambda du}{1-u^2}$, also

$$Pdx = \frac{Adu(1+\lambda^2-2\lambda u)}{1-u^2},$$

d demnach erhalten wir für die Gleichung

$$\frac{Adu(1+\lambda^2-2\lambda u)}{1-u^2} + Ady\left[\lambda + y\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)}\right] = 0$$

genden integrirenden Factor:

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1+2uy\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)} + Ey^2(1-u^2)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda}\right]}}.$$

Zusatz 2.

§. 511. Wenn $n = -\frac{1}{2}$ ist, erhalten wir

$$-\frac{A(v-4)}{2T} + 2C\sqrt{v} = -2D \text{ oder } T = \frac{A(v-4)}{4D+4C\sqrt{v}}.$$

Setzen wir nun $v = 4u^2$, so daß $T = \frac{A(u^2-1)}{D+2Cu}$, so erhalten wir

$$S = 2u\sqrt{T} = 2u\sqrt{\frac{A(u^2-1)}{D+2Cu}},$$

$$R = C, \quad Q = \sqrt{\frac{A(D+2Cu)}{u^2-1}} \text{ und}$$

$$Pdx = \frac{Cdu}{u} + \frac{CdT}{2T} - \frac{AdT}{2T^2u} = \frac{du(C+Du+Cu^2)(Cu^3-3Cu-D)}{u(u^2-1)^2(D+2Cu)},$$

wodurch sowohl die Gleichung als der Multiplicator bestimmt wird.

Beyspiel 2.

§. 512. Die Gleichung

$$yPdx + (Qy+R)dy = 0$$

so zu bestimmen, daß sie durch den Multiplicator

$\frac{1}{y^2(1+Sy+Ty^2)^n}$ integrabel werde.

Wegen $m = -2$ finden wir nach dem Vorhergehenden

$$RS = \frac{A}{n}T^n + B \text{ oder } R = \frac{AT^n}{nS} + \frac{B}{S},$$

welcher Werth in der andern Gleichung substituirt, nachstehende Gleichung gibt:

$$\frac{(2n+1)AT^n dT}{nS} - \frac{2AT^{n+1}dS}{nS^2} + AT^n dS - AST^{n-1}dT$$
$$+ \frac{BdT}{S} - \frac{2BTdS}{S^2} = 0.$$

Diese Gleichung zerlege man in drey Theile, nämlich:

$$\frac{AS}{nT^n}\left[\frac{(2n+1)T^{2n}dT}{S^2} - \frac{2T^{2n+1}dS}{S^3}\right] + AT^{n+1}\left[\frac{dS}{T} - \frac{SdT}{T^2}\right]$$
$$+ BS\left[\frac{dT}{S^2} - \frac{2TdS}{S^3}\right] = 0,$$

oder

$$\frac{AS}{nT^n}d.\frac{T^{2n+1}}{S^2} + AT^{n+1}d.\frac{S}{T} + BSd.\frac{T}{S^2} = 0.$$

Zur Abkürzung wollen wir

$$\frac{T^{2n+1}}{S^2} = p, \quad \frac{S}{T} = q \text{ und } \frac{T}{S^2} = r$$

setzen, so wird

$$S = \frac{1}{qr},\quad T = \frac{1}{q^2 r},\ \text{und daher}\ p = \frac{1}{q^{4n} r^{2n-1}},$$

und unsere Gleichung wird sich daher unter folgender Form darstellen:

$$\frac{A}{nq\sqrt{pr}}\,dp + \frac{A\sqrt{p}}{q^2 r\sqrt{r}}\,dq + \frac{B}{qr}\,dr = 0,$$

oder

$$\frac{A\sqrt{r}}{n\sqrt{p}}\,dp + \frac{A\sqrt{p}}{q\sqrt{r}}\,dq + B\,dr = 0.$$

Diese drey Theile wollen wir abgesondert betrachten; der erste Theil wird integrabel durch den Multiplicator $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\varphi(p)$, der zweyte aber durch $\frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\varphi(q)$, und der dritte durch $\varphi(r)$. Um die beyden ersten in Übereinstimmung zu bringen, setze man

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\,p^{\lambda} = \frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\,q^{\mu}\ \text{oder}\ p^{\lambda+1} = q^{\mu+1}\,r,\ \text{daher}$$

$$p = q^{\frac{\mu+1}{\lambda+1}}\,r^{\frac{1}{\lambda+1}} = q^{-4n}\,r^{-2n+1}.$$

Es wird also

$$\lambda + 1 = -\frac{1}{2n-1}\ \text{und}\ \mu + 1 = -4n(\lambda+1) = \frac{4n}{2n-1},\ \text{also}$$

$$\mu = \frac{2n+1}{2n-1}\ \text{und}\ \lambda = -\frac{2n}{2n+1}.$$

Man multiplicire demnach die Gleichung durch

$$\frac{q^{\frac{4n}{2n-1}}\sqrt{r}}{\sqrt{p}} = q^{2n+\frac{4n}{2n-1}}\,r^{n+1},\ \text{so wird}$$

$$\frac{A}{n}\,p^{\lambda}\,dp + Aq^{\mu}\,dq + Bq^{2n+\frac{4n}{2n+1}}\,r^{n+1}\,dr = 0,\ \text{oder}$$

$$A\,d\left[\frac{p^{\lambda+1}}{n(\lambda+1)} + \frac{q^{\mu+1}}{\mu+1}\right] + Bq^{\frac{4n^2+6n}{2n+1}}\,r^{n+1}\,dr = 0,\ \text{oder}$$

$$\frac{(2n+1)A}{4n}\,d\,.\,q^{\frac{4n}{2n+1}}(1-4r) + Bq^{\frac{4n^2+6n}{2n+1}}\,r^{n+1}\,dr = 0.$$

Multiplicirt man durch $q^{\frac{4\nu n}{2n+1}}(1-4r)^{\nu}$, so wird

$$\frac{(2n+1)A}{4n}\,q^{\frac{4\nu n}{2n+1}}(1-4r)^{\nu}\,d\,.\,q^{\frac{4n}{2n+1}}(1-4r) +$$

$$+ Bq^{\frac{4n^2+6n+4\nu n}{2n+1}}\,r^{n+1}\,dr\,(1-4r)^{\nu} = 0.$$

Es wird demnach $4\nu + 4n + 6 = 0$, oder $\nu = -n - \frac{3}{2}$; und es lassen sich beyde Glieder integriren, denn man findet

$$\frac{(2n+1)A}{4n(\nu+1)} q^{\frac{4n(\nu+1)}{2n+1}} (1-4r)^{\nu+1} + B\int r^{n+1} dr (1-4r)^{\nu} = \text{Const.}$$

Es ist aber $\nu + 1 = -n - \frac{1}{2} = -\frac{2n+1}{2}$, und so erhält man

$$-\frac{A}{2n} q^{-2n} (1-4r)^{\frac{-2n-1}{2}} + B\int \frac{r^{n+1} dr}{(1-4r)^{\frac{2n+3}{2}}} = \text{Const.}$$

Es ist demnach q durch r gegeben, und dann ist $S = \frac{1}{qr}$, $T = \frac{S}{q}$, ferner $R = \frac{AT^n}{nS} + \frac{B}{S}$; $Q = AT^n$ und $Pdx = -dR$.

Zusatz 1.

§. 513. Wenn $n = -\frac{1}{2}$ ist, so wird $Aq + \frac{2Br\sqrt{r}}{3} = \frac{C}{3}$ oder $q = \frac{C - 2Br\sqrt{r}}{3A}$, und daher

$$S = \frac{3A}{Cr - 2Br^2\sqrt{r}}; \quad T = \frac{9A^2}{r(C - 2Br\sqrt{r})^2}, \quad Q = \frac{C\sqrt{r} - 2Br^2}{3} \text{ und}$$

$$R = \frac{Q + nB}{rS} = \frac{B - 2Q}{S} = \frac{r(C - 2Br\sqrt{r})(3B - 2C\sqrt{r} + 4Br^2)}{9A}, \text{ oder}$$

$$R = \frac{3BCr - 2C^2r\sqrt{r} - 6B^2r^2\sqrt{r} + 8BCr^3 - 8B^2r^4\sqrt{r}}{9A}.$$

Zusatz 2.

§. 514. Setzen wir nun für diesen Fall $r = u^2$, so wird

$$S = \frac{3A}{Cu^2 - 2Bu^5}, \quad T = \frac{9A^2}{u^2(C - 2Bu^3)^2}, \quad Q = \frac{u(C - 2Bu^3)}{3} \text{ und}$$

$$R = \frac{3BCu^2 - 2C^2u^3 - 6B^2u^5 + 8BCu^6 - 8B^2u^9}{9A}, \text{ und daher}$$

$$Pdx = \frac{-6BCu + 6C^2u^2 + 30B^2u^4 - 48BCu^5 + 72B^2u^8}{9A} du.$$

Es wird demnach die Gleichung $yPdx + (Qy + R)dy = 0$ integrabel, wenn man sie mit dem Multiplicator

$$\frac{\sqrt{(1 + Sy + Ty^2)}}{y^2} = \frac{1}{y^2}\sqrt{\left(1 + \frac{3Ay}{u^2(C - 2Bu^3)} + \frac{9A^2y^2}{u^2(C - 2Bu^3)^2}\right)}$$

multiplicirt.

Beyspiel 3.

§. 515. Die Gleichung

$$yPdx + (Qy + R)dy = 0$$

so zu bestimmen, daß sie durch $\frac{y^{2n-1}}{(1+Sy+Ty^2)^n}$ multiplicirt, integrabel werde.

Hier ist $m = 2n - 1$, $Q = AT^n$ und $Pdx = \frac{dR}{2n}$, ferner folgt aus dem Vorhergehenden $R = nAT^{n-1}S + BT^n$, und es bleibt uns noch die Gleichung

$$RdS - \frac{SdR}{2n} - AT^{n-1}dT = 0.$$

Setzt man in dieser für R den gefundenen Werth, so erhält man

$$(2n-1)AT^{n-1}SdS - (n-1)AT^{n-2}S^2dT - 2AT^{n-1}dT +$$
$$+ 2BT^n dS - BT^{n-1}SdT = 0, \text{ oder}$$
$$(2n-1)ATSdS - (n-1)AS^2dT - 2ATdT$$
$$+ 2BT^2dS - BTSdT = 0.$$

Für $S^2 = u$ verwandelt sich das erste Glied in

$$(n-\tfrac{1}{2})ATdu - (n-1)AudT - 2ATdT, \text{ oder}$$
$$(n-\tfrac{1}{2})AT\left(du - \frac{(n-1)udT}{(n-\frac{1}{2})T} - \frac{2dT}{n-\frac{1}{2}}\right), \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}\left(\frac{du}{T^{\frac{2n-2}{2n-1}}} - \frac{2(n-1)udT}{(2n-1)T^{\frac{4n-3}{2n-1}}} - \frac{4dT}{(2n-1)T^{\frac{2n-2}{2n-1}}}\right) =$$
$$= (2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}d.\left(\frac{u}{T^{\frac{2n-2}{2n-1}}} - 4T^{\frac{1}{2n-1}}\right), \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}d.T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T} - 4\right) + \frac{BT^3}{S}d.\frac{S^2}{T} = 0, \text{ oder}$$
$$(2n-1)AT^{\frac{-1}{2n-1}}d.T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T} - 4\right) + \frac{2BT}{S}d.\frac{S^2}{T} = 0.$$

Setzt man $\frac{S^2}{T} = p$ und

$$T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T} - 4\right) = q = T^{\frac{1}{2n-1}}(p-4), \text{ so daß}$$
$$T^{\frac{1}{2n-1}} = \frac{q}{p-4}; \text{ also}$$
$$T = \frac{q^{2n-1}}{(p-4)^{2n-1}} \text{ und } S = \sqrt{\frac{pq^{2n-1}}{(p-4)^{2n-1}}}, \text{ und daher}$$
$$\frac{(2n-1)A(p-4)dq}{q} + \frac{2B\sqrt{q^{2n-1}}}{\sqrt{p(p-4)^{2n-1}}}dp = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{(2n-1)\,A\,dq}{q^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{2B\,dp : \sqrt{p}}{(p-4)^{n+\frac{1}{2}}} = 0,$$

welche integrirt gibt

$$\frac{-2A}{q^{n-\frac{1}{2}}} + 2B\int\frac{dp : \sqrt{p}}{(p-4)^{n+\frac{1}{2}}} = 2C,$$

und setzt man $\frac{p}{p-4} = v^2$ oder $p = \frac{4v^2}{v^2-1}$, so wird

$$\frac{+A}{q^{n-\frac{1}{2}}} - \frac{B}{4^{n-1}}\int dv\,(v^2-1)^{n-1} = C.$$

Anmerkung.

§. 516. Weiter wollen wir uns in diese Materie nicht einlassen, denn ich habe die vorigen Beyspiele nur deßhalb vorzüglich angeführt, um die oben gelehrte Methode, Differenzialgleichungen zu behandeln, einzuüben. Denn bey diesen Beyspielen bothen sich ziemlich schwierige Fälle dar, welche man theilweise so behandeln konnte, daß man für die einzelnen Theile die zu integrirenden Factoren suchte, und aus diesen dann den gemeinschaftlichen Multiplicator bestimmte. Nun wollen wir uns mit anderen Gattungen von Gleichungen befassen, welche durch Multiplicatoren integrabel gemacht werden können.

Aufgabe 68.

§. 517. Die Functionen P, Q, R, S, von x so zu bestimmen, daß die Gleichung $(Py+Q)\,dx + y\,dy = 0$ durch den Multiplicator $(y^2+Ry+S)^n$ integrabel werde.

Auflösung.

Es muß also nothwendig

$$\left(\frac{d.(Py+Q)(y^2+Ry+S)^n}{dy}\right) = \left(\frac{d.y(y^2+Ry+S)^n}{dx}\right)$$

seyn, und hieraus erhält man, wenn durch $(y^2+Ry+S)^{n-1}$ dividirt wird:

$$P(y^2+Ry+S) + n(Py+Q)(2y+R) = \frac{ny(y\,dR+dS)}{dx}, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2n+1)\,Py^2dx + (n+1)\,PRy\,dx + PS\,dx \\ \quad - ny^2dR + \quad 2nQy\,dx + nQR\,dx \\ \quad - \quad\quad\quad ny\,dS \end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus folgern wir $Pdx = \frac{ndR}{2n+1}$ und

$$\frac{(n+1)RdR}{2n+1} + 2Qdx - dS = 0,$$

$$\frac{SdR}{2n+1} + QRdx = 0, \text{ und ferner}$$

$$Qdx = -\frac{SdR}{(2n+1)R} = -\frac{(n+1)RdR}{2(2n+1)} + \frac{dS}{2}, \text{ daher}$$

$$dS + \frac{2SdR}{(2n+1)R} = \frac{(n+1)RdR}{2n+1};$$

welche Gleichung wir durch $R^{\frac{2}{2n+1}}$ multiplicirt und integrirt erhalten:

$$R^{\frac{2}{2n+1}} S = C + \tfrac{1}{4} R^{\frac{4n+4}{2n+1}}, \text{ und hieraus}$$

$$S = \tfrac{1}{4}R^2 + CR^{\frac{-2}{2n+1}}, \text{ und auch}$$

$$Qdx = \frac{-RdR}{4(2n+1)} - \frac{C}{2n+1} R^{\frac{-2n-3}{2n+1}} dR \text{ und } Pdx = \frac{ndR}{2n+1},$$

woher wir die Gleichung

$$\left(ny - \tfrac{1}{4}R - CR^{\frac{-2n-3}{2n+1}}\right) dR + (2n+1)ydy = 0$$

erhalten, welche durch den Multiplicator

$$\left(y^2 + Ry + \tfrac{1}{4}R^2 + CR^{\frac{-2}{2n+1}}\right)^n$$

integrabel gemacht wird.

Zusatz 1.

§. 518. Für den Fall, wo $n = -\frac{1}{2}$ ist, wird $dR = 0$ und $R = A$, und die übrigen Gleichungen sind:

$$(n+1)APdx + 2nQdx - ndS = 0 \text{ und}$$

$$PSdx + nAQdx = 0; \text{ also}$$

$$Pdx = \frac{AQdx}{2S} = \frac{2Qdx - dS}{A}, \text{ und daher}$$

$$(A^2 - 4S)Qdx = -2SdS \text{ oder}$$

$$Qdx = -\frac{2SdS}{A^2-4S} \text{ und } Pdx = -\frac{AdS}{A^2-4S};$$

so wird auch die Gleichung

$$\frac{(Ay + 2S)\,dS}{4S - A^2} + y\,dy = 0$$

durch den Multiplicator $\frac{1}{\sqrt{(y^2 + Ay + S)}}$ integrabel.

Zusatz 2.

§. 519. Setzt man $A = 2a$ und $S = x$, so läßt sich folgende Gleichung

$$\frac{(ay + x)\,dx + 2y\,dy\,(x - a^2)}{(x - a^2)\sqrt{(y^2 + 2ay + x)}} = 0$$

integriren, und daher läßt sich auch das Integrale von der Gleichung

$$x\,dx + ay\,dx + 2xy\,dy - 2a^2y\,dy = 0,$$

wenn man sie durch $(x - a^2)\sqrt{(y^2 + 2ay + x)}$ dividirt, auffinden.

Zusatz 3.

§. 520. Um das Integrale zu finden, nehme man zuerst x als constant, so hat der Theil $\frac{2y\,dy}{\sqrt{(y^2 + 2ay + x)}}$ zum Integrale den Ausdruck

$$2\sqrt{(y^2 + 2ay + x)} + 2a\,l\left[a + y - \sqrt{(y^2 + 2ay + x)}\right] + X.$$

Differenzirt man diesen Ausdruck und betrachtet y als constant, so findet man

$$\frac{dx}{\sqrt{(y^2 + 2ay + x)}} - \frac{a\,dx : \sqrt{(y^2 + 2ay + x)}}{a + y - \sqrt{(y^2 + 2ay + x)}} + dX,$$

und wird dieser Ausdruck dem zweyten Theile der Gleichung

$$\frac{(ay + x)\,dx}{(x - a^2)\sqrt{(y^2 + 2ay + x)}}$$

gleich gesetzt, so erhält man $dX = \frac{a\,dx}{a^2 - x}$ und $X = -a\,l(a^2 - x)$.

Hieraus folgt das vollständige Integrale

$$\sqrt{(y^2 + 2ay + x)} + a\,l.\frac{a + y - \sqrt{(y^2 + 2ay + x)}}{\sqrt{(a^2 - x)}} = C.$$

Zusatz 4.

§. 521. Der Fall, wo $n = -1$ ist, ist allerdings bemerkenswerth; er gibt, wenn a statt $C + \frac{1}{4}$ gesetzt wird, die Gleichung

$$(y + aR)\,dR + y\,dy = 0,$$

welche durch $y^2 + Ry + aR^2$ dividirt, integrabel wird; diese Gleichung ist homogen.

Anmerkung.

§. 522. Man kann für die Differenzialgleichung

$$(Py + Q)\,dx + y\,dy = 0$$

auch $(y+R)^m\,(y+S)^n$ als Multiplicator annehmen, und dann muß

$$\left(\frac{d\,.\,(Py+Q)\,(y+R)^m\,(y+S)^n}{dy}\right) = \left(\frac{d\,.\,y\,(y+R)^m\,(y+S)^n}{dx}\right)$$

werden; hieraus folgt:

$$Pdx\,(y+R)\,(y+S) + mdx\,(Py+Q)\,(y+S)$$
$$+ ndx\,(Py+Q)\,(y+R) = my\,(y+S)\,dR + ny\,(y+R)\,dS,$$

oder

$$\left.\begin{array}{lll} (m+n+1)\,Py^2dx & + (n+1)\,PRydx & + PRSdx \\ \quad - my^2dR & + (m+1)\,PSydx & + mQSdx \\ \quad - ny^2dS & + (m+n)\,Qydx & + nQRdx \\ & - mSydR & \\ & - nRydS & \end{array}\right\} = 0;$$

hieraus ergibt sich

$$Pdx = \frac{mdR + ndS}{m+n+1} \text{ und } Qdx = \frac{-PRSdx}{mS+nR} = \frac{-RS\,(mdR+ndS)}{(m+n+1)\,(mS+nR)},$$

also

$$\frac{(mdR + ndS)\,[(n+1)\,R + (m+1)\,S]}{m+n+1} - \frac{(m+n)\,RS\,(mdR+ndS)}{(m+n+1)\,(mS+nR)}$$
$$- mSdR - nRdS = 0, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} +m\,(n+1)\,RdR - mnRdS - \dfrac{m(m+n)RSdR + n(m+n)RSdS}{mS+nR} \\ +n\,(m+1)\,SdS - mnSdR \end{array}\right\} = 0,$$

welche Gleichung auf die Form gebracht werden kann:

$$\left.\begin{array}{l} +(n+1)\,R^2dR + (m-n-1)\,RSdR - mS^2dR \\ +(m+1)\,S^2dS + (n-m-1)\,RSdS - nR^2dS \end{array}\right\} = 0.$$

Weil nun diese Gleichung homogen ist, so dividire man sie durch

$$(n+1)\,R^3 + (m-2n-1)\,R^2S + (n-2m-1)\,RS^2 + (m+1)\,S^3,$$

oder durch

$$(R-S)^2\,[(n+1)\,R + (m+1)\,S],$$

damit sie integrabel werde.

Dividirt man aber diese Gleichung durch $R - S$, so erhält man

$$(n+1)\,RdR + mSdR - nRdS - (m+1)\,SdS = 0;$$

dividirt man sie endlich durch $(R-S)\,[(n+1)R+(m+1)S]$, und löst sie in Partialbrüche auf, so findet man:

$$\frac{dR}{m+n+2}\left[\frac{m+n+1}{R-S}+\frac{n+1}{(n+1)R+(m+1)S}\right]$$
$$+\frac{dS}{(m+n+2)}\left[\frac{m+n+1}{S-R}+\frac{m+1}{(n+1)R+(m+1)S}\right]=o$$

oder $\frac{(m+n+1)(dR-dS)}{R-S}+\frac{(n+1)dR+(m+1)dS}{(n+1)R+(m+1)S}=o,$

und demnach erhält man durch Integration

$$(R-S)^{m+n+1}\,[(n+1)R+(m+1)S]=a.$$

Setzt man $R-S=u$, so wird

$$(n+1)R+(m+1)S=\frac{a}{u^{m+n+1}}, \text{ und daher}$$

$$R=\frac{(m+1)u}{m+n+2}+\frac{a}{u^{m+n+1}} \text{ und } S=-\frac{(n+1)u}{m+n+2}+\frac{a}{u^{m+n+1}}.$$

Dann aber ist

$$Pdx=\frac{(m-n)du}{(m+n+2)}-\frac{(m+n)a\,du}{u^{m+n+1}} \text{ und}$$

$$Qdx=\frac{du}{u}\left(\frac{a}{u^{m+n+1}}+\frac{(m+1)u}{(m+n+2)}\right)\left(\frac{a}{u^{m+n+1}}-\frac{(n+1)u}{m+n+2}\right).$$

Zusatz 1.

§. 523. Man kann daher folgende Gleichung integriren:

$$ydy+ydu\left(\frac{m-n}{m+n+2}-\frac{(m+n)a}{u^{m+n+1}}\right)$$
$$+\frac{du}{u}\left(\frac{a^2}{u^{2m+2n+2}}+\frac{(m-n)a}{(m+n+2)u^{m+n}}-\frac{(m+1)(n+1)u^2}{(m+n+2)^2}\right)=o,$$

denn sie wird für sich integrabel, sobald man sie durch

$$\left(y+\frac{a}{u^{m+n+1}}+\frac{(m+1)u}{m+n+2}\right)^m\left(y+\frac{a}{u^{m+n+1}}-\frac{(n+1)u}{m+n+2}\right)^n$$

multiplicirt.

Zusatz 2.

§. 524. Für $m=n$ geht unsere Gleichung über in

$$ydy-\frac{2naydu}{u^{2n+1}}+\frac{a^2du}{u^{4n+3}}-\tfrac{1}{4}udu=o,$$

welcher Gleichung der Multiplicator $\left[\left(y+\frac{a}{u^{2n+1}}\right)^2-\tfrac{1}{4}u^2\right]^n$ entspricht. Setzen wir demnach $y=z-\frac{a}{u^{2n+1}}$, so kommt die Gleichung

$$zdz - \frac{adz}{u^{2n+1}} + \frac{azdu}{u^{2n+2}} - \tfrac{1}{4}udu = 0$$

zum Vorscheine, welche durch den Multiplicator $(z^2 - \tfrac{1}{4}u^2)^n$ integrabel gemacht wird. Setzt man aber $z = \tfrac{1}{2}y$ und $a = \frac{b}{2}$, so findet man die Gleichung

$$ydy - udu - \frac{bdy}{u^{2n+1}} + \frac{bydu}{u^{2n+2}} = 0,$$

und ihr Multiplicator ist $(y^2 - u^2)^n$.

Zusatz 3.

§. 525. Für $m = -n$ erhält man die Gleichung

$$ydy - nydu + \frac{a^2du}{u^3} + \tfrac{1}{4}(n^2 - 1)udu - \frac{nadu}{u} = 0,$$

welche mit

$$\left[y + \frac{a}{u} - \tfrac{1}{2}(n+1)u\right]^{-n}\left(y + \frac{a}{u} - \tfrac{1}{2}(n-1)u\right)^n$$

multiplicirt, integrabel wird. Für $y + \frac{a}{u} = z$ finden wir

$$zdz - nzdu + \tfrac{1}{4}(n^2 - 1)udu - \frac{adz}{u} + \frac{azdu}{u^2} = 0,$$

welche der Multiplicator

$$(z - \tfrac{1}{2}(n+1)u)^{-n}(z - \tfrac{1}{2}(n-1)u)^n$$

integrabel macht.

Zusatz 4.

§. 526. Setzt man hier $z = uv$, so findet man die Gleichung

$$u^2vdv + udu(v^2 - nv + \tfrac{1}{4}(n^2 - 1)) = adv.$$

Multiplicirt man diese durch $\left(\frac{v - \frac{1}{2}(n+1)}{v - \frac{1}{2}(n-1)}\right)^n$, so werden beyde Glieder integrabel; denn setzt man $\frac{v - \frac{1}{2}(n+1)}{v - \frac{1}{2}(n-1)} = s$, oder

$$v = \frac{n + 1 - (n-1)s}{2(1-s)},$$

so erhält man

$$\frac{s^{n+1}udu}{(1-s)^2} + \frac{n + 1 - (n-1)s}{2(1-s)^3}u^2s^nds = \frac{as^nds}{(1-s)^2},$$

und dessen Integrale

$$\frac{s^{n+1}u^2}{2(1-s)^2} = a\int\frac{s^nds}{(1-s)^2}$$ ist.

Anmerkung.

§. 527. Um unserer Gleichung im Allgemeinen eine geschmeidigere Form zu geben, setzen wir

$$m = -\lambda - 1 + \mu \quad \text{und} \quad n = -\lambda - 1 - \mu,$$

so daß $m + n + 2 = -2\lambda$ wird, so finden wir die Gleichung

$$y\,dy - y\,du\left(\frac{\mu}{\lambda} - 2(\lambda + 1)\,a\,u^{2\lambda}\right) +$$

$$+ u\,du\left(\frac{\mu^2 - \lambda^2}{4\lambda^2} - \frac{\mu}{\lambda}\,a\,u^{2\lambda} + a^2 u^{4\lambda}\right) = 0,$$

welcher der Multiplicator

$$\left(y + a u^{2\lambda+1} - \frac{(\mu-\lambda)\,u}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda-1}\left(y + a u^{2\lambda+1} - \frac{(\mu+\lambda)\,u}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda-1}$$

entspricht.

Wird $y + a u^{2\lambda+1} = u z$ gesetzt, so findet man die Gleichung

$$u z\,dz - a u^{2\lambda+1}\,dz + du\left(z^2 - \frac{\mu}{\lambda} z + \frac{\mu^2 - \lambda^2}{4\lambda^2}\right) = 0, \quad \text{und}$$

$$u^{-2\lambda-1}\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda-1}\left(z - \frac{\lambda-\mu}{2\mu}\right)^{-\mu-\lambda-1}$$

als den integrirenden Factor. Als Integrale aber findet man

$$C = a\int dz\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda-1}\left(z - \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda-1}$$

$$+ \frac{1}{2\lambda u^{2\lambda}}\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda}\left(z - \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda},$$

und dieses entspricht demnach folgender Differenzialgleichung:

$$z\,dz + \frac{du}{u}\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)\left(z - \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right) = a u^{2\lambda}\,dz.$$

Aufgabe 69.

§. 528. Für P, Q, R und X solche Functionen von x zu bestimmen, daß die Gleichung

$$dy + y^2 dx + X dx = 0$$

durch den Multiplicator $\frac{1}{Py^2 + Qy + R}$ integrabel werde.

Auflösung.

Es muß also die Gleichung Statt finden:

$$\frac{1}{dy} d . \frac{y^2 + X}{Py^2 + Qy + R} = \frac{1}{dx} d . \frac{1}{Py^2 + Qy + R},$$

und daher

$$2y(Py^2 + Qy + R) - (y^2 + X)(2Py + Q) = -\frac{y^2 dP - y dQ - dR}{dx},$$

folglich muß

$$\left.\begin{array}{l} Qy^2 dx + 2Rydx - QXdx \\ y^2 dP - 2Pxydx + dR, \\ + ydQ \end{array}\right\} = 0 \text{ seyn.}$$

Man erhält demnach

$$Q = -\frac{dP}{dx} = \frac{dR}{Xdx} \text{ und } X = -\frac{dR}{dP}.$$

Wird also dx constant genommen, so wird $dQ = -\frac{d^2P}{dx}$; also muß

$$2Rdx + \frac{2PdRdx}{dP} - \frac{d^2P}{dx} = 0, \text{ oder}$$

$$RdP + PdR = \frac{dPd^2P}{2dx^2} \text{ werden.}$$

Durch Integration findet man

$$PR = \frac{dP^2}{4dx^2} + C, \text{ also } R = \frac{dP^2}{4Pdx^2} + \frac{C}{P};$$

dann aber ist

$$Q = -\frac{dP}{dx} \text{ und } X = \frac{C}{P^2} + \frac{dP^2}{4P^2dx^2} - \frac{d^2P}{2Pdx^2}.$$

Wir wollen nun $P = S^2$ setzen, so daß S irgend eine Function von x bezeichnet, so wird

$$P = S^2, \; Q = -\frac{2SdS}{dx}, \; R = \frac{C}{S^2} + \frac{dS^2}{dx^2} \text{ und } X = \frac{C}{S^4} - \frac{d^2S}{Sdx^2};$$

für welche Werthe die Gleichung

$$\frac{dy + y^2dx + Xdx}{Py^2 + Qy + R} = 0$$

für sich integrabel wird.

Anmerkung.

§. 529. Diese Auflösung wird bequemer, wenn man dem Multiplicator die Form $\frac{P}{y^2 + 2Qy + R}$ gibt, damit

$$\frac{1}{dy} d . \frac{P(y^2+X)}{y^2+2Qy+R} = \frac{1}{dx} d . \frac{P}{y^2+2Qy+R}$$

werden muß; denn dann wird

$$\left.\begin{array}{l} 2PQy^2dx + 2PRydx - 2PQXdx \\ - y^2dP - 2PXydx - RdP \\ - 2QydP + PdR \\ + 2PydQ \end{array}\right\} = 0,$$

wo aus den einzelnen Gliedern $\frac{dP}{P}$ bequem bestimmt werden kann, nämlich:

$$\frac{dP}{P} = 2Qdx = \frac{Rdx - Xdx + dQ}{Q} = \frac{dR - 2QXdx}{R};$$

hieraus folgt

$$2Q(R+X)dx = dR,$$

woraus wir den Werth von dx selbst bestimmen, nämlich:

$$dx = \frac{dR}{2Q(R+X)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhalten wir

$$\frac{QdR}{R+X} = \frac{(R-X)dR}{2Q(R+X)} + dQ, \text{ oder}$$

$$2Q^2dR = RdR - XdR + 2QRdQ + 2QXdQ,$$

und hieraus erhalten wir

$$X = \frac{2Q^2dR - 2QRdQ - RdR}{2QdQ - dR} \text{ und } R + X = \frac{2(Q^2-R)dR}{2QdQ - dR},$$

und hieraus

$$dx = \frac{2QdQ - dR}{4Q(Q^2-R)} \text{ und } \frac{dP}{P} = \frac{2QdQ - dR}{2(Q^2-R)},$$

und daher

$$P = A\sqrt{(Q^2-R)}.$$

Sey nun $Q^2 - R = S$, so findet man

$$dx = \frac{dS}{4QS}, \; X = \frac{4QSdQ}{dS} - Q^2 - S, \; R = Q^2 - S \text{ und } P = A\sqrt{S}.$$

Wir werden daher folgende Gleichung erhalten:

$$dy + \frac{y^2dS}{4QS} + dQ - \frac{(Q^2+S)dS}{4QS} = 0,$$

welche durch den Multiplicator

$$\frac{\sqrt{S}}{y^2+2Qy+Q^2-S} = \frac{\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S}$$

integrabel wird. Um nun das Integrale jener Gleichung zu finden, betrachte man Q und S constant, so wird

$$\int \frac{dy\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q+\sqrt{S}} + V,$$

wobey V eine Function von S oder Q ist. Nun differenzire man diesen Ausdruck und betrachte y als beständig, so wird

$$\frac{dQ\sqrt{S} - \frac{(Q+y)dS}{2\sqrt{S}}}{(y+Q)^2 - S} + dV = \frac{y^2dS + 4QSdQ - Q^2dS - SdS}{4Q[(y+Q)^2 - S]\sqrt{S}},$$

und daher

$$dV = \frac{y^2dS + 2QydS + Q^2dS - SdS}{4Q[(y+Q)^2 - S]\sqrt{S}} = \frac{dS}{4Q\sqrt{S}};$$

hieraus finden wir das Integrale unserer Gleichung, nämlich:

$$\tfrac{1}{2}l.\frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q+\sqrt{S}} + \tfrac{1}{4}\int\frac{dS}{Q\sqrt{S}} = C.$$

Zusatz 1.

§. 530. Der Fall, wo $R = Q^2$ wird, ist besonders bemerkenswerth, denn es wird

$$\frac{dP}{P} = 2Qdx = \frac{Q^2dx - Xdx + dQ}{Q} = \frac{2dQ - 2Xdx}{Q},$$

woraus wir die beyden Gleichungen

$$Q^2dx + Xdx - dQ = 0 \quad \text{und} \quad Q^2dx + Xdx - dQ = 0$$

ableiten. Da diese übereinstimmen, so wird

$$Xdx = dQ - Q^2dx \quad \text{und} \quad lP = 2\int Qdx.$$

Zusatz 2.

§. 531. Nehmen wir Q negativ an, damit man habe

$$dy + y^2dx - dQ - Q^2dx = 0.$$

Durch den Multiplicator $\frac{e^{-2\int Qdx}}{(y-Q)^2}$ wird diese letzte Gleichung integrabel, denn man erhält zum Integral

$$-\frac{1}{y-Q}\,e^{-2\int Qdx} + V = \text{Const.},$$

wo V bloß eine Function von x ist; um diese zu bestimmen, differenzire man die letzte Gleichung so, als ob y constant wäre, so hat man

$$-\frac{dQ}{(y-Q)^2}e^{-2\int Q dx} + \frac{2Q dx}{y-Q}e^{-2\int Q dx} + dV =$$

$$= \frac{y^2 dx - dQ - Q^2 dx}{(y-Q)^2} e^{-2\int Q dx},$$

hieraus wird $V = \int e^{-2\int Q dx} dx$, so daß das Integrale ist

$$\int e^{-2\int Q dx} dx - \frac{e^{-2\int Q dx}}{y-Q} = C.$$

Zusatz 3.

§. 532. Wenn daher die Gleichung

$$dy + y^2 dx + X dx = 0$$

vorgelegt ist, und wenn irgend ein particulares Integrale derselben $y = Q$ ist, so daß man hat

$$dQ + Q^2 dx + X dx = 0, \text{ also}$$

$$dy + y^2 dx - dQ - Q^2 dx = 0,$$

so ist der Multiplicator für dieselbe $\frac{1}{(y-Q)^2} e^{-2\int Q dx}$, und das complette Integrale derselben ist

$$C e^{2\int Q dx} + \frac{1}{y-Q} = e^{2\int Q dx} \int e^{-2\int Q dx} dx.$$

Anmerkung.

§. 533. Die in der vorigen Anmerkung gefundene Gleichung

$$dy + \frac{y^2 dS}{4QS} + dQ - \frac{Q^2 + S}{4QS} dS = 0$$

biethet keine besondere Schwierigkeit dar, denn setzt man $y + Q = z$, so geht sie über in

$$dz - \frac{z dS}{2S} + \frac{dS(z^2 - S)}{4QS} = 0.$$

Damit nun die beyden ersten Glieder in eines sich verbinden lassen, setze man $z = v\sqrt{S}$, so findet man

$$dv\sqrt{S} + \frac{v^2 dS}{4Q} - \frac{dS}{4Q} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{dv}{v^2 - 1} + \frac{dS}{4Q\sqrt{S}} = 0.$$

Da diese Gleichung abgesondert ist, so ist das Integrale

$$\tfrac{1}{2} l \frac{1+v}{1-v} = \tfrac{1}{4}\int \frac{dS}{Q\sqrt{S}},$$

wobey $v = \frac{y+Q}{\sqrt{S}}$ ist.

Die bey der Auflösung selbst gefundene Gleichung

$$dy + y^2 dx + \frac{C dx}{S^4} - \frac{d^2 S}{S dx} = 0,$$

wobey S irgend eine Function von x bezeichnet, und $\frac{d^2 S}{dx} = d.\frac{dS}{dx}$ ist, scheint schwieriger zu seyn, denn sie wird integrabel, wenn man sie durch

$$S^2 y^2 - \frac{2 S y dS}{dx} + \frac{dS^2}{dx^2} + \frac{C}{S^2} = \left(Sy - \frac{dS}{dx}\right)^2 + \frac{C}{S^2}$$

dividirt. Betrachtet man x als constant, so findet man

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \text{ arc. tang. } \frac{S^2 y dx - S dS}{dx \sqrt{C}} + V = \text{Const.}$$

Um nun die Function V zu bestimmen, differenzire man und betrachte y als unveränderlich, so erhält man

$$\frac{2 S y dS - \frac{S d^2 S}{dx} - \frac{dS^2}{dx}}{S^2 \left(Sy - \frac{dS}{dx}\right)^2 + C} + dV,$$

welcher Ausdruck dem andern Theile gleich gesetzt werden muß, nämlich:

$$\frac{\frac{C dx}{S^4} - \frac{d^2 S}{S dx} + y^2 dx}{\left(Sy - \frac{dS}{dx}\right)^2 + \frac{C}{S^2}} = \frac{\frac{C dx}{S^2} - \frac{S d^2 S}{dx} + S^2 y^2 dx}{S^2 \left(Sy - \frac{dS}{dx}\right)^2 + C}, \text{ also}$$

$$dV = \frac{S^2 y^2 dx - 2 S y dS + \frac{dS^2}{dx} + \frac{C dx}{S^2}}{S^2 \left(Sy - \frac{dS}{dx}\right)^2 + C} = \frac{dx}{S^2}.$$

Es ist demnach das vollständige Integrale

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \text{ arc. tang. } \frac{S^2 y dx - S dS}{dx \sqrt{C}} + \int \frac{dx}{S^2} = D.$$

Setzen wir nun $S = x$, so entspricht der Gleichung

$$dy + y^2 dx + C\frac{dx}{x^4} = 0,$$

als vollständiges Integrale, der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \text{ arc. tang. } \frac{x^2 y - x}{\sqrt{C}} - \frac{1}{x} = D.$$

Wenn aber $S = x^n$ gesetzt wird, also

$$\frac{dS}{dx} = n x^{n-1} \text{ und } d.\frac{dS}{dx} = n(n-1) x^{n-2} dx,$$

so kann die Gleichung

$$dy + y^2 dx + C\frac{dx}{x^{4n}} - n(n-1)\frac{dx}{x^2} = 0$$

integrirt werden, denn ihr Integrale wird seyn

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \text{ arc. tang. } \frac{x^{2n}y - nx^{2n-1}}{\sqrt{C}} - \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} = D.$$

Oben aber haben wir gefunden, daß die Gleichung

$$dy + y^2 dx + Cx^n dx = 0$$

abgesondert werden könne, so oft $m = -\frac{4k}{2k \pm 1}$ ist; in eben diesen Fällen wird sich daher eine Function S angeben lassen, so daß $\frac{d^2S}{S\,dx^2} = Cx^m$ wird. Da jedoch dieser Ausdruck zu den Differenzialgleichungen des zweyten Grades gehört, so werden wir ihn auch hier nicht berühren.

Aufgabe 70.

§. 534. **Die Functionen P und Q der zwey Veränderlichen x und y so zu bestimmen, daß die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ durch $Px + Qy$ dividirt, integrabel werde.**

Auflösung.

Weil der Ausdruck $\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy}$ integrabel seyn soll, so setzen wir $Q = PR$, damit wir den Ausdruck $\frac{dx + Rdy}{x + Ry}$ erhalten, und es sey $dR = Mdx + Ndy$. Es muß demnach

$$\frac{1}{dy} d.\frac{1}{x + Ry} = \frac{1}{dx} d.\frac{R}{x + Ry}$$

werden, woraus wir $\frac{-R - Ny}{(x + Ry)^2} = \frac{Mx - R}{(x + Ry)^2}$ oder $N = -\frac{Mx}{y}$ erhalten. Es wird

$$dR = Mdx - \frac{Mxdy}{y} = My.\frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Weil nun diese Formel integrabel seyn muß, so muß My nothwendig eine Function von $\frac{x}{y}$ seyn, weil $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d.\frac{x}{y}$ ist, und wir erhalten demnach durch Integration $R = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, oder was

dasselbe ist, es bezeichnet R eine Function der nullten Dimension von x und y. Weil nun $\frac{Q}{P} = R$ ist, so geschieht offenbar dieser Bedingung Genüge, wenn P und Q homogene Functionen derselben Ordnung von x und y sind. Wir haben also auf diese Weise dieselbe Integrationsmethode der homogenen Differenzialgleichungen gefunden, welche wir im vorigen Kapitel gelehrt haben.

Zusatz 1.

§. 535. Da also $\frac{dt + R\,du}{t + Ru}$ integrabel ist, sobald $R = \varphi\left(\frac{t}{u}\right)$ oder $R = \frac{t}{u}\,\varphi\left(\frac{t}{u}\right)$ ist, so wird auch die Formel $\frac{\frac{dt}{t} + \frac{du}{u}\,\varphi\left(\frac{t}{u}\right)}{1 + \varphi\left(\frac{t}{u}\right)}$ integrabel werden, welcher Ausdruck sich auf folgende Art darstellen läßt:

$$\frac{\frac{dt}{t} + \frac{du}{u}\,\varphi\left(\int\frac{dt}{t} - \int\frac{du}{u}\right)}{1 + \varphi\left(\int\frac{dt}{t} - \int\frac{du}{u}\right)},$$

wo der Buchstabe φ irgend eine Function der eingeschlossenen Größe bedeutet.

Zusatz 2.

§. 536. Setzt man $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{X}$ und $\frac{du}{u} = \frac{dy}{Y}$, so wird auch die Formel

$$\frac{\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y}\,\varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right)}{1 + \varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right)} = \frac{dx + \frac{X\,dy}{Y}\,\varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right)}{X + X\varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right)}$$

für sich integrabel seyn. Wird daher $R = \frac{X}{Y}\,\varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right)$ gesetzt, so wird auch der Ausdruck $\frac{dx + R\,dy}{X + RY}$ für sich integrabel, welche Function auch X von x und Y von y seyn mag.

Zusatz 3.

§. 537. Wenn daher für P und Q solche Functionen gesucht werden, daß die Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ integrabel werde, wenn

sie durch $PX + QY$ dividirt wird, wobey X was immer für eine Function von x, und Y von y bezeichnet, so muß

$$\frac{Q}{P} = \frac{X}{Y}\varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right) \text{ seyn.}$$

Zusatz 4.

§. 538. Bezeichnen daher die Symbole φ und ψ was immer für Functionen, und es ist

$$P = \frac{V}{X}\varphi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right) \text{ und } Q = \frac{V}{Y}\psi\left(\int\frac{dx}{X} - \int\frac{dy}{Y}\right)$$

so wird die Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ integrabel werden, wenn man dieselbe durch $Px + Qy$ dividirt.

Anmerkung.

§. 539. Es können also unzählig viele Gleichungen angegeben werden, die sich integriren lassen, obgleich sich auf einem andern Wege sehr schwer einsehen läßt, wie sich dieselben durch Absonderung der Veränderlichen behandeln lassen. Übrigens gehört diese Untersuchung eigentlich in das zweyte Buch der Integralrechnung, dessen vortreffliche Materie wir schon jetzt kennen; denn wir haben eine Function R zweyer Veränderlichen x und y aus einer gegebenen Relation zwischen M und N, nämlich aus der Gleichung $Mx + Ny = 0$, oder

$$x\left(\frac{dR}{dx}\right) + y\left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

das ist aus einer bestimmten Relation der Differenzialien, abgeleitet.

Kapitel IV.

Von der particulären Integration der Differenzialgleichungen.

Erklärung.

§. 540. Ein particuläres Integrale einer Differenzialgleichung ist jene Relation zwischen der Veränderlichen, welche der Gleichung Genüge leistet, und keine neue constante Größe enthält. Es wird also dasselbe dem vollständigen Integrale entgegengesetzt, welches eine in der Differenzialgleichung nicht enthaltene Constante mit sich führt, und demnach das particuläre Integrale in sich einschließt.

Zusatz 1.

§. 541. Ist also das vollständige Integrale bekannt, so lassen sich aus demselben unendlich viele particuläre Integrale ableiten, wenn man jenen willkürlichen Constanten immer andere und andere Werthe beylegt.

Zusatz 2.

§. 542. Ist also zwischen der Veränderlichen x und y eine Differenzialgleichung gegeben, so geben alle Functionen von x, welche statt y substituirt der Gleichung Genüge leisten, particuläre Integralien, wenn sie nicht zufällig vollständig sind.

Zusatz 3.

§. 543. Da jene Differenzialgleichung sich auf die Form $\frac{dy}{dx} = V$ bringen läßt, wobey V was immer für eine Function von x und y ist, so kann man dieselbe für ein besonderes Integrale ansehen, wenn zwischen x und y eine solche Relation angegeben ist, daß aus derselben für $\frac{dy}{dx}$ und V gleiche Werthe folgen.

Anmerkung 1.

§. 544. Bisweilen ist es leicht, ein besonderes Integrale gleichsam zu errathen; wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$a^2 dy + y^2 dx = a^2 dx + xy dx,$$

so sieht man sogleich, daß für $y = x$ dieser Gleichung Genüge geleistet

werde. Da nun diese Relation nicht allein keine neue Constante enthält, sondern nicht einmal die in der Differenzialgleichung vorkommende Constante a, so ist dieselbe auch ein besonderes Integrale, woraus sich aber für das vollständige Integrale nicht folgern läßt. Oft biethet zwar die Kenntniß eines besonderen Integrals den Weg zur Auffindung des vollständigen, wie sich dieses in dem obigen Beyspiele wirklich ereignet, denn setzen wir in demselben $y = x + z$, so wird

$$a^2 dx + a^2 dz + x^2 dx + 2xzdx + z^2 dx = a^2 dx + x^2 dx + xzdx$$

oder $$a^2 dz + xzdx + z^2 dx = o,$$

welche Gleichung für $z = \frac{a^2}{v}$ in folgende übergeht:

$$dv - \frac{xvdx}{a^2} = dx.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie durch

$$e^{-\int \frac{xdx}{a^2}} = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$ multiplicirt, und gibt

$$e^{-\frac{x^2}{2a^2}} v = \int e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \text{ oder } v = e^{\frac{x^2}{2a^2}} \int e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx,$$

welches Integrale also transcendent ist, obgleich es jenes höchst einfache particuläre in sich schließt. Nimmt man nämlich die durch Integration von $\int e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ eingeführte Constante unendlich groß, so wird $v = \infty$ und $z = o$, also $y = x$. Bisweilen trägt aber das particuläre Integrale wenig zur Auffindung des vollständigen Integrale bey, denn wäre z. B. folgende Gleichung gegeben:

$$a^3 dy + y^3 dx = a^3 dx + x^3 dx,$$

welcher offenbar $y = x$ Genüge leistet, so erhält man, wenn $y = x + z$ gesetzt wird:

$$a^3 dz + 3x^2 zdx + 3xz^2 dx + z^3 dx = o.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ist nicht leichter als die der vorigen.

Anmerkung 2.

§. 545. Bey diesen Beyspielen fällt das particuläre Integrale sogleich in die Augen; es gibt aber Fälle, bey welchen man dieß nicht so leicht sieht, und obgleich man sich dadurch selten den Weg zum vollständigen Integrale bahnt, so ist es dennoch sehr oft von großer Wichtigkeit, das particuläre Integrale zu kennen, da man durch dasselbe

weisen seinen Zweck erreichen kann. Denn wir sehen schon bey allen
ıfgaben, deren Auflösung auf eine Differenzialgleichung führt, daß
: durch Integration eingeführte willkürliche Constante durch die in
r Aufgabe liegenden Bedingungen selbst bestimmt werde, so daß man
mer nur ein particuläres Integrale nöthig hat. Ereignet es sich da-
r, daß dieses besondere Integrale sich erkennen läßt, so kann ohne
ılfe des vollständigen Integrals das Problem aufgelöst werden, ob-
ich die Integration der Differenzialgleichung nicht in unserer Ge-
ılt ist. In diesen Fällen kann also die wahre Auflösung ohne Inte-
ation gefunden werden, während, eigentlich zu sprechen, keine Dif-
enzialgleichung für integrirt gehalten wird, wenn nicht das vollständige
ıtegrale derselben angegeben ist. Es wird daher nützlich seyn, jene
lle in Erwägung zu ziehen, in welchen das particuläre Integrale
rgestellt werden kann.

Anmerkung 3.

§. 546. Hier ist die Bemerkung von größter Wichtigkeit, daß
ht alle, irgend einer Differenzialgleichung Genüge leistenden Werthe,
ein particuläres Integrale derselben gehalten werden können. Wäre
B. die Gleichung $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$ oder $\frac{dx}{dy} = \sqrt{(a-x)}$ gege-
, so wird für $x = a$ sowohl $\sqrt{(a-x)} = o$, als auch $\frac{dx}{dy} = o$,
daß also für $x = a$ jener Differenzialgleichung Genüge geleistet wird,
leich dieser Werth kein particuläres Integrale derselben bezeichnet,
n das vollständige Integrale ist $y = C - 2\sqrt{(a-x)}$, oder
$-x = \frac{1}{4}(C-y)^2$. Man mag demnach der Constanten C was im-
: für einen Werth beylegen, so folgt daraus doch niemals $a - x = o$.
: dieselbe Art wird der Differenzialgleichung

$$dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}}$$

ch die endliche Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ Genüge geleistet, kann
r nicht unter die particulären Integralien gerechnet werden, weil
in dem vollständigen Integrale $y = C + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)}$ keines-
s enthalten ist. Es ist also nicht hinreichend für ein particuläres
egrale, daß durch dasselbe der Differenzialgleichung Genüge ge-
ht, sondern es muß noch überdieß die Bedingung hinzugefügt wer-
, daß es in dem vollständigen Integrale enthalten ist. Man muß
bey der Bestimmung der particulären Integrale sehr behutsam

seyn, wenn nicht zugleich das vollständige Integrale bekannt ist. Ist aber dieses bekannt, so wäre es überflüssig, durch eine besondere Methode die particulären Integralien aufzusuchen. Denn es ist nur dann vorzüglich vom Vortheile, zur Aufsuchung der particulären Integralien seine Zuflucht zu nehmen, wenn sich das vollständige Integrale nicht auffinden läßt. Um also hieraus einigen Nutzen schöpfen zu können, müssen wir Kennzeichen aufstellen, welche uns lehren, ob die irgend einer Differenzialgleichung entsprechenden Werthe als particuläre Integralien angesehen werden können oder nicht. Denn sind gleichwohl alle Integralien solche Werthe, welche der Differenzialgleichung Genüge thun, so sind doch nicht umgekehrt alle Werthe, welche der Differenzialgleichung entsprechen, Integralien derselben. Da man bisher auf diesen Punct noch wenig Rücksicht genommen hat, so werde ich mich bemühen, denselben so viel als möglich zu beleuchten.

Aufgabe 71.

§. 547. **Wenn in der Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$ für $x = a$ die Function Q verschwindet, so soll man die Fälle bestimmen, in welchen die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung ist.**

Auflösung.

Weil $Q = \frac{dx}{dy}$, so wird für $x = a$ sowohl $Q = 0$, als auch $\frac{dx}{dy} = 0$, und daher leistet der Werth $x = a$ auch der gegebenen Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$ Genüge; jedoch folgt hieraus nicht, daß derselbe ein particuläres Integrale sey; denn es ist noch nicht hinreichend, sondern es muß überdieß noch die Gleichung $x = a$ in dem vollständigen Integrale enthalten seyn, wenn man nämlich der durch Integration eingeführten Constanten irgend einen bestimmten Werth beylegt. Setzen wir demnach, es sey P das Integrale der Formel $\frac{dx}{Q}$, damit das vollständige Integrale $y = P + C$ werde. Setzt man $x = a$, so kann dadurch dieser Integralgleichung nicht Genüge geleistet werden, wenn für $x = a$ nicht $P = \infty$ wird, denn nimmt man dann die Constante C ebenfalls als unendlich groß, so bleibt y für $x = a$ unbestimmt. Wird also für $x = a$ die Größe $P = \infty$, so kann man

dann erst die Gleichung $x = a$ für ein particuläres Integrale halten. Wir haben also ein Kriterium für die Beurtheilung, ob der der Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$ Genüge leistende Werth $x = a$ zugleich ein particuläres Integrale derselben sey oder nicht. Es ist nämlich dann erst jener Werth ein Integrale, wenn für $x = a$ nicht allein $Q = 0$, sondern auch $P = \int \frac{dx}{Q} = \infty$ wird. Um nun die Sache noch deutlicher zu machen, wollen wir, weil $Q = 0$ für $x = a$ wird, $Q = (a - x)^n R$ setzen, wobey n eine beliebige positive Zahl bezeichnet. Da nun die Gleichung $dy = \frac{dx}{Q} = \frac{dx}{(a-x)^n R}$ folgende Form

$$dy = \frac{\alpha dx}{(a-x)^n} + \frac{\beta dx}{(a-x)^{n-1}} + \frac{\gamma dx}{(a-x)^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{S dx}{R}$$

annehmen kann, so hängt das Unendlichwerden der Größe P von dem Gliede $\int \frac{\alpha dx}{(a-x)^n}$ ab; wird dieses für $x = a$ unendlich, so wird auch das Integrale $P = \int \frac{dx}{Q}$ unendlich, wie sich die übrigen Glieder auch gegenseitig verhalten mögen. Es ist aber

$$\int \frac{\alpha dx}{(a-x)^n} = \frac{\alpha}{(n-1)(a-x)^{n-1}},$$

welcher Ausdruck für $x = a$ unendlich wird, so bald $n - 1$ eine positive Zahl, oder auch $n = 1$ ist. Wenn also n nicht kleiner als die Einheit ist, und es wird $Q = (a-x)^n R$ gesetzt, so kann die Gleichung $x = a$ für ein particuläres Integrale genommen werden.

Zusatz 1.

§. 548. So oft also für $Q = (a-x)^n R$ die Zahl n kleiner ist als die Einheit, so ist die Gleichung $x = a$ kein particuläres Integrale der Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$, obgleich dieselbe der letztern Genüge leistet.

Zusatz 2.

§. 549. Wenn der Exponent n kleiner als die Einheit ist, so wird die Formel $\frac{dQ}{dx}$ unendlich für $x = a$, und hieraus erhalten wir ein neues Kennzeichen. Ist nämlich die Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$

gegeben, und es wird für $x = a$ zwar $Q = 0$, aber $\frac{dQ}{dx} = \infty$, so ist der Werth $x = a$ kein particuläres Integrale jener Gleichung.

Zusatz 3.

§. 550. Mit Ausnahme dieser Fälle entspricht also die Gleichung $dy = \frac{dx}{Q}$, wo $Q = 0$ für $x = a$ wird, als particuläres Integrale immer dem Werth $x = a$, wenn nicht für $x = a$ auch $\frac{dQ}{dx} = \infty$ wird; dieß ist immer der Fall, so oft der Werth der Formel $\frac{dQ}{dx}$ entweder ein endlicher ist oder verschwindet.

Anmerkung 1.

§. 551. Diese auf die Umkehrung der hypothetischen Sätze gestützte Folgerung scheint zwar verdächtig, und den logischen Regeln zuwider zu seyn, allein der ganze Schluß stimmt mit diesen Regeln vollkommen überein, indem aus der Aufhebung des Consequenten die Aufhebung des Antecendenten gefolgert wird. Denn wird $Q = (a - x)^n R$ gesetzt, und es ist der Exponent n kleiner als die Einheit, so wird für $x = a$ jedesmal $\frac{dQ}{dx} = \infty$. Würde nun für $x = a$ der Quotient $\frac{dQ}{dx}$ nicht unendlich, wäre daher sein Werth ein endlicher oder würde er verschwinden, dann ist bestimmt der Exponent n nicht kleiner als eins, er wird daher entweder größer oder gleich der Einheit; in beyden Fällen wird aber dann für $x = a$ das Integrale $P = \int \frac{dx}{Q} = \infty$, und daher ist die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale. Wird demnach $Q = 0$, wenn in der Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{Q}$ die Veränderliche $x = a$ gesetzt wird, so wird der Werth des Ausdruckes $\frac{dQ}{dx}$ für $x = a$ untersucht, wird nun dieser endlich oder verschwindet er, so ist die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale; wird aber jener Werth unendlich, so gehört er nicht zu den particulären Integralien, obgleich er der Differenzialgleichung Genüge leistet. Dieselbe Regel findet noch Statt, wenn die Differenzialgleichung die Form

$$dy = \frac{P\,dx}{Q} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$$

hätte, und $Q = 0$ würde für $x = a$, was auch P immer für eine

Function von x und y bezeichnen mag; ja es ist nicht einmal nothwendig, daß Q bloß eine Function von x sey, sondern es kann auch y in derselben wie immer verbunden erscheinen.

Anmerkung. 2.

§. 552. Die Demonstration gründet sich demnach darauf, daß die Größe Q, welche für $x = a$ verschwindet, irgend eine Potenz von $(a - x)$ als Factor enthält, was bey algebraischen Functionen für sich klar ist. Aber bey transcendenten Functionen findet auch dieselbe Regel Statt, da sich dieselben hier wie Potenzen verhalten. Wäre z. B. $dy = \frac{dx}{lx - la}$, wo $Q = lx - la = l\frac{x}{a}$ ist, so wird $Q = 0$, wenn $x = a$ gesetzt wird, man suche daher $\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{x}$, und da diese Formel für $x = a$ nicht unendlich wird, so ist $x = a$ ein particuläres Integrale. Dasselbe gilt auch für die Gleichung $dy = \frac{Pdx}{lx - la}$, so lange P nicht gleich Null wird für $x = a$, denn es sey $P = \frac{1}{x}$, so erhält man durch Integration $y = C + l.(lx - la)$ und $l\frac{x}{a} = e^{y-C}$. Setzt man nun die Constante $C = \infty$, so wird $l\frac{x}{a} = 0$ und daher $x = a$, welches demnach ein particuläres Integrale ist. Eben so wenn $dy = \frac{Pdx}{e^{\frac{x}{a}} - e}$, wobey $Q = e^{\frac{x}{a}} - e$ gegeben ist; wird $Q = 0$ für $x = a$, weil $\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}$ und daher $\frac{dQ}{dx} = \frac{e}{a}$ für $x = a$ wird, so ist auch $x = a$ ein particuläres Integrale. Um nun die Integration ausführen zu können, setze man $P = e^{\frac{x}{a}}$, so wird, weil

$$y = C + a\,l.(e^{\frac{x}{a}} - e),\quad e^{\frac{x}{a}} = e + e^{\frac{y-C}{a}},$$

und für $C = \infty$ wird, $e^{\frac{x}{a}} = e$, also $x = a$, welches demnach offenbar ein particuläres Integrale ist.

Beyspiel 1.

§. 553. Wenn die Differenzialgleichung $dy = \frac{Pdx}{\sqrt{S}}$,

in welcher S für $x = a$ verschwinden soll, vorgelegt ist, so soll man die Fälle bestimmen, in welchen die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale ist.

Weil hier $\sqrt{S} = Q$, so wird $dQ = \frac{dS}{2\sqrt{S}}$, damit nun $x = a$ ein particuläres Integrale werde, muß der Quotient $\frac{dQ}{dx} = \frac{dS}{2\,dx\sqrt{S}}$ für $x = a$ nothwendig eine endliche Größe werden. Es muß also auch in eben diesem Falle die Größe $\frac{dS^2}{S\,dx^2}$ endlich werden, und daher muß auch $\frac{dS^2}{dx^2}$, folglich auch $\frac{dS}{dx}$ zugleich mit S verschwinden, dann aber erhält jener Bruch für $x = a$ den Werth $\frac{2\,dS\,d^2S}{dS\,dx^2} = \frac{2\,d^2S}{dx^2}$, welcher demnach entweder endlich werden oder verschwinden muß. Damit demnach die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung werde, sind folgende Bedingungen erforderlich: erstens muß $S = 0$ für $x = a$ werden, zweytens $\frac{dS}{dx} = 0$, und drittens muß der Werth des Ausdruckes $\frac{d^2S}{dx^2}$ entweder endlich werden oder verschwinden, er darf also nicht unendlich groß werden. Wenn S eine rationale Function ist, so beschränken sich diese Bedingungen darauf, daß S die zweyte oder eine höhere Potenz von $(a - x)$ als Factor enthält.

Anmerkung.

§. 554. Diese Auflösung findet Anwendung bey der Beurtheilung, ob die Bewegung eines zum Centrum der Kräfte getriebenen Körpers eine kreisförmige sey. Denn sey der Abstand des Körpers vom Mittelpuncte der Kräfte gleich x, und die diesem Abstande entsprechende Centripetalkraft gleich X, so findet man für die Zeit t die Differenzialgleichung

$$dt = \frac{x\,dx}{\sqrt{(Ex^2 - c^4 - 2\alpha x^2 \int X\,dx)}},$$

wo E die durch die vorhergehende Integration eingeführte Constante bezeichnet, deren Werth so zu bestimmen ist, daß der Gleichung für $x = a$ Genüge geschieht, in welchem Falle sich der Körper in einem Kreise bewegen wird. Es ist also hier $S = Ex^2 - c^4 - 2\alpha x^2 \int X\,dx$, oder es kann $S = E - \frac{c^4}{x^2} - 2\alpha \int X\,dx$ gesetzt werden. Es muß also

nicht allein diese Größe, sondern auch ihr Differenziale $\frac{dS}{dx} = \frac{2c^4}{x^3} - 2\alpha X$ für $x = a$ verschwinden, wobey jedoch das zweyte Differenziale $\frac{d^2S}{dx^2} = -\frac{6c^4}{x^4} - \frac{2\alpha dX}{dx}$ nicht unendlich werden darf. Es bezeichnet also die Constante a den aus der Gleichung $\alpha x^3 X = c^4$ sich ergebende Werth von x, welcher der Halbmesser des Kreises ist, in welchem der Körper sich bewegen kann, so lange nur die, die Geschwindigkeit bestimmende Constante E so gebildet ist, daß $E = \frac{c^4}{a^2} + 2\alpha \int X dx$ für $x = a$ werde, wenn nicht zufälliger Weise in diesem Falle der Ausdruck $\frac{6c^4}{x^4} + \frac{2\alpha dX}{dx}$ oder wenigstens der Quotient $\frac{dX}{dx}$ unendlich werden sollte; denn sollte sich dieses ereignen, so würde die Bewegung im Kreise aufgehoben. Um dieses zu zeigen, setzen wir $X = b + \sqrt{(a-x)}$, damit $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{(a-x)}}$ für $x = a$ unendlich werde, so wird $\alpha a^3 b = c^4$ aus der Gleichung $\alpha x^3 X = c^4$ gefunden. Weil aber dann

$$\int X dx = bx - \tfrac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} \text{ ist, so wird}$$
$$E = \alpha ab + 2\alpha ab = 3\alpha ab,$$

und unsere Gleichung verwandelt sich in

$$dt = \frac{x\,dx}{\sqrt{[3\alpha ab x^2 - \alpha a^3 b - 2\alpha b x^3 + \frac{4}{3}\alpha x^2 (a-x)^{\frac{3}{2}}]}},$$

von welcher Gleichung offenbar $x = a$ kein Integrale ist, denn es wird

$$S = \alpha(a-x)\left[-a^2 b - abx + 2bx^2 + \tfrac{4}{3}x^2\sqrt{(a-x)}\right],$$

und weil nicht $a - x$, sondern nur $(a-x)^{\frac{3}{2}}$ als Factor hier erscheint, so kann auch das particuläre Integrale $x = a$ nicht Statt haben.

Beyspiel 2.

§. 555. Die Differenzialgleichung $dy = \frac{P dx}{\sqrt[n]{S^m}}$, in welcher S für $x = a$ verschwinden soll, sey gegeben. Man bestimme die Fälle, in welchen $x = a$ ein particuläres Integrale ist.

Weil $S = 0$ für $x = a$ wird, so kann man $S = (a-x)^\lambda R$ setzen, dann wird der Nenner $\sqrt[n]{S^m} = (a-x)^{\frac{\lambda m}{n}} R^{\frac{m}{n}}$, und es ist nun

klar, daß die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale der vorgelegten seyn werde, sobald $\frac{\lambda m}{n}$ eine positive Zahl, die größer als die Einheit, oder wenigstens gleich der Einheit ist, bezeichnet; d. i. wenn entweder $\lambda = \frac{n}{m}$ oder $\lambda > \frac{n}{m}$ ist, welches sich sehr leicht beurtheilen läßt, wenn S eine algebraische Function ist. Ist dagegen S eine transcendente Function, so daß sich λ nicht in Zahlen ausdrücken läßt, so muß man sich folgender Regel bedienen. Wenn $\sqrt[n]{S^m} = Q$ gesetzt wird, so wird $\frac{dQ}{dx} = \frac{m S^{\frac{m-n}{n}} dS}{n dx}$, und der Werth dieses Ausdruckes muß für $x = a$ entweder endlich seyn oder verschwinden, wenn $x = a$ ein Integrale seyn soll. Es muß demnach auch in diesem Falle die Größe $\frac{S^{m-n} dS^n}{dx^n}$ endlich seyn. Man suche also den Werth dieser Formel für $x = a$, wird dieser unendlich groß, so ist die Gleichung $x = a$ kein particuläres Integrale; wird dagegen jener Werth endlich oder verschwindet er, so ist $x = a$ zuverläßig ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung.

Es müssen hier zwey Fälle aufgestellt werden, je nachdem entweder $m > n$ oder $m < n$ ist.

I. Wenn $m > n$ ist, so wird, weil $S^{m-n} = 0$ für $x = a$ wird, wenn nicht etwa in diesem Falle $\frac{dS}{dx} = \infty$ wird, zuverläßig $x = a$ ein particuläres Integrale. Wird aber $\frac{dS}{dx} = \infty$, so kann $x = a$ ein particuläres Integrale seyn oder nicht. Um nun dieses zu erkennen, setze man $\frac{dx}{dS} = T$, damit unsere Formel in $\frac{S^{m-n}}{T^n}$ übergehe, bey welchem Ausdrucke sowohl Zähler als Nenner für $x = a$ verschwinden. Dadurch findet man den Werth desselben

$$\frac{(m-n) S^{m-n-1} dS}{n T^{n-1} dT} = \frac{-(m-n) S^{m-n-1} dS^{n+2}}{n dx^n d^2S};$$

wird dieser Werth endlich oder verschwindet er, so wird $x = a$ ein Integrale. Auf ähnliche Weise kann man weiter gehen, wenn man die Fälle, in welchen $m > n + 1$ und $m < n + 1$ ist, unterscheidet.

II. Ist $m < n$, so wird unsere Formel $\frac{dS^n}{S^{n-m} dx^n}$. Soll dieser

Ausdruck endlich werden, so muß $\frac{dS}{dx} = o$, und weil Zähler und Nenner für $x = a$ verschwinden, so stellt sich der Werth unserer Formel in folgender Form dar:

$$\frac{n\,d S^{n-1}\,d^2 S}{(n-m)\,S^{n-m-1}\,dS\,dx^n} = \frac{n\,d S^{n-2}\,d^2 S}{(n-m)\,S^{n-m-1}\,dx^n},$$

welcher Ausdruck endlich seyn muß.

Am leichtesten kommt man aber zum Ziele, wenn man gleich $x = a + \omega$ setzt; denn da S für $x = a$ verschwindet, so läßt sich durch diese Substitution die Größe S immer auf folgende Form zurückführen:

$$P\omega^\alpha + Q\omega^\beta + R\omega^\gamma + \text{rc.},$$

wobey nur das einzige Glied $P\omega^\alpha$ die niedrigste Potenz von ω enthalten soll. Wenn nun entweder $\alpha = \frac{n}{m}$ oder $\alpha > \frac{n}{m}$ ist, so ist nothwendig $x = a$ ein particuläres Integrale.

Anmerkung.

§. 556. Diese letztere Methode ist die sicherste, und wird auch bey transcendenten Functionen immer mit dem besten Erfolge angewendet; denn wäre die Differenzialgleichung $dy = \frac{P\,dx}{Q}$ gegeben, in welcher für $x = a$ zwar Q, aber nicht der Zähler P verschwinden soll, so setze man sogleich $x = a \pm \omega$ und betrachte ω als unendlich klein, damit alle höheren Potenzen gegen die niedrigste verschwinden, so wird die Größe Q die Form $R\omega^\lambda$ erhalten, woraus erhellt, daß zuverläßig $x = a$ ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung seyn werde, wenn λ nicht kleiner als die Einheit ist. Hätten wir z. B. die Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{\sqrt{\left(1 + \cos.\frac{\pi x}{a}\right)}}$, in welcher der Nenner für $x = a$ verschwindet, weil $\cos.\pi = -1$ ist, so setze man $x = a - \omega$, so erhält man

$$\cos.\frac{\pi x}{a} = \cos.\left(\pi - \frac{\pi\omega}{a}\right) = -1 + \frac{\pi^2\omega^2}{2a^2},$$

weil ω unendlich klein ist. In unserer Gleichung wird daher der Nenner $= \frac{\pi\omega}{a\sqrt{2}}$, woraus wir schließen, daß $x = a$ wirklich ein particuläres Integrale sey. Dieß wird aber nicht der Fall seyn, bey fol-

gender Gleichung:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1 + \cos.\frac{\pi x}{a}\right)}}.$$

Aufgabe 72.

§. 557. Es sey eine Differenzialgleichung gegeben, in welcher die Veränderlichen schon abgesondert erscheinen, man soll die particulären Integralien derselben aufsuchen.

Auflösung.

Die gegebene Differenzialgleichung sey $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, in welcher X bloß eine Function von x, und Y bloß eine Function von y seyn soll. Man setze zuerst $X = 0$, und suche hieraus die Werthe von x, deren jeder $x = a$ seyn soll, so daß für $x = a$, $X = 0$ werde; hierauf untersuche man den Werth der Formel $\frac{dX}{dx}$ für $x = a$; wird dieser nicht unendlich, so ist $x = a$ zuverläßig ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung. Oder man setze $x = a \pm \omega$ und betrachte ω als unendlich klein, und wird das Resultat $X = P\omega^\lambda$, so wird die Gleichung $x = a$ als ein particuläres Integrale angesehen werden können, wenn der Exponent λ nicht kleiner als die Einheit ist. Ist aber $\lambda < 1$, so ist $x = a$ kein particuläres Integrale.

Auf dieselbe Art untersucht man auch den Nenner Y des andern Theils der Gleichung, verschwindet dieser für $y = b$, und wird in diesem Falle $\frac{dY}{dy}$ nicht unendlich, so ist $y = b$ ein particuläres Integrale. Dieß ergibt sich demnach auch, wenn $Y = Q\omega^\lambda$ für $y = b \pm \omega$ wird, wobey der Exponent λ nicht kleiner als die Einheit seyn darf.

Zusatz 1.

§. 558. Sind demnach die Glieder einer abgesonderten Gleichung nicht Brüche, deren Nenner in gewissen Fällen verschwinden, so läßt jene Gleichung keine solchen particulären Integralien zu, wenn nicht etwa zufällig in einer solchen Gleichung von der Form $P dx = Q dy$ die Factoren P und Q in gewissen Fällen unendlich werden, welcher Fall aber leicht auf den vorigen zurückgeführt wird.

Zusatz 2.

§. 559. Hätte man z. B. die Gleichung $dx \tan. \frac{\pi x}{2a} = \frac{dy}{b-y}$, so ist zwar $y = b$ ein particuläres Integrale, allein man muß, weil für $x = a$ die Größe $\tan. \frac{\pi x}{2a} = \infty$ wird, das erste Glied der Gleichung auf die Form $\frac{dx}{\operatorname{cotang.} \frac{\pi x}{2a}}$ bringen, wo dann der Nenner für $x = a - \omega$ übergeht in

$$\operatorname{cotang.} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \omega}{2a}\right) = \tan. \frac{\pi \omega}{2a} = \frac{\pi \omega}{2a}.$$

Da nun hier der Exponent von ω nicht kleiner als die Einheit ist, so ist auch die Gleichung $x = a$ ein particuläres Integrale.

Zusatz 3.

§. 560. Es können demnach bisweilen für eine und dieselbe Gleichung zwey oder mehrere particuläre Integralien angegeben werden; so entsprechen z. B. der Differenzialgleichung $\frac{m\,dx}{a-x} = \frac{n\,dy}{b-y}$, die beyden particulären Integralien $a - x = o$ und $b - y = o$, welche auch aus dem vollständigen Integrale $(a-x)^m = C\,(b-y)^n$ sich ergeben, und zwar das erstere für $C = o$, das letztere aber für $C = \infty$.

Zusatz 4.

§. 561. Eben so hat die Gleichung $\frac{m a\,dx}{a^2 - x^2} = \frac{n b\,dy}{b^2 - y^2}$, die vier particulären Integralien $a + x = o$, $a - x = o$, $b + y = o$ und $b - y = o$, das vollständige Integrale aber ist

$$\frac{m}{2}\, l.\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \tfrac{1}{2} C + \frac{n}{2}\, l.\left(\frac{b+y}{b-y}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^m = C\left(\frac{b+y}{b-y}\right)^n, \text{ oder}$$

$$(a+x)^m\,(b-y)^n = C\,(a-x)^m\,(b+y)^n,$$

woraus jene particuläre Integralien von selbst folgen.

Zusatz 5.

§. 562. Wäre also $dy = \frac{P\,dx}{(a+x)^{\alpha}\,(b+x)^{\beta}\,(c+x)^{\gamma}}$ vorgelegt, so folgt aus dem Gesagten, daß $a + x = o$, $b + x = o$, $c + x = o$, particuläre Integralien seyen, wenn die Exponenten α,

β, γ, ꝛc. nicht kleiner als die Einheit sind. Bezeichnet demnach Q eine rationale Function von x, und ist die Gleichung $dy = \frac{P\,dx}{Q}$ gegeben, so geben alle Factoren von Q, wenn sie gleich Null gesetzt werden, particuläre Integralien.

Anmerkung 1.

§. 563. Diese Bemerkung gilt auch von den imaginären Factoren, obgleich solche wenig Vortheil gewähren; denn wäre die Gleichung $dy = \frac{a\,dx}{a^2 + x^2}$ gegeben, so entspringen aus dem Nenner $(a^2 + x^2)$ die particulären Integralien $x = a\sqrt{-1}$, $x = -a\sqrt{-1}$, welche sich aus dem vollständigen Integrale $y = C + \text{arc. tang.} \frac{x}{a}$ nicht so leicht zu ergeben scheinen. Für $x = a\sqrt{-1}$ aber ist zu bemerken, daß $\text{arc. tang.} \sqrt{-1} = \infty\sqrt{-1}$. Gibt man demnach der Constanten C eine ähnliche Form mit entgegengesetztem Zeichen, so bleibt die andere Größe y unbestimmt, wenn auch $x = a\sqrt{-1}$ gesetzt wird. Demungeachtet ist diese Annahme für ein particuläres Integrale zu halten, denn es ist im Allgemeinen

$$\text{arc. tang. } u\sqrt{-1} = \int \frac{du\sqrt{-1}}{1 - u^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.\, \frac{1 + u}{1 - u},$$

und hieraus erhält man sowohl für $u = +1$, als auch $u = -1$ zum Resultate $\infty\sqrt{-1}$, weil das Unendliche veranlaßt, daß die angezeigten Integralien Statt finden. Es läßt sich daher allgemein behaupten, daß $a + x = 0$ immer ein particuläres Integrale sey für die Gleichung $dy = \frac{P\,dx}{Q}$, wenn der Nenner Q den Factor $(a + x)^{\lambda}$ enthält, und λ nicht kleiner als die Einheit ist. Wenn aber λ auch positiv, jedoch kleiner als die Einheit ist, so ist $a + x = 0$ kein particuläres Integrale, obgleich $x = -a$ der Differenzialgleichung Genüge leistet.

Anmerkung 2.

§. 564. Merkwürdig ist allerdings dieses Paradoxon, welches meines Wissens noch von Niemanden bemerkt wurde, daß einer Differenzialgleichung ein Werth Genüge leisten kann, ohne ein Integrale derselben zu seyn, und es läßt sich kaum absehen, wie dieses sich mit der gewöhnlichen Idee der Integralien vereinbaren läßt. Denn so oft man für eine vorgelegte Differenzialgleichung eine solche Relation zwischen

der Veränderlichen aufstellen kann, durch deren Substitution in jene Gleichung Genüge geleistet, oder eine identische Gleichung hervorgebracht wird, so wird es kaum jemanden einfallen zu zweifeln, daß jene Relation wenigstens für ein particuläres Integrale genommen werden könne, und dennoch geräth man hiebey leicht in Irrthümer. Obgleich z. B. der Differenzialgleichung

$$dy\sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} = xdx + ydy$$

durch die endliche Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ Genüge geleistet wird, so würden wir dennoch einen ungeheuren Fehler begehen, wenn wir dieselbe für ein particuläres Integrale nehmen wollten, weil sie in dem completten Integrale $y = C - \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$ keineswegs enthalten ist. Obgleich daher jedes Integrale der Differenzialgleichung Genüge leisten muß, so können wir dennoch nicht umgekehrt schließen, daß jede endliche, Genüge leistende Gleichung ein Integrale derselben sey. Denn es wird noch überdieß erfordert, daß jener endlichen Gleichung irgend eine Eigenschaft zukomme, die wir hier aus einander gesetzt haben, und durch deren Erfüllung sie erst im vollständigen Integrale enthalten ist. Übrigens steht dieser Umstand der wahren hier gegebenen Lehre von den Integralien keineswegs entgegen, und ein solcher Zweifel kann bey den durch sichere Regeln aufgefundenen Integralien niemals Statt finden, sondern nur bey jenen Integralien, welche wir gleichsam durch ein glückliches Errathen gefunden haben. Wenn die Integration übrigens nicht gelingt, so kommt aber gerade auf ein glückliches Errathen das Meiste an, und dann müssen wir besonders auf unserer Huth seyn, daß wir nicht irgend eine Relation, die Genüge leistet, irrig für ein particuläres Integrale halten. Nachdem wir nun über diesen Punct bey den abgesonderten Gleichungen ins Reine gekommen sind, so wollen wir nun sorgfältig untersuchen, wie bey allen Differenzialgleichungen derley Fehler vermieden werden können.

Aufgabe 73.

§. 565. **Wenn irgend eine Relation zwischen zwey veränderlichen Größen einer Differenzialgleichung Genüge leistet, so soll man untersuchen, ob dieselbe ein particuläres Integrale sey oder nicht.**

Auflösung.

Es sey $Pdx = Qdy$ die vorgelegte Differenzialgleichung, wo-

bey P und Q was immer für Functionen von x und y bezeichnen. Dieser Gleichung soll jede Relation zwischen x und y Genüge leisten, durch welche $y = X$, nämlich irgend eine Function von x wird, so daß wenn durchgehends X statt y gesetzt wird, die Gleichung $Pdx = Qdy$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ wirklich erhalten wird. Es fragt sich demnach hier, ob der Werth $y = X$ für ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung gehalten werden könne oder nicht. Um dieß zu beurtheilen, setze man $y = X + \omega$, so wird $\frac{dX}{dx} + \frac{d\omega}{dx} = \frac{P}{Q}$, woraus die Gleichung $\frac{dX}{dx} = \frac{P}{Q}$ für $\omega = o$ erhalten wird. Durch diese Substitution reducirt sich demnach der Ausdruck $\frac{P}{Q}$ auf $\frac{dX}{dx}$, nebst einer mit ω behafteten Größe, welche für $\omega = o$ verschwindet. Bey dieser Rechnung ist es hinreichend, ω als einen unendlich kleinen Theil zu betrachten, dessen höhere Potenzen also gegen die niedrigste als verschwindend betrachtet werden können. Wir wollen daher annehmen, es werde $\frac{P}{Q} = \frac{dX}{dx} + S\omega^\lambda$, so erhält man $\frac{d\omega}{dx} = S\omega^\lambda$ oder $\frac{d\omega}{\omega^\lambda} = Sdx$. Aus dem Vorhergehenden aber ist bereits klar, daß $y = X$ nur dann ein particuläres Integrale sey, oder daß $\omega = o$ werde, wenn der Exponent λ gleich oder größer als die Einheit ist; denn es ist hier derselbe Grund wie oben für die Erforderniß vorhanden, daß das Integrale $\int S dx = \int \frac{d\omega}{\omega^\lambda}$ im vorgelegten Falle unendlich werde; in jenem Falle nämlich, wo $\omega = o$ ist; dieß aber ereignet sich nur dann, wenn $\lambda = 1$ oder $\lambda > 1$ ist; leistet also $y = X$ der Gleichung $P dx = Q dy$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ Genüge, so setze man $y = X + \omega$, wobey ω als unendlich klein angesehen wird, und untersuche die dadurch entstandene Formel $\frac{P}{Q} = \frac{dX}{dx} + S\omega^\lambda$, aus welcher sich, wenn nicht $\lambda < 1$ ist, schließen läßt, daß der Werth $y = X$ ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung sey.

Anmerkung.

§. 566. Da ω als eine unendlich kleine Größe behandelt wird, so scheint es, als könne man den Werth von $\frac{P}{Q}$ für $y = X + \omega$ am

bequemsten durch Differenziation bestimmen. Denn weil $\frac{P}{Q}$ eine Function von x und y ist, so setzen wir

$$d \, . \, \frac{P}{Q} = M dx + N dy,$$

und weil für $y = X$ der Bruch $\frac{P}{Q}$ der Voraussetzung gemäß in $\frac{dX}{dx}$ übergeht, wenn $X + \omega$ statt y gesetzt wird, so wird sich dieselbe verwandeln in $\frac{dX}{dx} + N\omega$, und hieraus würde, weil der Exponent für ω die Einheit ist, folgen, daß die Gleichung $y = X$ immer ein particuläres Integrale sey, was jedoch der Fall nicht seyn kann. Hieraus ergibt sich demnach, daß man die Differenziation nicht statt der Substitution anwenden könne. Um dieß noch deutlicher zu zeigen, nehmen wir an, es sey $\frac{P}{Q} = \sqrt{(y - X)} + \frac{dX}{dx}$, so erhalten wir hieraus offenbar $\frac{P}{Q} = \frac{dX}{dx} + \sqrt{\omega}$ für $y = X + \omega$. Setzen wir aber

$$d \, . \, \frac{P}{Q} = M dx + N dy,$$

so erhalten wir durch Differenziation $N = \frac{1}{2\sqrt{(y - X)}}$, und daher $\frac{P}{Q} = \frac{dX}{dx} + N\omega$, welcher Ausdruck von dem vorigen abweicht. Jener Ausdruck schließt nämlich die Gleichung $y = X$ aus der Reihe der Integralien aus, das Gegentheil aber findet bey dem letztern Ausdrucke scheinbar Statt. Übrigens muß man auch hier bemerken, daß die Größe N selbst eine Potenz von ω negativ einschließe, daher muß die Potenz ω weggelassen werden. Um jedoch hierauf nicht reflectiren zu müssen, ist es immer besser, der Substitution sich wirklich zu bedienen und die Differenziation zu beseitigen. Nach diesen Bemerkungen wird es nicht mehr schwierig seyn, zu beurtheilen, ob die irgend einer Differenzialgleichung Genüge leistenden Werthe wirkliche Integralien seyen oder nicht.

Beyspiel 1.

§. 567. Weil der Gleichung

$$dx \, (1 - y^m)^n = dy \, (1 - x^m)^n$$

$y = x$ offenbar Genüge leistet, so untersuche man, ob dieser Werth ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung sey oder nicht.

Man setze $y = x + \omega$ und betrachte ω als eine sehr kleine Größe, so ist $y^m = x^m + m x^{m-1} \omega$, und

$$(1 - y^m)^n = (1 - x^m - m x^{m-1} \omega)^n$$
$$= (1 - x^m)^n - m n x^{m-1} \omega (1 - x^m)^{n-1},$$

und hieraus findet man statt der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - y^m)^n}{(1 - x^m)^n}$ folgende:

$$1 + \frac{d\omega}{dx} = 1 - \frac{m n x^{m-1} \omega}{1 - x^m} \text{ oder } \frac{d\omega}{\omega} = - \frac{m n x^{m-1} dx}{1 - x^m}.$$

Weil nun hier ω einen ganzen Exponenten hat, so ist die Gleichung $y = x$ zuverläßig ein particuläres Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung.

Beyspiel 2.

§. 568. Da der Werth $y = x$ der Gleichung

$$a dy - a dx = dx \sqrt{(y^2 - x^2)}$$

Genüge leistet, so untersuche man, ob derselbe ein particuläres Integrale sey oder nicht.

Man setze $y = x + \omega$, wobey ω als unendlich klein genommen werden soll, so wird $a d\omega = dx \sqrt{2 x \omega}$ oder $\frac{a d\omega}{\sqrt{\omega}} = dx \sqrt{2x}$, weil $\sqrt{(y^2 - x^2)} = \sqrt{2 x \omega}$ ist.

Da nun hier $d\omega$ durch eine Potenz von ω, deren Exponent kleiner als die Einheit ist, dividirt wird, so folgt, daß der Werth $y = x$ kein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung sey, obgleich er derselben Genüge leistet. Denn wenn man das vollständige Integrale darstellen könnte, so würde man sehen, daß wie man auch die willkürliche, durch Integration eingeführte Constante bestimmen würde, die Gleichung $y = x$ in derselben nicht enthalten sey.

Anmerkung.

§. 569. Man erhält demnach einen neuen Grund, warum die Beurtheilung des Integrals vom Exponenten der Größe ω abhänge. Denn da in dem vorgelegten Beyspiele $\frac{a d\omega}{\sqrt{\omega}} = dx \sqrt{2x}$ wird, sobald man $y = x + \omega$ setzt, so erhält man durch Integration $2 a \sqrt{\omega} = C + \frac{2}{3} x \sqrt{2 x}$. Der Voraussetzung gemäß aber ist ω eine unendliche kleine Größe; man mag demnach die Constante C wie immer bestimmen, so erhält die Größe ω einen endlichen Werth, welcher sogar so groß werden kann, als man nur immer will; weil dieß aber unserer Voraussetzung

widerspricht, so folgt nothwendig, daß die Gleichung $y = x$ kein Integrale seyn könne, und daß dieß immer der Fall seyn müsse, so oft $d\omega$ durch eine Potenz von ω, deren Exponent kleiner als die Einheit ist, dividirt erscheint. Übrigens ist dagegen auch klar, daß wenn durch die angeführte Substitution $\frac{d\omega}{\omega} = R\,dx$ wird, damit $l\omega = lC + lS$ oder $\omega = CS$ werde, wenn $\int R\,dx = lS$ gesetzt wird, daß die Größe ω verschwinde, wenn die Constante C verschwindet. Eben dieß ist auch der Fall, wenn man $\frac{d\omega}{\omega^\lambda} = R\,dx$ findet, und $\lambda > 1$ ist; denn dann wird $\frac{1}{(\lambda-1)\omega^{\lambda-1}} = C - S$ oder $(\lambda-1)\omega^{\lambda-1} = \frac{1}{C-S}$ und für $C = \infty$ verschwindet in der That ω, wie die Voraussetzung es verlangt.

Übrigens wird die Gleichung in diesem Beyspiele für $x = p^2 - q^2$ und $y = p^2 + q^2$ von der Irrationalität befreyt, und man erhält $4aq\,dq = 4pq\,(p\,dp - q\,dq)$, oder $a\,dq = p^2\,dp - pq\,dq$, welche Gleichung nicht integrirbar zu seyn scheint; man kann demnach auch ihr vollständiges Integrale nicht angeben. Da nun dieser Gleichung der Werth $x = y$ oder $q = 0$ nicht mehr Genüge leistet, so läßt sich auch hieraus schließen, daß $y = x$ kein particuläres Integrale sey.

Beyspiel 3.

§. 570. Zu untersuchen, ob der Werth $y = x$, welcher der Gleichung

$$a^2\,dy - a^2\,dx = dx\,(y^2 - x^2)$$

Genüge leistet, ein particuläres Integrale sey, oder nicht.

Man setze $y = x + \omega$ und betrachte ω als unendlich klein, so erhält wegen $y^2 - x^2 = 2x\omega$ unsere Gleichung folgende Form;

$$a^2\,d\omega = 2x\omega\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{a^2\,d\omega}{\omega} = 2x\,dx.$$

Da nun hier $d\omega$ durch die erste Potenz von ω dividirt wird, so ist auch der Werth $y = x$ ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung, und ist sogar auch in dem vollständigen Integrale enthalten; denn dieses wird gefunden, wenn man $y = x - \frac{a^2}{\mu}$ setzt, denn

hiedurch erhält man

$$\frac{a^4 du}{u^2} = dx\left(\frac{a^4}{u^2} - \frac{2a^2x}{u}\right) \text{ oder } du + \frac{2uxdx}{a^2} = dx.$$

Multiplicirt man durch $e^{\frac{x^2}{a^2}}$, so erhält man das Integrale

$$e^{\frac{x^2}{a^2}} u = C + \int e^{\frac{x^2}{a^2}} dx,$$

und hieraus

$$y = x - a^2 e^{\frac{x^2}{a^2}} : (C + \int e^{\frac{x^2}{a^2}} dx).$$

Nimmt man demnach die Constante C unendlich groß, so wird $y = x$.

Anmerkung.

§. 571. Setzt man in dieser Gleichung wie oben $x = p^2 - q^2$ und $y = p^2 + q^2$, so wird

$$a^2 dq = 2p^2 q (pdp - qdq),$$

und dieser Gleichung leistet $q = 0$ Genüge, woraus sich dann der particuläre Fall $y = x$ ergibt. Hat man diese Transformation gemacht, so läßt sich sehr schwer erkennen, wie man das Resultat integriren müsse. Ziehen wir die obige Reduction in Erwägung, so werden wir einsehen, daß diese Gleichung integrabel werde, wenn man dieselbe durch $\frac{e^{\frac{(p^2-q^2)^2}{a^2}}}{q^3}$ multiplicirt. Da dieses nicht so leicht in die Augen fällt, so wird es gut seyn, die Substitution $p^2 - q^2 = r^2$ zu machen, denn dadurch wird $p^2 = q^2 + r^2$ und $pdp - qdq = rdr$; demnach geht unsere Gleichung über in $a^2 dq = 2qrdr(q^2 + r^2)$, oder $\frac{a^2 dq}{q^3} = 2rdr + 2\frac{r^3 dr}{q^2}$. Setzt man endlich $\frac{1}{q^2} = s$, so läßt sich dann das Integrale leicht bestimmen. So oft man also eine solche Relation zwischen den Veränderlichen auffinden kann, welche der Differenzialgleichung Genüge leistet, so läßt sich auf diese Art beurtheilen, ob man jene Beziehung für ein particuläres Integrale halten könne oder nicht. Es lassen sich aber kaum für die Auffindung solcher particulärer Integralien Regeln angeben, denn die Regeln, die man hat, führen eben so gut auch zur Bestimmung der vollständigen Integration. Wie wir also schon oben rücksichtlich der abgesonderten Gleichungen bemerkt haben, bahnen wir durch die Absonderung der Gleichungen

selbst zugleich den Weg zur Bestimmung ihres vollständigen Integrals. Gelingt aber die zweyte Integrationsmethode, nämlich die durch Multiplicatoren, so kann man auf ähnliche Weise, meistens aus den Factoren selbst, durch welche die Integrabilität der Gleichung hergestellt wird, auf die particulären Integralien schließen, wie wir in folgenden Sätzen zeigen werden.

Lehrsatz.

§. 572. **Wenn die Differenzialgleichung**

$$Pdx + Qdy = 0$$

durch die Function M multiplicirt integrabel wird, so ist M = 0 ein particuläres Integrale derselben, wenn nicht P und Q in diesem Falle unendlich werden.

Beweis.

Nehmen wir an, es sey u ein Factor von M, so ist zu zeigen, daß die Gleichung $u = 0$ ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung sey. Da nun u einer gewissen Function von x und y gleich seyn wird, so bestimme man hieraus die zweyte Variable y, so daß eine Gleichung zwischen der Veränderlichen x und u erhalten werde. Diese Gleichung sey $Rdx + Sdu = 0$, wird demnach der Multiplicator $M = Nu$ gesetzt, so erhält man die integrable Gleichung

$$NRudx + NSudu = 0.$$

Ist nun weder R noch S durch u getheilt, in welchem Falle für $u = 0$ weder P noch Q unendlich wird, so ist auch das Integrale durch u theilbar. Man suche dieses nämlich entweder aus dem Gliede NRudx, indem man u als unveränderlich betrachtet, oder aus dem Gliede NSudu, indem man x als constant ansieht, so wird das Integrale den Factor u enthalten, wenn man bey der Integration die Constante außer Acht läßt. Hieraus schließen wir, daß das vollständige Integrale die Form $V = uC$ hat. Wird demnach die Constante gleich Null gesetzt, so wird $u = 0$ ein particuläres Integrale, ausgenommen in jenen Fällen, in welchen die Functionen R und S schon selbst durch u dividirt erscheinen würden, in welchem Falle dann unser Schluß keine Gültigkeit haben würde. Mit Ausnahme dieser Fälle also wird, so oft die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ durch Multiplication mit der Function M integrabel wird, und eben diese Function M den Factor

u enthält, die Gleichung $u = 0$ ein particuläres Integrale seyn. Dasselbe gilt von jedem andern Factor der Function M.

Anmerkung.

§. 573. Die beygefügte Beschränkung ist absolut nothwendig, weil ohne Rücksicht auf dieselbe der ganze Schluß unrichtig wäre. Um dieß noch deutlicher zu zeigen, betrachten wir die Gleichung

$$\frac{a\,dx}{y - x} + dy - dx = 0,$$

welche durch $y - x$ multiplicirt, offenbar integrabel wird; setzen wir demnach den Multiplicator $y - x = u$ oder $y = x + u$, so geht unsere Gleichung über in $\frac{a\,dx}{u} + du = 0$, und diese verwandelt sich durch Multiplication mit u in $a\,dx + u\,du = 0$. Da nun der Theil $a\,dx$ nicht durch u multiplicirt ist, so kann man keineswegs schließen, daß das Integrale $ax + \frac{u^2}{2}$ durch u theilbar seyn werde. Man sieht demnach, daß, wenn nur der Theil dx durch u multiplicirt wäre, wenn auch der andere Theil du einen Factor u nicht bey sich führte, würde dennoch das Integrale durch u theilbar seyn, wie dieß der Fall ist bey dem Ausdrucke $u\,dx + x\,du$, dessen Integrale xu auch den Factor u enthält. Es ergibt sich hieraus, daß wenn die Formel $Pu\,dx + Q\,du$ für sich integrabel wäre, so lange nur Q nicht durch u oder eine höhere Potenz als die erste dividirt ist, auch das Integrale durch u theilbar seyn werde, sobald man die Constante vernachläßiget.

Lehrsatz.

§. 574. Wenn die Differenzialgleichung

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

durch die Function M dividirt integrabel wird, so ist $M = 0$ ein particuläres Integrale, wenn entweder P oder Q für $M = 0$ nicht verschwindet.

Beweis.

Es sey u ein Factor des Divisors M, so daß $M = Nu$ wird, so muß gezeigt werden, daß $u = 0$ ein particuläres Integrale sey, was dann von allen einzelnen Factoren des Divisors M, wenn er deren mehrere haben sollte, gilt. Da also u eine Function von x und y ist, so drücke man y durch x und u aus, so daß man eine Gleichung von

der Form $R\,dx + S\,du = 0$ erhält, welche also durch Nu dividirt, für sich integrabel wird. Man muß demnach das Integrale der Formel $\frac{R\,dx}{Nu} + \frac{S\,du}{Nu}$ bestimmen, wobey wir annehmen, daß weder R noch S den Factor u enthalte, und daß auf diese Art der Factor u aus dem Nenner nicht wegfalle. Wenn wir nun bloß das Integrale von dem Gliede $\frac{R\,dx}{Nu}$ nehmen, und dabey u als constant betrachten, so erhalten wir $\frac{r'}{u}\int\frac{R\,dx}{N} + \varphi(u)$; nehmen wir aber das Integrale von dem andern Gliede $\frac{S\,du}{Nu}$, indem wir x als beständig ansehen, so wird, weil S den Factor u nicht enthält, dieses Integrale so beschaffen seyn, daß es für $u = 0$ unendlich wird. Es ist sonach das Integrale, welches wir durch V bezeichnen wollen, so gebildet, daß es gleich unendlich wird für $u = 0$; weil nun das vollständige Integrale $V = C$ seyn wird, so wird dieser Gleichung, wenn die Constante C unendlich groß genommen wird, durch $u = 0$ Genüge geleistet. Hieraus schließen wir demnach, daß, wenn der Divisor $M = Nu$ der Differenzialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ den Charakter der Integrabilität verleiht, aus jedem Factor u des Divisors M das particuläre Integrale $u = 0$ erhalten werde, wenn nicht etwa die Größe P und Q, oder R und S für $u = 0$ verschwinden.

Zusatz 1.

§. 575. Wenn die Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ homogen ist, so wird diese, wie wir oben gesehen haben, integrabel gemacht, wenn wir sie durch $Px + Qy$ dividiren; mithin ist $Px + Qy = 0$ ein particuläres Integrale derselben. Da auch diese Gleichung homogen ist, so enthält sie Factoren von der Form $\alpha x + \beta y$, und jede derselben gleich Null gesetzt gibt ein particuläres Integrale.

Zusatz 2.

§. 576. Für die Gleichung

$$y\,dx\,(c + nx) - dy\,(y + a + bx + nx^2) = 0$$

haben wir den integrirenden Factor oben §. 488 gefunden, und daraus wird $y = 0$ als particuläres Integrale gefolgert; mithin

$$ny^2 + (2na - bc)y + n(b - 2c)xy$$
$$+ (na + c^2 - bc)(a + bx + nx^2) = 0,$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$ny = \tfrac{1}{2}bc - pa + n(c - \tfrac{1}{2}b)x \pm (c + nx)\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - nm}$$

Zusatz 3.

§. 577. Für die Differenzialgleichung

$$\frac{n\,dx\,(1 + y^2)\sqrt{(1 + y^2)}}{\sqrt{(1 + x^2)}} + (x - y)\,dy = 0$$

haben wir den integrirenden Factor §. 489 angegeben, und hieraus ergibt sich als particuläres Integrale die Gleichung

$$x - y + n\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} = 0, \text{ oder}$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = n^2 + n^2x^2 + n^2y^2 + n^2x^2y^2,$$

woraus $y = \frac{x \pm n(1 + x^2)\sqrt{(1 - n^2)}}{1 - n^2(1 + x^2)}$ gefunden wird.

Zusatz 4.

§. 578. Für die Differenzialgleichung

$$dy + y^2dx - \frac{a\,dx}{x^4} = 0$$

fanden wir §. 491 den Multiplicator $\frac{x^2}{x^2(1 - xy)^2 - a}$, woraus wir $x^2(1 - xy)^2 - a = 0$ als particuläres Integrale folgern, woraus endlich $x(1 - xy) = \pm\sqrt{a}$ oder $y = \frac{1}{x} \pm \frac{\sqrt{a}}{x^2}$ gefunden wird, so daß wir also zwey particuläre Integralien haben, welche aber imaginär werden, sobald a eine negative Größe bezeichnet.

Anmerkung.

§. 579. Das ist beyläufig alles, was bisher über die Behandlung der Differenzialgleichungen geschehen ist; übrigens wird uns die folgende Entwickelung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades noch einige Hülfsmittel darbiethen. Wir können aber hier noch bequem die Untersuchungen anführen, welche rücksichtlich der Vergleichungen gewisser transcendenten Formeln kürzlich angestellt worden sind. Denn so wie die Logarithmen und Kreisbogen, obgleich sie transcendente Größen sind, mit einander verglichen und eben so wie algebraische Größen in der Rechnung behandelt werden können, eben so lassen sich auch gewisse transcendente Größen einer höhern Art mit einander vergleichen, jene nämlich, welche in der Formel $\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}}$,

wobey auch der rationale Zähler $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 +$ ꝛc. erscheinen kann, enthalten sind. Da dieser Satz äußerst schwer ist, und sogar die Kräfte der Analysis zu übersteigen scheint, wenn nicht ein besonderer Kunstgriff zum Ziele führt, so ergibt sich hieraus ein nicht unbedeutender Zusatz zur Analysis, vorzüglich aber scheint dadurch die Auflösung der Differenzialgleichungen sehr vervollkommnet zu werden. Denn wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}},$$

so sieht man zwar sogleich, daß $x = y$ ein particuläres Integrale sey, allein das vollständige Integrale stellt sich vorzüglich als transcendente Größe dar, indem jede Formel für sich weder auf Logarithmen noch auf Kreisbogen zurückgeführt werden kann. Es wird unsere Bewunderung dadurch um so mehr erregt, weil das vollständige Integrale sich sogar durch eine algebraische Gleichung zwischen x und y darstellen läßt. Um aber die Methode, welche uns zu einer solchen Höhe führt, um so mehr ins Licht zu setzen, so wollen wir dieselbe zuerst auf bekannte transcendente Größen, welche sich unter die Form $\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}}$ subsumiren lassen, anwenden, und dann den Gebrauch derselben bey zusammengesetzteren Formeln nachweisen.

Kapitel V.

Von der Vergleichung der transcendenten Größen, welche in der Form $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}}$ enthalten sind.

Aufgabe 74.

§. 580. **Wenn zwischen x und y die algebraische Gleichung**

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

Statt findet, so suche man Integralformeln von der vorgeschriebenen Form, welche mit einander verglichen werden können.

Auflösung.

Man differenzire die vorgelegte Gleichung und bestimme aus ihrem Differenziale

$$2\beta dx + 2\beta dy + 2\gamma x dx + 2\gamma y dy + 2\delta x dy + 2\delta y dx = 0$$

folgende Gleichung:

$$dx(\beta + \gamma x + \delta y) + dy(\beta + \gamma y + \delta x) = 0;$$

nun setze man

$$\beta + \gamma x + \delta y = p, \text{ und } \beta + \gamma y + \delta x = q,$$

so erhält man aus der ersten

$$p^2 = \beta^2 + 2\beta\gamma x + 2\beta\delta y + \gamma^2 x^2 + 2\gamma\delta xy + \delta^2 y^2,$$

und wird von dieser die vorgelegte Gleichung, nachdem sie mit γ multiplicirt worden ist, nämlich

$$0 = \alpha\gamma + 2\beta\gamma x + 2\gamma\beta y + \gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2 + 2\gamma\delta xy$$

abgezogen, so erhält man

$$p^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)y + (\delta^2 - \gamma^2)y^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man auch

$$q^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)x + (\delta^2 - \gamma^2)x^2,$$

und daher wird

$$p\,dx + q\,dy = 0.$$

Da nun p eine Function von y ist, und q eine ähnliche Function von x, so setze man

$\beta^2 - \alpha\gamma = A$, $\beta(\delta - \gamma) = B$ und $\delta^2 - \gamma^2 = C$,

so findet man

$$\delta - \gamma = \frac{B}{\beta}, \text{ und } \delta + \gamma = \frac{C}{\delta - \gamma} = \frac{\beta C}{B}, \text{ und demnach}$$

$$\delta = \frac{B^2 + \beta^2 C}{2B\beta} \text{ und } \gamma = \frac{\beta^2 C - B^2}{2B\beta}.$$

Die erste Gleichung aber gibt

$$\alpha = \frac{\beta^2 - A}{\gamma} = \frac{2B\beta(\beta^2 - A)}{\beta^2 C - B^2}.$$

Werden nun diese Werthe für α, γ, δ angenommen, so geht die Gleichung $\frac{dx}{q} + \frac{dy}{p} = 0$ über in folgende:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cy^2)}} = 0,$$

welcher Differenzialgleichung demnach der Werth

$$\frac{2B\beta(\beta^2 - A)}{\beta^2 C - B^2} + 2\beta(x + y) + \frac{\beta^2 C - B^2}{2B\beta}(x^2 + y^2) + \frac{B^2 + \beta^2 C}{B\beta} xy = 0$$

Genüge leistet; da aber diese letztere Gleichung die neue Constante β enthält, so wird sie sogar das vollständige Integrale der gefundenen Differenzialgleichung seyn.

Es ist jedoch nicht nöthig, daß jene Formeln den Buchstaben A, B, C gleich gesetzt werden, denn es ist schon hinreichend, wenn sie denselben nur proportional sind, und hieraus folgt:

$$\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta(\delta - \gamma)} = \frac{A}{B}, \text{ und } \frac{\delta + \gamma}{\beta} = \frac{C}{B};$$

folglich ist

$$\delta = \frac{\beta C}{B} - \gamma, \text{ und } \alpha = \frac{\beta^2}{\gamma} - \frac{\beta A}{\gamma B}(\delta - \gamma), \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{\beta^2}{\gamma} - \frac{\beta^2 AC}{\gamma B^2} + \frac{2\beta A}{B}.$$

Es hat daher die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cy^2)}} = 0$$

zum vollständigen Integrale den Ausdruck

$$\beta^2(B^2 - AC) + 2\beta\gamma AB + 2\beta\gamma B^2(x+y) + \gamma^2 B^2 (x^2+y^2)$$
$$+ 2\gamma B(\beta C - \gamma B)xy = 0,$$

wo das Verhältniß $\frac{\beta}{\gamma}$ die willkürliche Constante bedeutet.

Zusatz 1.

§. 581. Wenn man aus der vorgelegten Gleichung y sucht, so hat man

$$y = \frac{-\beta - \delta x + \sqrt{(\beta^2 + 2\beta\delta x + \delta^2 x^2 - \alpha\gamma - 2\beta\gamma x - \gamma^2 x^2)}}{\gamma},$$

oder wenn statt α und δ die Werthe gesetzt werden:

$$y = -\frac{\beta}{\gamma} - \frac{(\beta C - \gamma B)}{\gamma B} x + \sqrt{\left[\left(\frac{\beta^2 C - 2\beta\gamma B}{\gamma^2 B^2}\right)(A + 2Bx + Cx^2)\right]}.$$

Zusatz 2.

§. 582. Für $x = 0$ wird demnach

$$y = -\frac{\beta}{\gamma} + \sqrt{\left(\frac{\beta^2 AC - 2\beta\gamma AB}{\gamma^2 B^2}\right)}.$$

Diesen Werth setze man gleich a, so wird

$$\gamma B a + \beta B = \sqrt{(\beta^2 AC - 2\beta\gamma AB)},$$

und beyderseits quadrirt erhält man:

$$\gamma^2 B^2 a^2 + 2\beta\gamma B^2 a + \beta^2 B^2 = \beta^2 AC - 2\beta\gamma AB,$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{-A - Ba + \sqrt{A(A + 2Ba + Ca^2)}}{Ba^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{B(A + Ba + \sqrt{A(A + 2Ba + Ca^2)})}{AC - B^2}.$$

Anmerkung 1.

§. 583. Damit die angenommene Gleichung

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cy^2)}} = 0$$

Genüge thue, muß man haben

$$\beta^2 - \alpha\gamma = mA, \quad \beta(\delta - \gamma) = mB, \quad \delta^2 - \gamma^2 = mC,$$

und hieraus folgt:

$$\beta + \gamma y + \delta x = \sqrt{m}\,(A + 2Bx + Cx^2) \text{ und}$$
$$\beta + \gamma x + \delta y = \sqrt{m}\,(A + 2By + Cy^2).$$

Aber aus den gegebenen Größen A, B, C lassen sich von den Größen α, β, γ, δ und m nur drey bestimmen; da nun zwey dieser Größen unbestimmt bleiben, so wird die angenommene Gleichung, wenn sie auch durch jeden der Coefficienten dividirt wird, dennoch eine neue Constante enthalten, und kann daher für das vollständige Integrale gehalten werden. Obgleich daher kein Theil der Differenzialgleichung für sich eine algebraische Integration zuläßt, so kann dennoch das vollständige Integrale in einer algebraischen Form dargestellt werden. Statt der willkürlichen Constanten kann man jenen Werth von y einführen, welchen y für x = o annimmt; da es sich aber ereignen kann, daß dieser Werth imaginär wird, so muß man jene Constante so bestimmen, daß y = b für x = a werde, wodurch sie dann in allen Fällen Anwendung findet. Es wird demnach

$$\frac{\beta + \gamma b + \delta a}{\beta + \gamma a + \delta b} = \sqrt{\frac{A + 2Ba + Ca^2}{A + 2Bb + Cb^2}},$$

und hieraus folgt:

$$\beta = \frac{(\gamma a + \delta b)\sqrt{(A + 2Ba + Ca^2)} - (\gamma b + \delta a)\sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)}}{-\sqrt{(A + 2Ba + Ca^2)} + \sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)}} \text{ und}$$

$$\sqrt{m}\,(A + 2Ba + Ca^2) = \frac{(\delta - \gamma)(b - a)\sqrt{(A + 2Ba + Ca^2)}}{\sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)} - \sqrt{(A + 2Ba + Ca^2)}},$$

oder $$\sqrt{m} = \frac{(\delta - \gamma)(b - a)}{\sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)} - \sqrt{(A + 2Ba + Ca^2)}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$\sqrt{(A + 2Ba + Ca^2)} = \mathfrak{A}$, und $\sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)} = \mathfrak{B}$,

so wird

$$\sqrt{m} = \frac{(\delta - \gamma)(b - a)}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}} \text{ und } \beta = \frac{\mathfrak{A}(\gamma a + \delta b) - \mathfrak{B}(\gamma b + \delta a)}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}},$$

und die Gleichung $\beta(\delta - \gamma) = mB$ nimmt folgende Form an:

$$\mathfrak{A}(\gamma a + \delta b) - \mathfrak{B}(\gamma b + \delta a) = \frac{B(\delta - \gamma)(b - a)^2}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}},$$

und hieraus wird

$$\left.\begin{array}{l} \gamma\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \gamma A - \gamma B(a + b) - \gamma C(a^2 - ab + b^2) \\ + \delta\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \delta A - \delta B(a + b) - \delta Cab \end{array}\right\} = o.$$

Man setze also

$$\gamma = n\mathfrak{A}\mathfrak{B} - nA - nB(a + b) - nCab,$$
$$\delta = nA + nB(a + b) + nC(a^2 - ab + b^2) - n\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\sqrt{m} = \frac{n(b-a)\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}} = n(b-a)(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

$$\beta = nB(b-a)^2, \quad \text{also} \quad \delta - \gamma = \frac{m}{n(b-a)^2}.$$

Da nun $\delta + \gamma = nC(b-a)^2$, so wird $\delta^2 - \gamma^2 = mC$. Überdieß muß man haben $\alpha\gamma = \beta^2 - mA$, d. h.

$$\alpha\gamma = n^2 B^2 (b-a)^4 - n^2 A (b-a)^2 (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})^2, \text{ oder}$$

$$\alpha\gamma = n^2 (b-a)^2 [B^2 (b-a)^2 - A(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})^2].$$

Da aber für $x = 0$, wird $y = b$, so wird auch

$$\alpha = -2\beta(a+b) - \gamma(a^2 + b^2) - 2\delta ab, \text{ also}$$

$$\alpha = n(a-b)^2 [A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}];$$

und daher verwandelt sich unsere angenommene Gleichung in

$$(b-a)^2 [A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$
$$+ 2B(b-a)^2(x+y) - [A + B(a+b) + Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}](x^2+y^2)$$
$$+ 2[A + B(a+b) + C(a^2 - ab + b^2) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}]xy = 0.$$

Anmerkung 2.

§. 584. Setzt man $\beta = 0$, damit die Gleichung von der Form $\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$ wird, so hat man

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{[-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2)x^2]}}{\gamma}.$$

Setzt man nun

$$-\alpha\gamma = mA \quad \text{und} \quad \delta^2 - \gamma^2 = mC, \text{ so wird}$$

$$\gamma y + \delta x = \sqrt{m(A + Cx^2)}, \text{ und}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = 0,$$

deren vollständiges Integrale die vorgelegte Gleichung selbst ist, für welche man hat $\frac{C}{A} = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\alpha\gamma}$ oder $\delta = \sqrt{\left(\gamma^2 - \frac{\alpha\gamma C}{A}\right)}$. Soll aber für $x = 0$, $y = b$ werden, so wird wegen $\gamma b = \sqrt{mA}$, $\gamma = \frac{\sqrt{mA}}{b}$, also $\alpha = -b\sqrt{mA}$ und $\delta = \sqrt{\left(\frac{mA}{b^2} + mC\right)}$. Wir haben demnach die Gleichung

$$\frac{y\sqrt{mA}}{b} + \frac{x\sqrt{m(A + Cb^2)}}{b} = \sqrt{m(A + Cx^2)}, \text{ welche gibt}$$

$$y = -x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}},$$

und dieses ist das vollständige Integrale jener Differenzialgleichung.

Nimmt man aber das x negativ, so ist von dieser Differenzial-
eichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}}$$

s vollständige Integrale

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}.$$

Wenn man auf ähnliche Weise die Rechnung im Allgemeinen be-
andelt, so entspricht der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cy^2)}} = o,$$

enn man Kürze halber $\sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)} = \mathfrak{B}$ setzt, als voll-
indiges Integrale

$$y\left(\sqrt{A} + \frac{Bb}{\sqrt{A} - \mathfrak{B}}\right) + x\left(\mathfrak{B} + \frac{Bb}{\sqrt{A} - \mathfrak{B}}\right) =$$

$$= \frac{Bb^2}{\sqrt{A} - \mathfrak{B}} + b\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)},$$

oraus der vorige Fall sogleich hervorgeht, wenn man $B = o$ setzt.
llein mit Hülfe einer leichten Substitution lassen sich diese Formeln,
welchen B vorkömmt, auf jenen Fall zurückführen, wo $B = o$ ist.

Aufgabe 75.

§. 585. Bezeichnet $\Pi(z)$ jene Function von z, welche
urch Integration der Formel $\int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2)}}$ gefunden
ird, wobey das Integrale so genommen wurde, daß
s für $z = o$ verschwindet, so soll man die entstande-
en Functionen mit einander vergleichen.

Auflösung.

Man betrachte die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}}.$$

Da nun vermöge der Voraussetzung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = \Pi(x) \quad \text{und} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = \Pi(y),$$

enn beyde Integralien so genommen werden, daß jenes für $x = o$,
nd dieses für $y = o$ verschwindet, so ist das vollständige Integrale

$$\Pi(y) = \Pi(x) + C.$$

Wir haben aber früher gesehen, daß dieses Integrale

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}$$

sey, wo $y = b$ für $x = o$ wird; da nun $\Pi(o) = o$, so behält man

$$\Pi(y) = \Pi(x) + \Pi(b),$$

welcher transcendenten Gleichung folgende algebraische entspricht:

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}.$$

Eben so wird, so bald man b negativ nimmt, die Gleichung

$$\Pi(y) = \Pi(x) - \Pi(b)$$

übereinstimmen mit folgender:

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} - b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}},$$

und so läßt sich sowohl die Summe, als auch die Differenz zweyer solcher Functionen durch eine ähnliche Function ausdrücken. Unterscheidet man nicht zwischen veränderlichen und constanten Größen, so lange $\Pi(z)$ eine bestimmte Function von z bezeichnet, wenn nämlich

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2)}}$$

ist, welche unserer Annahme gemäß für $z = o$ verschwinden soll, so daß nach unserer Bezeichnungsweise

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q),$$

so muß

$$r = p\sqrt{\frac{A + Cq^2}{A}} + q\sqrt{\frac{A + Cp^2}{A}}$$

werden. Damit aber

$$\Pi(r) = \Pi(p) - \Pi(q)$$

werde, muß

$$r = p\sqrt{\frac{A + Cq^2}{A}} - q\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)}$$

seyn. Befreyt man diese Gleichungen von der Irrationalität, so erhält man zwischen p, q, r folgende Gleichung:

$$p^4 + q^4 + r^4 - 2p^2q^2 - 2p^2r^2 - 2q^2r^2 = \frac{4Cp^2q^2r^2}{A},$$

deren Form die besondere Eigenschaft lehrt, daß, wenn p, q, r die Seiten irgend eines Dreyecks sind, und diesem ein Kreis umschrieben wird, dessen Durchmesser wir $= T$ setzen wollen, immer $A + CT^2 = o$

werde. Jene Gleichung aber entspricht, weil sie mehrere Wurzeln enthält, folgender Relation:

$$\Pi(p) \pm \Pi(q) \pm \Pi(r) = 0.$$

Zusatz 1.

§. 586. Hieraus ergibt sich sogleich die bekannte Vergleichung zwischen den Kreisbogen, wenn man $A = 1$ und $C = -1$ setzt, denn dann wird

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = \text{arc. sin. } z, \text{ und damit}$$

$$\text{arc. sin. } r = \text{arc. sin. } p + \text{arc. sin. } q \text{ werde, muß}$$

$$r = p\sqrt{(1 - q^2)} + q\sqrt{(1 - p^2)}$$

seyn; damit aber

$$\text{arc. sin. } r = \text{arc. sin. } p - \text{arc. sin. } q$$

werde, muß bekanntlich

$$r = p\sqrt{(1 - q^2)} - q\sqrt{(1 - p^2)} \text{ seyn.}$$

Zusatz 2.

§. 587. Wenn $A = 1$ und $C = 1$ ist, so wird

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)}} = l(z + \sqrt{(1 + z^2)}).$$

Damit demnach

$$l(r + \sqrt{(1 + r^2)}) = l(p + \sqrt{(1 + p^2)}) + l(q + \sqrt{(1 + q^2)})$$

werde, wird

$$r = p\sqrt{(1 + q^2)} + q\sqrt{(1 + p^2)}.$$

Damit aber

$$l(r + \sqrt{(1 + r^2)}) = l(p + \sqrt{(1 + p^2)}) - l(q + \sqrt{(1 + q^2)})$$

werde, muß man, wie aus der Natur der Logarithmen sich selbst ergibt

$$r = p\sqrt{(1 + q^2)} - q\sqrt{(1 + p^2)} \text{ setzen.}$$

Zusatz 3.

§. 588. Setzen wir in der ersten allgemeinen Formel $q = p$, so daß

$$\Pi(r) = 2\Pi(p) \text{ werde, so ist}$$

$$r = 2p\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)}.$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$ny = \tfrac{1}{2}bc - na + n(c - \tfrac{1}{2}b)x \pm (c + nx)\sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a\ldots}$$

Zusatz 3.

§. 577. Für die Differenzialgleichung

$$\frac{n\,dx\,(1 + y^2)\sqrt{(1 + y^2)}}{\sqrt{(1 + x^2)}} + (x - y)\,dy = 0$$

haben wir den integrirenden Factor §. 489 angegeben, und hieraus ergibt sich als particuläres Integrale die Gleichung

$$x - y + n\sqrt{(1 + x^2)}\,(1 + y^2) = 0, \text{ oder}$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = n^2 + n^2x^2 + n^2y^2 + n^2x^2y^2,$$

woraus $y = \dfrac{x \pm n(1 + x^2)\sqrt{(1 - n^2)}}{1 - n^2(1 + x^2)}$ gefunden wird.

Zusatz 4.

§. 578. Für die Differenzialgleichung

$$dy + y^2dx - \frac{a\,dx}{x^4} = 0$$

fanden wir §. 491 den Multiplicator $\dfrac{x^2}{x^2(1 - xy)^2 - a}$, woraus wir $x^2(1 - xy)^2 - a = 0$ als particuläres Integrale folgern, woraus endlich $x(1 - xy) = \pm\sqrt{a}$ oder $y = \dfrac{1}{x} \pm \dfrac{\sqrt{a}}{x^2}$ gefunden wird, so daß wir also zwey particuläre Integralien haben, welche aber imaginär werden, sobald a eine negative Größe bezeichnet.

Anmerkung.

§. 579. Das ist beyläufig alles, was bisher über die Behandlung der Differenzialgleichungen geschehen ist; übrigens wird uns die folgende Entwickelung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades noch einige Hülfsmittel darbiethen. Wir können aber hier noch bequem die Untersuchungen anführen, welche rücksichtlich der Vergleichungen gewisser transcendenten Formeln kürzlich angestellt worden sind. Denn so wie die Logarithmen und Kreisbogen, obgleich sie transcendente Größen sind, mit einander verglichen und eben so wie algebraische Größen in der Rechnung behandelt werden können, eben so lassen sich auch gewisse transcendente Größen einer höhern Art mit einander vergleichen, jene nämlich, welche in der Formel $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)}}$,

dern auch

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)} = \frac{C}{A}pq + \sqrt{\left(1+\frac{C}{A}p^2\right)\left(1+\frac{C}{A}q^2\right)}.$$

Man setze Kürze halber $\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}p^2\right)} = P$ und nehme $= p$, damit

$$\Pi(r) = 2\,\Pi(p)$$

rde, so erhält man

$$r = 2Pp \quad \text{und} \quad \sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)} = \frac{C}{A}p^2 + P^2,$$

lcher Werth von r für q genommen, die Gleichung

$$\Pi(r) = 3\,\Pi(p)$$

t, wobey

$$r = \frac{C}{A}p^3 + 3P^2p, \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)} = 3\frac{C}{A}Pp^2 + P^3.$$

Nimmt man diesen Werth von r abermals für q, so erhält man

$$\Pi(r) = 4\,\Pi(p), \text{ wobey}$$

$$r = 4\frac{C}{A}Pp^3 + 4P^3p, \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)} = \frac{C^2}{A^2}p^4 + \frac{6C}{A}P^2p^2 + P^4.$$

Setzt man statt q wieder diesen Werth von r, so erhält man

$$\Pi(r) = 5\,\Pi(p), \text{ und hiebey ist}$$

$$r = \frac{C^2}{A^2}p^5 + \frac{10C}{A}P^2p^3 + 5P^4p, \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)} = \frac{5C^2}{A^2}Pp^4 + \frac{10C}{A}P^3p^2 + P^5.$$

Hieraus können wir nun allgemein schließen, daß wenn

$\Pi(r) = n\,\Pi(p)$ werden soll, nothwendig

$$r\sqrt{\frac{C}{A}} = \tfrac{1}{2}\left(P+p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n - \tfrac{1}{2}\left(P-p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)} = \tfrac{1}{2}\left(P+p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n + \tfrac{1}{2}\left(P-p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n$$

r $$r = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P+p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P-p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n$$

n müsse.

Kapitel V.

Von der Vergleichung der transcendenten Größen, welche in der Form $\int \frac{P dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}}$ enthalten sind.

Aufgabe 74.

§. 580. Wenn zwischen x und y die algebraische Gleichung

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

Statt findet, so suche man Integralformeln von der vorgeschriebenen Form, welche mit einander verglichen werden können.

Auflösung.

Man differenzire die vorgelegte Gleichung und bestimme aus ihrem Differenziale

$$2\beta dx + 2\beta dy + 2\gamma x dx + 2\gamma y dy + 2\delta x dy + 2\delta y dx = 0$$

folgende Gleichung:

$$dx(\beta + \gamma x + \delta y) + dy(\beta + \gamma y + \delta x) = 0;$$

nun setze man

$$\beta + \gamma x + \delta y = p, \quad \text{und} \quad \beta + \gamma y + \delta x = q,$$

so erhält man aus der ersten

$$p^2 = \beta^2 + 2\beta\gamma x + 2\beta\delta y + \gamma^2 x^2 + 2\gamma\delta xy + \delta^2 y^2,$$

und wird von dieser die vorgelegte Gleichung, nachdem sie mit γ multiplicirt worden ist, nämlich

$$0 = \alpha\gamma + 2\beta\gamma x + 2\gamma\beta y + \gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2 + 2\gamma\delta xy$$

abgezogen, so erhält man

$$p^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)y + (\delta^2 - \gamma^2)y^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man auch

$$q^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma)x + (\delta^2 - \gamma^2)x^2,$$

und daher wird

$$p dx + q dy = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}{b^2 - a^2}\sqrt{m} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a}{b^2 - a^2}\sqrt{m}.$$

Die algebraische Integralgleichung ist demnach

$$(\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)x + (\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a)y = (b^2 - a^2)\sqrt{(A + Cy^2)},$$

oder

$$(\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)y + (\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a)x = (b^2 - a^2)\sqrt{(A + Cx^2)},$$

hieraus findet man y durch x so bestimmt, daß

$$y = \frac{(\mathfrak{A}a - \mathfrak{B}b)x + (b^2 - a^2)\sqrt{(A + Cx^2)}}{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a$, so erhält man, weil

$$\mathfrak{A}^2 b^2 - \mathfrak{B}^2 a^2 = A(b^2 - a^2) \text{ und}$$

$$(\mathfrak{A}a - \mathfrak{B}b)(\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a) = (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)ab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(b^2 - a^2)$$
$$= -(b^2 - a^2)(Cab + \mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

folgende Gleichung;

$$y = -\frac{(Cab + \mathfrak{A}\mathfrak{B})x}{A} + \frac{(\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)\sqrt{(A + Cx^2)}}{A}.$$

Hieraus ergibt sich ferner:

$$(b^2 - a^2)\sqrt{(A + Cy^2)} = (\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)x - \frac{(\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a)^2}{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}x$$
$$+ \frac{(\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a)(b^2 - a^2)}{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}\sqrt{(A + Cx^2)}, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(A + Cy^2)} = -\frac{C(b^2 - a^2)}{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}x + \frac{\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a}{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}\sqrt{(A + Cx^2)}.$$

Multiplicirt man auch hier wieder Zähler und Nenner durch $\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a$, so erhält man

$$\sqrt{(A + Cy^2)} = -\frac{C(\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)}{A}x + \frac{(Cab + \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{A}\sqrt{(A + Cx^2)}.$$

Man muß aber den Werth des Ausdruckes $\sqrt{(A + Cy^2)}$ lieber auf diese Weise bestimmen, als durch Ausziehen der Wurzel, wodurch eine Zweydeutigkeit entstehen würde. Die transcendente Gleichung

$$\Pi(r) + \Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

gibt demnach folgende algebraische Bestimmung, wenn wir Kürze halber $\sqrt{(A + Cp^2)} = P$, $\sqrt{(A + Cq^2)} = Q$ und $\sqrt{(A + Cr^2)} = R$ setzen:

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q) - \Pi(r),$$

$$s = \frac{-PQr - Cpqr + PRq + QRp}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{-CPqr - CQpr + CRpq + PQR}{A} \text{ oder}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{PQR + C(Rpq - Pqr - Qpr)}{A}.$$

Zusatz 1.

§. 591. Weil der Voraussetzung gemäß $\Pi(f) = 0$ ist, so finden wir, wenn Kürze halber $\sqrt{(A + Cf^2)} = F$ und $r = f$, also $R = F$ gesetzt wird, aus der Gleichung

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

folgende Bestimmungen:

$$s = \frac{F(Pq + Qp) - PQf - Cfpq}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{FPQ + CFpq - Cf(Pq + Qp)}{A}.$$

Zusatz 2.

§. 592. Wenn wir $q = f$ und $Q = F$ setzen, damit $\Pi(q) = 0$ werde, so erhalten wir aus der Gleichung

$$\Pi(s) = \Pi(p) - \Pi(r)$$

folgende Relationen:

$$s = \frac{F(Rp - Pr) + fPR - Cfpr}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{FPR - CFpr + Cf(Rp - Pr)}{A}.$$

Zusatz 3.

§. 593. Wenn $C = 0$ und $A = 1$ ist, so wird

$$\Pi(z) = \int dz = z - f,$$

weil das Integrale so genommen werden muß, daß es für $z = f$ verschwindet, dann würde also $P = 1$, $Q = 1$ und $R = 1$. Damit demnach

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q) - \Pi(r), \text{ oder}$$
$$s = p + q - r \text{ werde, muß}$$
$$s = -r + q + p \quad \text{und} \quad \sqrt{(1 + 0 \cdot s^2)} = 1$$

seyn, wie für sich klar ist.

Zusatz 4.

§. 594. Setzt man $A = 1$ und $C = -1$, also $\Pi(z) = \text{arc.cos.}\, z$, damit $f = 1$ werde, so erhält man

$\text{arc.cos.}\, s = \text{arc.cos.}\, p + \text{arc.cos.}\, q - \text{arc.cos.}\, r$, wenn

$$s = pqr - PQr + PRq + QRp \text{ und}$$

$$\sqrt{(1 - s^2)} = PQR + Pqr + Qpr - Rpq$$

genommen wird. Setzen wir daher $r = 1$, damit $R = 0$ und $\text{arc.cos.}\, r = 0$ werde, so finden wir

$$s = pq - PQ \quad \text{und} \quad \sqrt{(1 - s^2)} = Pq + Qp.$$

Anmerkung.

§. 595. Hieraus ergeben sich die bekannten Regeln für die Cosinusse, welche wir nicht weiter verfolgen wollen. Allein der leichteste Fall, wenn nämlich $A = 0$ und $C = 1$, also $\Pi(z) = \int \frac{dz}{z} = lz$, wobey $f = 1$ ist, scheint besondere Schwierigkeiten darzubiethen, weil die Ausdrücke für s und $\sqrt{(A + Cz^2)} = z$ ins Unendliche übergehen. Um nun diesem Übelstande zu begegnen, betrachte man zuerst A als unendlich klein, so wird $P = \sqrt{(p^2 + A)} = p + \frac{A}{2p}$, $Q = q + \frac{A}{2q}$, $R = r + \frac{A}{2r}$.

Damit nun $ls = lp + lq - lr$ werde, muß

$$As = -r\left(p + \frac{A}{2p}\right)\left(q + \frac{A}{2q}\right) + pqr$$

$$+ q\left(p + \frac{A}{2p}\right)\left(r + \frac{A}{2r}\right) + p\left(q + \frac{A}{2q}\right)\left(r + \frac{A}{2r}\right),$$

oder wenn die einzelnen Glieder entwickelt werden,

$$As = -\frac{Aqr}{2p} - \frac{Apr}{2q} + \frac{Aqr}{2p} + \frac{Apq}{2r} + \frac{Apr}{2q} + \frac{Apq}{2r},$$

oder $s = \frac{pq}{r}$ genommen werden, wie auch die Natur der Logarithmen es erfordert. Übrigens ergibt sich aus den gefundenen Formeln die Multiplication solcher transcendenten Functionen ohne Schwierigkeit. Wäre z. B. $\Pi(y) = n\,\Pi(x)$, so läßt sich die zwischen x und y Statt findende Relation algebraisch darstellen.

$$\sqrt{m} = \frac{n(b-a)\,\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}} = n(b-a)(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}),$$

$\beta = 2B(b-a)^2$, also $\delta - \gamma = \frac{m}{n(b-a)^2}$.

Da nun $\delta + \gamma = nC(b-a)^2$, so wird $\delta^2 - \gamma^2 = mC$. Überdieß muß man haben $\alpha\gamma = \beta^2 - mA$, d. h.

$$\alpha\gamma = n^2 B^2 (b-a)^4 - n^2 A (b-a)^2 (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^2, \text{ oder}$$

$$\alpha\gamma = n^2 (b-a)^2 [B^2 (b-a)^2 - A(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^2].$$

Da aber für $x=0$, wird $y=b$, so wird auch

$$\alpha = -2\beta(a+b) - \gamma(a^2+b^2) - 2\delta ab, \text{ also}$$

$$\alpha = n(a-b)^2 [A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}];$$

und daher verwandelt sich unsere angenommene Gleichung in

$$(b-a)^2 [A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$
$$+ 2B(b-a)^2(x+y) - [A+B(a+b)+Cab-\mathfrak{A}\mathfrak{B}](x^2+y^2)$$
$$+ 2[A + B(a+b) + C(a^2-ab+b^2) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}]\,xy = 0.$$

Anmerkung 2.

§. 584. Setzt man $\beta = 0$, damit die Gleichung von der Form $\alpha + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy = 0$ wird, so hat man

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{[-\alpha\gamma + (\delta^2-\gamma^2)x^2]}}{\gamma}.$$

Setzt man nun

$$-\alpha\gamma = mA \text{ und } \delta^2 - \gamma^2 = mC, \text{ so wird}$$
$$\gamma y + \delta x = \sqrt{m(A + Cx^2)}, \text{ und}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A+Cy^2)}} = 0,$$

deren vollständiges Integrale die vorgelegte Gleichung selbst ist, für welche man hat $\frac{C}{A} = \frac{\gamma^2-\delta^2}{\alpha\gamma}$ oder $\delta = \sqrt{\left(\gamma^2 - \frac{\alpha\gamma C}{A}\right)}$.

Soll aber für $x=0$, $y=b$ werden, so wird wegen $\gamma b = \sqrt{mA}$, $\gamma = \frac{\sqrt{mA}}{b}$, also $\alpha = -b\sqrt{mA}$ und $\delta = \sqrt{\left(\frac{mA}{b^2} + mC\right)}$.

Wir haben demnach die Gleichung

$$\frac{y\sqrt{mA}}{b} + \frac{x\sqrt{m(A+Cb^2)}}{b} = \sqrt{m(A+Cx^2)}, \text{ welche gibt}$$

$$y = -x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}},$$

und dieses ist das vollständige Integrale jener Differenzialgleichung.

Nimmt man aber das x negativ, so ist von dieser Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}}$$

das vollständige Integrale

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}.$$

Wenn man auf ähnliche Weise die Rechnung im Allgemeinen behandelt, so entspricht der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cy^2)}} = o,$$

wenn man Kürze halber $\sqrt{(A + 2Bb + Cb^2)} = \mathfrak{B}$ setzt, als vollständiges Integrale

$$y\left(\sqrt{A} + \frac{Bb}{\sqrt{A} - \mathfrak{B}}\right) + x\left(\mathfrak{B} + \frac{Bb}{\sqrt{A} - \mathfrak{B}}\right) =$$
$$= \frac{Bb^2}{\sqrt{A} - \mathfrak{B}} + b\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2)},$$

woraus der vorige Fall sogleich hervorgeht, wenn man $B = o$ setzt. Allein mit Hülfe einer leichten Substitution lassen sich diese Formeln, in welchen B vorkömmt, auf jenen Fall zurückführen, wo $B = o$ ist.

Aufgabe 75.

§. 585. Bezeichnet $\Pi(z)$ jene Function von z, welche durch Integration der Formel $\int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2)}}$ gefunden wird, wobey das Integrale so genommen wurde, daß es für $z = o$ verschwindet, so soll man die entstandenen Functionen mit einander vergleichen.

Auflösung.

Man betrachte die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}}.$$

Da nun vermöge der Voraussetzung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = \Pi(x) \quad \text{und} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = \Pi(y),$$

wenn beyde Integralien so genommen werden, daß jenes für $x = o$, und dieses für $y = o$ verschwindet, so ist das vollständige Integrale

$$\Pi(y) = \Pi(x) + C.$$

Wir haben aber früher gesehen, daß dieses Integrale

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}$$

sey, wo $y = b$ für $x = o$ wird; da nun $\Pi(o) = o$, so behält man

$$\Pi(y) = \Pi(x) + \Pi(b),$$

welcher transcendenten Gleichung folgende algebraische entspricht:

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}.$$

Eben so wird, so bald man b negativ nimmt, die Gleichung

$$\Pi(y) = \Pi(x) - \Pi(b)$$

übereinstimmen mit folgender:

$$y = x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} - b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}},$$

und so läßt sich sowohl die Summe, als auch die Differenz zweyer solcher Functionen durch eine ähnliche Function ausdrücken. Unterscheidet man nicht zwischen veränderlichen und constanten Größen, so lange $\Pi(z)$ eine bestimmte Function von z bezeichnet, wenn nämlich

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2)}}$$

ist, welche unserer Annahme gemäß für $z = o$ verschwinden soll, so daß nach unserer Bezeichnungsweise

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q),$$

so muß

$$r = p\sqrt{\frac{A + Cq^2}{A}} + q\sqrt{\frac{A + Cp^2}{A}}$$

werden. Damit aber

$$\Pi(r) = \Pi(p) - \Pi(q)$$

werde, muß

$$r = p\sqrt{\frac{A + Cq^2}{A}} - q\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)}$$

seyn. Befreyt man diese Gleichungen von der Irrationalität, so erhält man zwischen p, q, r folgende Gleichung:

$$p^4 + q^4 + r^4 - 2p^2q^2 - 2p^2r^2 - 2q^2r^2 = \frac{4Cp^2q^2r^2}{A},$$

deren Form die besondere Eigenschaft lehrt, daß, wenn p, q, r die Seiten irgend eines Dreyecks sind, und diesem ein Kreis umschrieben wird, dessen Durchmesser wir $= T$ setzen wollen, immer $A + CT^2 = o$

werde. Jene Gleichung aber entspricht, weil sie mehrere Wurzeln enthält, folgender Relation:

$$\Pi(p) \pm \Pi(q) \pm \Pi(r) = 0.$$

Zusatz 1.

§. 586. Hieraus ergibt sich sogleich die bekannte Vergleichung zwischen den Kreisbogen, wenn man $A = 1$ und $C = -1$ setzt, denn dann wird

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}} = \text{arc. sin. } z\text{, und damit}$$

$$\text{arc. sin. } r = \text{arc. sin. } p + \text{arc. sin. } q \text{ werde, muß}$$

$$r = p\sqrt{(1 - q^2)} + q\sqrt{(1 - p^2)}$$

seyn; damit aber

$$\text{arc. sin. } r = \text{arc. sin. } p - \text{arc. sin. } q$$

werde, muß bekanntlich

$$r = p\sqrt{(1 - q^2)} - q\sqrt{(1 - p^2)} \text{ seyn.}$$

Zusatz 2.

§. 587. Wenn $A = 1$ und $C = 1$ ist, so wird

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)}} = l(z + \sqrt{(1 + z^2)}).$$

Damit demnach

$$l(r + \sqrt{(1 + r^2)}) = l(p + \sqrt{(1 + p^2)}) + l(q + \sqrt{(1 + q^2)})$$

werde, wird

$$r = p\sqrt{(1 + q^2)} + q\sqrt{(1 + p^2)}.$$

Damit aber

$$l(r + \sqrt{(1 + r^2)}) = l(p + \sqrt{(1 + p^2)}) - l(q + \sqrt{(1 + q^2)})$$

werde, muß man, wie aus der Natur der Logarithmen sich selbst ergibt

$$r = p\sqrt{(1 + q^2)} - q\sqrt{(1 + p^2)} \text{ setzen.}$$

Zusatz 3.

§. 588. Setzen wir in der ersten allgemeinen Formel $q = p$, so daß

$$\Pi(r) = 2\,\Pi(p) \text{ werde, so ist}$$

$$r = 2p\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)}.$$

Setzt man hier ferner

$$q = 2p\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)},$$ so wird

$$\Pi(r) = \Pi(p) + 2\Pi(p) = 3\Pi(p),$$ indem

$$r = p\sqrt{\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right)} + q\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)}$$

gesetzt wird. Es ist aber

$$\sqrt{\frac{A + Cq^2}{A}} = \sqrt{\left[1 + \frac{4Cp^2}{A}\left(1 + \frac{Cp^2}{A}\right)\right]} = 1 + \frac{2Cp^2}{A},$$

mithin muß, damit $\Pi(r) = 3\Pi(p)$ werde,

$$r = p\left(1 + \frac{2Cp^2}{A}\right) + 2p\left(1 + \frac{Cp^2}{A}\right) = 3p + \frac{4Cp^3}{A}$$

gesetzt werden.

Anmerkung.

§. 589. Um nun diese Vervielfältigung leichter fortsetzen zu können, bemerke man sich, außer der der Gleichung

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

entsprechenden Relation, welche durch die Gleichung

$$r = p\sqrt{\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right)} + q\sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)}$$

gegeben ist, noch folgende Gleichung

$$\Pi(p) = \Pi(r) - \Pi(q),$$

welcher die Relation

$$p = r\sqrt{\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right)} - q\sqrt{\left(\frac{A + Cr^2}{A}\right)}$$

entspricht. Es wird demnach

$$\sqrt{\left(\frac{A + Cr^2}{A}\right)} = \frac{r}{q}\sqrt{\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right)} - \frac{p}{q}$$

$$= \frac{p}{q}\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right) + \sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right)} - \frac{p}{q},$$ oder

$$\sqrt{\left(\frac{A + Cr^2}{A}\right)} = \frac{Cpq}{A} + \sqrt{\left(\frac{A + Cp^2}{A}\right)\left(\frac{A + Cq^2}{A}\right)}.$$

Damit also

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

sey, haben wir nicht allein

$$r = p\sqrt{\left(1 + \frac{C}{A}q^2\right)} + q\sqrt{\left(1 + \frac{C}{A}p^2\right)},$$

dern auch

$$\surd\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)=\frac{C}{A}pq+\surd\left(1+\frac{C}{A}p^2\right)\left(1+\frac{C}{A}q^2\right).$$

Man setze Kürze halber $\surd\left(1+\frac{C}{A}p^2\right)=P$ und nehme $= p$, damit

$$\Pi(r)=2\,\Pi(p)$$

rde, so erhält man

$$r=2Pp \quad \text{und} \quad \surd\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)=\frac{C}{A}p^2+P^2,$$

cher Werth von r für q genommen, die Gleichung

$$\Pi(r)=3\,\Pi(p)$$

t, wobey

$$r=\frac{C}{A}p^3+3P^2p, \text{ und}$$

$$\surd\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)=3\frac{C}{A}Pp^2+P^3.$$

Nimmt man diesen Werth von r abermals für q, so erhält man

$$\Pi(r)=4\,\Pi(p), \text{ wobey}$$

$$r=4\frac{C}{A}Pp^3+4P^3p, \text{ und}$$

$$\surd\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)=\frac{C^2}{A^2}p^4+\frac{6C}{A}P^2p^2+P^4.$$

Setzt man statt q wieder diesen Werth von r, so erhält man

$$\Pi(r)=5\,\Pi(p), \text{ und hiebey ist}$$

$$r=\frac{C^2}{A^2}p^5+\frac{10C}{A}P^2p^3+5P^4p, \text{ und}$$

$$\surd\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)=\frac{5C^2}{A^2}Pp^4+\frac{10C}{A}P^3p^2+P^5.$$

Hieraus können wir nun allgemein schließen, daß wenn

$\Pi(r)=n\,\Pi(p)$ werden soll, nothwendig

$$r\surd\frac{C}{A}=\frac{1}{2}\left(P+p\surd\frac{C}{A}\right)^n-\frac{1}{2}\left(P-p\surd\frac{C}{A}\right)^n, \text{ und}$$

$$\surd\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)=\frac{1}{2}\left(P+p\surd\frac{C}{A}\right)^n+\frac{1}{2}\left(P-p\surd\frac{C}{A}\right)^n$$

r $$r=\frac{\surd A}{2\surd C}\left(P+p\surd\frac{C}{A}\right)^n-\frac{\surd A}{2\surd C}\left(P-p\surd\frac{C}{A}\right)^n$$

n müsse.

Kapitel V.

Von der Vergleichung der transcendenten Größen, welche in der Form $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}}$ enthalten sind.

Aufgabe 74.

§. 580. Wenn zwischen x und y die algebraische Gleichung

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

Statt findet, so suche man Integralformeln von der vorgeschriebenen Form, welche mit einander verglichen werden können.

Auflösung.

Man differenzire die vorgelegte Gleichung und bestimme aus ihrem Differenziale

$$2\beta dx + 2\beta dy + 2\gamma x dx + 2\gamma y dy + 2\delta x dy + 2\delta y dx = 0$$

folgende Gleichung:

$$dx(\beta + \gamma x + \delta y) + dy(\beta + \gamma y + \delta x) = 0;$$

nun setze man

$$\beta + \gamma x + \delta y = p, \quad \text{und} \quad \beta + \gamma y + \delta x = q,$$

so erhält man aus der ersten

$$p^2 = \beta^2 + 2\beta\gamma x + 2\beta\delta y + \gamma^2 x^2 + 2\gamma\delta xy + \delta^2 y^2,$$

und wird von dieser die vorgelegte Gleichung, nachdem sie mit γ multiplicirt worden ist, nämlich

$$0 = \alpha\gamma + 2\beta\gamma x + 2\gamma\beta y + \gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2 + 2\gamma\delta xy$$

abgezogen, so erhält man

$$p^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma) y + (\delta^2 - \gamma^2) y^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man auch

$$q^2 = \beta^2 - \alpha\gamma + 2\beta(\delta - \gamma) x + (\delta^2 - \gamma^2) x^2,$$

und daher wird

$$p\,dx + q\,dy = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a}{b^2 - a^2} \sqrt{m} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\mathfrak{B} b - \mathfrak{A} a}{b^2 - a^2} \sqrt{m}.$$

Die algebraische Integralgleichung ist demnach

$$(\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a)\, x + (\mathfrak{B} b - \mathfrak{A} a)\, y = (b^2 - a^2) \sqrt{(A + C y^2)},$$

oder

$$(\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a)\, y + (\mathfrak{B} b - \mathfrak{A} a)\, x = (b^2 - a^2) \sqrt{(A + C x^2)},$$

hieraus findet man y durch x so bestimmt, daß

$$y = \frac{(\mathfrak{A} a - \mathfrak{B} b)\, x + (b^2 - a^2) \sqrt{(A + C x^2)}}{\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\mathfrak{A} b + \mathfrak{B} a$, so erhält man, weil

$$\mathfrak{A}^2 b^2 - \mathfrak{B}^2 a^2 = A\, (b^2 - a^2) \text{ und}$$

$$(\mathfrak{A} a - \mathfrak{B} b)\, (\mathfrak{A} b + \mathfrak{B} a) = (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)\, a b - \mathfrak{A} \mathfrak{B}\, (b^2 - a^2)$$
$$= -(b^2 - a^2)\, (C a b + \mathfrak{A} \mathfrak{B}),$$

folgende Gleichung:

$$y = -\frac{(C a b + \mathfrak{A} \mathfrak{B})\, x}{A} + \frac{(\mathfrak{A} b + \mathfrak{B} a) \sqrt{(A + C x^2)}}{A}.$$

Hieraus ergibt sich ferner:

$$(b^2 - a^2) \sqrt{(A + C y^2)} = (\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a)\, x - \frac{(\mathfrak{B} b - \mathfrak{A} a)^2}{\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a}\, x$$
$$+ \frac{(\mathfrak{B} b - \mathfrak{A} a)\, (b^2 - a^2)}{\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a} \sqrt{(A + C x^2)}, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(A + C y^2)} = -\frac{C\, (b^2 - a^2)}{\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a}\, x + \frac{\mathfrak{B} b - \mathfrak{A} a}{\mathfrak{A} b - \mathfrak{B} a} \sqrt{(A + C x^2)}.$$

Multiplicirt man auch hier wieder Zähler und Nenner durch $\mathfrak{A} b + \mathfrak{B} a$, so erhält man

$$\sqrt{(A + C y^2)} = -\frac{C\, (\mathfrak{A} b + \mathfrak{B} a)}{A}\, x + \frac{(C a b + \mathfrak{A} \mathfrak{B})}{A} \sqrt{(A + C x^2)}.$$

Man muß aber den Werth des Ausdruckes $\sqrt{(A + C y^2)}$ lieber auf diese Weise bestimmen, als durch Ausziehen der Wurzel, wodurch eine Zweydeutigkeit entstehen würde. Die transcendente Gleichung

$$\Pi\, (r) + \Pi\, (s) = \Pi\, (p) + \Pi\, (q)$$

gibt demnach folgende algebraische Bestimmung, wenn wir Kürze halber $\sqrt{(A + C p^2)} = P$, $\sqrt{(A + C q^2)} = Q$ und $\sqrt{(A + C r^2)} = R$ setzen:

$$\Pi\, (s) = \Pi\, (p) + \Pi\, (q) - \Pi\, (r),$$

$$s = \frac{-PQr - Cpqr + PRq + QRp}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{-CPqr - CQpr + CRpq + PQR}{A} \text{ oder}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{PQR + C(Rpq - Pqr - Qpr)}{A}.$$

Zusatz 1.

§. 591. Weil der Voraussetzung gemäß $\Pi(f) = 0$ ist, so finden wir, wenn Kürze halber $\sqrt{(A + Cf^2)} = F$ und $r = f$, also $R = F$ gesetzt wird, aus der Gleichung

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

folgende Bestimmungen:

$$s = \frac{F(Pq + Qp) - PQf - Cfpq}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{FPQ + CFpq - Cf(Pq + Qp)}{A}.$$

Zusatz 2.

§. 592. Wenn wir $q = f$ und $Q = F$ setzen, damit $\Pi(q) = 0$ werde, so erhalten wir aus der Gleichung

$$\Pi(s) = \Pi(p) - \Pi(r)$$

folgende Relationen:

$$s = \frac{F(Rp - Pr) + fPR - Cfpr}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{FPR - CFpr + Cf(Rp - Pr)}{A}.$$

Zusatz 3.

§. 593. Wenn $C = 0$ und $A = 1$ ist, so wird

$$\Pi(z) = \int dz = z - f,$$

weil das Integrale so genommen werden muß, daß es für $z = f$ verschwindet, dann würde also $P = 1$, $Q = 1$ und $R = 1$. Damit demnach

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q) - \Pi(r), \text{ oder}$$

$$s = p + q - r \text{ werde, muß}$$

$$s = -r + q + p \text{ und } \sqrt{(1 + 0 \cdot s^2)} = 1$$

seyn, wie für sich klar ist.

Zusatz 4.

§. 594. Setzt man $A = 1$ und $C = -1$, also $\Pi(z) = \text{arc.cos.}\, z$, damit $f = 1$ werde, so erhält man

$$\text{arc.cos.}\, s = \text{arc.cos.}\, p + \text{arc.cos.}\, q - \text{arc.cos.}\, r, \text{ wenn}$$

$$s = pqr - PQr + PRq + QRp \text{ und}$$

$$\sqrt{(1 - s^2)} = PQR + Pqr + Qpr - Rpq$$

genommen wird. Setzen wir daher $r = 1$, damit $R = 0$ und $\text{arc.cos.}\, r = 0$ werde, so finden wir

$$s = pq - PQ \text{ und } \sqrt{(1 - s^2)} = Pq + Qp.$$

Anmerkung.

§. 595. Hieraus ergeben sich die bekannten Regeln für die Cosinusse, welche wir nicht weiter verfolgen wollen. Allein der leichteste Fall, wenn nämlich $A = 0$ und $C = 1$, also $\Pi(z) = \int \frac{dz}{z} = lz$, wobey $f = 1$ ist, scheint besondere Schwierigkeiten darzubiethen, weil die Ausdrücke für s und $\sqrt{(A + Cz^2)} = z$ ins Unendliche übergehen. Um nun diesem Übelstande zu begegnen, betrachte man zuerst A als unendlich klein, so wird $P = \sqrt{(p^2 + A)} = p + \frac{A}{2p}$, $Q = q + \frac{A}{2q}$, $R = r + \frac{A}{2r}$.

Damit nun $ls = lp + lq - lr$ werde, muß

$$As = -r\left(p + \frac{A}{2p}\right)\left(q + \frac{A}{2q}\right) + pqr$$

$$+ q\left(p + \frac{A}{2p}\right)\left(r + \frac{A}{2r}\right) + p\left(q + \frac{A}{2q}\right)\left(r + \frac{A}{2r}\right),$$

oder wenn die einzelnen Glieder entwickelt werden,

$$As = -\frac{Aqr}{2p} - \frac{Apr}{2q} + \frac{Aqr}{2p} + \frac{Apq}{2r} + \frac{Apr}{2q} + \frac{Apq}{2r},$$

oder $s = \frac{pq}{r}$ genommen werden, wie auch die Natur der Logarithmen es erfordert. Übrigens ergibt sich aus den gefundenen Formeln die Multiplication solcher transcendenten Functionen ohne Schwierigkeit. Wäre z. B. $\Pi(y) = n\Pi(x)$, so läßt sich die zwischen x und y Statt findende Relation algebraisch darstellen.

$$\surd m = \frac{n(b-a)\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}} = n(b-a)(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})$$

$\beta = nB(b-a)^2$, also $\delta - \gamma = \frac{m}{n(b-a)^2}$.

Da nun $\delta + \gamma = nC(b-a)^2$, so wird $\delta^2 - \gamma^2 =$
Überdieß muß man haben $\alpha\gamma = \beta^2 - mA$, d. h.

$$\alpha\gamma = n^2 B^2 (b-a)^4 - n^2 A (b-a)^2 (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^2, \text{ also}$$

$$\alpha\gamma = n^2 (b-a)^2 [B^2 (b-a)^2 - A(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^2].$$

Da aber für $x = o$, wird $y = b$, so wird auch

$$\alpha = -2\beta(a+b) - \gamma(a^2+b^2) - 2\delta ab, \text{ also}$$

$$\alpha = n(a-b)^2 [A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}],$$

und daher verwandelt sich unsere angenommene Gleichung in

$$(b-a)^2 [A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$
$$+ 2B(b-a)^2(x+y) - [A + B(a+b) + Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}](x^2+y^2)$$
$$+ 2[A + B(a+b) + C(a^2 - ab + b^2) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}]xy = o.$$

Anmerkung 2.

§. 584. Setzt man $\beta = o$, damit die Gleichung von der Form $\alpha + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy = o$ wird, so hat man

$$y = \frac{-\delta x + \surd[-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2)x^2]}{\gamma}.$$

Setzt man nun

$$-\alpha\gamma = mA \text{ und } \delta^2 - \gamma^2 = mC, \text{ so wird}$$

$$\gamma y + \delta x = \surd m(A + Cx^2), \text{ und}$$

$$\frac{dx}{\surd(A + Cx^2)} + \frac{dy}{\surd(A + Cy^2)} = o,$$

deren vollständiges Integrale die vorgelegte Gleichung selbst ist, für welche man hat $\frac{C}{A} = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\alpha\gamma}$ oder $\delta = \sqrt{\left(\gamma^2 - \frac{\alpha\gamma C}{A}\right)}$.
Soll aber für $x = o$, $y = b$ werden, so wird wegen $\gamma b = \surd mA$, $\gamma = \frac{\surd mA}{b}$, also $\alpha = -b\surd mA$ und $\delta = \sqrt{\left(\frac{mA}{b^2} + mC\right)}$.
Wir haben demnach die Gleichung

$$\frac{y\surd mA}{b} + \frac{x\surd m(A + Cb^2)}{b} = \surd m(A + Cx^2), \text{ welche g}$$

$$y = -x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}},$$

und dieses ist das vollständige Integrale jener Differenzialgleichu

wovon sich das Integrale leicht bestimmen läßt; es wird nämlich

$$V\sqrt{m} = \frac{\delta M x^2 \sqrt{m}}{\gamma^2} - \frac{M m x}{\gamma^2} \sqrt{(A + C x^2)}.$$

Weil aber

$$\sqrt{[m (A + C x^2)]} = \gamma y + \delta x$$

ist, so geht jene Gleichung über in

$$V\sqrt{m} = \frac{\delta M x^2 - \gamma M x y - \delta M x^2}{\gamma^2} \sqrt{m} = -\frac{M x y}{\gamma} \sqrt{m}.$$

Wir erhalten demnach

$$\Pi (x) + \Pi (y) = \text{Const.} - \frac{M x y}{\gamma} \sqrt{m}, \text{ wobey}$$

$\gamma y + \delta x = \sqrt{[m (A + C x^2)]}$ und $\gamma x + \delta y = \sqrt{[m (A + C y^2)]}$,
ferner $-\alpha \gamma = A m$ und $\delta^2 - \gamma^2 = C m$.

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir $y = b$ für $x = o$, damit

$$\Pi (x) + \Pi (y) = \Pi (b) - \frac{M x y}{\gamma} \sqrt{m}$$

werde; dann aber ist

$$\gamma b = \sqrt{m A} \text{ und } \delta b = \sqrt{(m A + m C b^2)}, \text{ also}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{m A}}{b} \text{ und } \delta = \frac{\sqrt{(m A + m C b^2)}}{b}$$

Hieraus schließen wir also, wenn

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{(A + C b^2)} = b\sqrt{(A + C x^2)},$$

oder was dasselbe ist:

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{(A + C b^2)} = b\sqrt{(A + C y^2)},$$

auf die Existenz folgender Gleichung:

$$\Pi (x) + \Pi (y) = \Pi (b) - \frac{M b x y}{\sqrt{A}},$$

wobey Π eine solche Function der nachstehenden Veränderlichen bezeichnet, daß $\Pi (z) = \int \frac{d z (L + M z^2)}{\sqrt{(A + C z^2)}}$ wird, welches Integrale aber so genommen werden muß, daß es für $z = o$ verschwindet. Nachdem wir nun die Natur dieser Functionen festgesetzt haben, wollen wir von dem Unterschiede zwischen der Constanten und Veränderlichen abstrahiren, so daß

$$\Pi (r) = \Pi (p) + \Pi (q) + \frac{M p q r}{\sqrt{A}} \text{ wird, wenn}$$

$$q\sqrt{A} + p\sqrt{(A + C r^2)} = r\sqrt{(A + C p^2)} \text{ und}$$
$$p\sqrt{A} + q\sqrt{(A + C r^2)} = r\sqrt{(A + C q^2)}, \text{ also}$$

$$r = \frac{p\sqrt{(A + Cq^2)} + q\sqrt{(A + Cp^2)}}{\sqrt{A}} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cr^2)} = \frac{Cpq + \sqrt{(A + Cp^2)(A + Cq^2)}}{\sqrt{A}} \text{ ist.}$$

Zusatz 1.

§. 597. Nimmt man z negativ, so wird

$$\Pi(-z) = -\Pi(z);$$

werden daher die Größen p und q negativ genommen, so erhält man

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = \frac{Cpqr}{\sqrt{A}}, \text{ wenn}$$

$$p\sqrt{A} + q\sqrt{(A + Cr^2)} + r\sqrt{(A + Cq^2)} = 0, \text{ oder}$$
$$q\sqrt{A} + p\sqrt{(A + Cr^2)} + r\sqrt{(A + Cp^2)} = 0, \text{ oder}$$
$$r\sqrt{A} + p\sqrt{(A + Cq^2)} + q\sqrt{(A + Cp^2)} = 0, \text{ oder}$$
$$Cpq - \sqrt{[A(A + Cr^2)]} + \sqrt{(A + Cp^2)(A + Cq^2)} = 0,$$

woraus sich folgende Relation ergibt:

$$Cpqr + p\sqrt{(A + Cq^2)(A + Cr^2)} + q\sqrt{(A + Cp^2)(A + Cr^2)} + r\sqrt{(A + Cp^2)(A + Cq^2)} = 0.$$

Zusatz 2.

§. 598. Nach dieser Methode lassen sich demnach drey Functionen von der Form $\Pi(z)$ darstellen, deren Summe eines algebraischen Ausdruckes fähig ist. Was wir oben von dieser Summe gezeigt haben, gilt auch von der Summe zweyer, weniger der dritten Function.

Zusatz 3.

§. 599. Wird $L = A$ und $M = C$ gesetzt, so bezeichnet die vorgelegte Function $\Pi(z) = \int dz\sqrt{(A + Cz^2)}$ den Flächeninhalt einer Curve, zu deren Abscisse z die Größe $\sqrt{(A + Cz^2)}$ als Ordinate gehört, und die Summe dreyer solcher Flächenräume stellt sich in algebraischer Form auf folgende Art dar:

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = \frac{Cpqr}{\sqrt{A}},$$

wenn zwischen p, q, r die obige Relation festgesetzt ist.

Anmerkung.

§. 600. Diese Eigenschaft verdanken wir dem Umstande, daß das Differenziale dV die Integration zuließ. Da nämlich

$$d V \sqrt{m} = \frac{M d x (x^2 - y^2)}{\sqrt{(A + C x^2)}}$$ und

$\sqrt{[m (A + C x^2)]} = \gamma y + \delta x$ war, so wird

$$d V = \frac{M d x (x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x},$$

von das Integrale mit Hülfe der angenommenen Gleichung

$$\alpha + \gamma (x^2 + y^2) + 2 \delta x y = 0$$

ht bestimmt werden kann. Denn man setze nur

$x^2 + y^2 = t^2$ und $x y = u$, so wird

$$\alpha + \gamma t^2 + 2 \delta u = 0,$$

d durch Differenziation

$$x d x + y d y = t d t,$$
$$x d y + y d x = d u \text{ und}$$
$$\gamma t d t + \delta d u = 0.$$

Aus den beyden ersten Gleichungen ergibt sich

$(x^2 - y^2) d x = x t d t - y d u$, und weil

$t d t = - \delta \frac{d u}{\gamma}$, so wird

$$(x^2 - y^2) d x = - \frac{d u}{\gamma} (\delta x + \gamma y),$$

daß demnach

$$\frac{d x (x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x} = - \frac{d u}{\gamma},$$ und daher

$$d V = - \frac{M d u}{\gamma}$$

rd. Hieraus folgt nun offenbar

$$V = - \frac{M u}{\gamma} = - \frac{M x y}{\gamma},$$

e wir in der Auflösung auf einem weit mühsameren Wege gefunden ben. Diese Operation findet jedoch eine bequeme Anwendung in der lgenden Aufgabe, wo wir zusammengesetztere Formeln betrachten ollen.

Aufgabe 78.

§. 601. Es sey

$$\Pi (z) = \int \frac{d z (L + M z^2 + N z^4 + O z^6 + \text{etc.})}{\sqrt{(A + C z^2)}},$$

elches Integrale so bestimmt werden soll, daß es für $= 0$ verschwindet. Man soll die hieraus sich erge-

beyden transcendenten Functionen mit einander vergleichen.

Auflösung.

Es finde wie früher zwischen den Größen x und y die Relation

$$\alpha + \gamma (x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

Statt, und es sey

$$-\alpha\gamma = Am \quad \text{und} \quad \delta^2 - \gamma^2 = Cm, \text{ so wird}$$

$$\gamma y + \delta x = \sqrt{[m(A + Cx^2)} \text{ und } \gamma x + \delta y = \sqrt{[m(A + Cy^2)]},$$

durch Differenziation erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = 0,$$

und man setze

$$\frac{dx(L + Mx^2 + Nx^4 + Ox^6)}{\sqrt{(A + Cx^2)}} + \frac{dy(L + My^2 + Ny^4 + Oy^6)}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = dV\sqrt{m},$$

damit

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} + V\sqrt{m}$$

werde. Es ist aber

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = -\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}},$$

und daher geht jene Gleichung über in folgende:

$$\frac{dx[M(x^2 - y^2) + N(x^4 - y^4) + O(x^6 - y^6)]}{\sqrt{(A + Cx^2)}} = dV\sqrt{m},$$

oder weil $\sqrt{[m(A + Cx^2)]} = \gamma y + \delta x$ ist, in folgende:

$$\frac{dx(x^2 - y^2)[M + N(x^2 + y^2) + O(x^4 + x^2y^2 + y^4)]}{\gamma y + \delta x} = dV.$$

Nun sey $x^2 + y^2 = t^2$ und $xy = u$, so daß

$$\alpha + \gamma t^2 + 2\delta u = 0 \quad \text{und} \quad \gamma t dt + \delta du = 0, \text{ oder}$$

$$t dt = -\frac{\delta du}{\gamma} \text{ wird, und weil}$$

$$x dx + y dy = t dt \quad \text{und} \quad x dy + y dx = du,$$

so folgern wir hieraus

$$(x^2 - y^2) dx = xt dt - y du = -\frac{du}{\gamma}(\gamma y + \delta x),$$

und daher $\frac{dx(x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x} = -\frac{du}{\gamma}$; hieraus folgt

$$dV = -\frac{du}{\gamma}[M + N(x^2 + y^2) + O(x^4 + x^2y^2 + y^4)].$$

ern auch

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)}=\frac{C}{A}pq+\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}p^2\right)\left(1+\frac{C}{A}q^2\right)}.$$

Man setze Kürze halber $\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}p^2\right)}=P$ und nehme $=p$, damit

$$\Pi(r)=2\,\Pi(p)$$

de, so erhält man

$$r=2Pp \quad \text{und} \quad \sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)}=\frac{C}{A}p^2+P^2,$$

cher Werth von r für q genommen, die Gleichung

$$\Pi(r)=3\,\Pi(p)$$

t, wobey

$$r=\frac{C}{A}p^3+3P^2p, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)}=3\frac{C}{A}Pp^2+P^3.$$

Nimmt man diesen Werth von r abermals für q, so erhält man

$$\Pi(r)=4\,\Pi(p), \text{ wobey}$$

$$r=4\frac{C}{A}Pp^3+4P^3p, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)}=\frac{C^2}{A^2}p^4+\frac{6C}{A}P^2p^2+P^4.$$

Setzt man statt q wieder diesen Werth von r, so erhält man

$$\Pi(r)=5\,\Pi(p), \text{ und hiebey ist}$$

$$r=\frac{C^2}{A^2}p^5+\frac{10C}{A}P^2p^3+5P^4p, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)}=\frac{5C^2}{A^2}Pp^4+\frac{10C}{A}P^3p^2+P^5.$$

Hieraus können wir nun allgemein schließen, daß wenn

$$\Pi(r)=n\,\Pi(p) \text{ werden soll, nothwendig}$$

$$r\sqrt{\frac{C}{A}}=\frac{1}{2}\left(P+p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n-\frac{1}{2}\left(P-p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n, \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{C}{A}r^2\right)}=\frac{1}{2}\left(P+p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n+\frac{1}{2}\left(P-p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n$$

r $r=\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P+p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n-\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P-p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n$

n müsse.

so daß also unsere Gleichung sich in folgender Form darstellt:

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}-\frac{Nb^3xy}{\sqrt{A}}+\frac{Nbx^2y^2}{A}\sqrt{(A+Cb^2)}$$
$$-\frac{Ob^5xy}{\sqrt{A}}+\frac{2Ob^3x^2y^2}{A}\sqrt{(A+Cb^2)}-\frac{Obx^3y^3}{3A\sqrt{A}}(3A+4Cb^2).$$

Zusatz 1.

§. 602. Setzen wir $b=r$, $x=-p$, $y=-q$, so wird unsere Gleichung

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{pqr}{\sqrt{A}}(M+Nr^2+Or^4)-$$
$$\frac{p^2q^2\sqrt{(A+Cr^2)}}{A}(Nr+2Or^3)+\frac{Op^3q^3r}{3A\sqrt{A}}(3A+4Cr^2),$$

wobey $p^2+q^2=r^2-\frac{2pq}{\sqrt{A}}\sqrt{(A+Cr^2)}$,

und daher wird

$$\frac{\sqrt{(A+Cr^2)}}{\sqrt{A}}=\frac{r^2-p^2-q^2}{2pq}.$$

Zusatz 2.

§. 603. Substituirt man diesen für $\frac{\sqrt{(A+Cr^2)}}{\sqrt{A}}$ gefundenen Werth, so erhält man folgende Gleichung, in welcher die drey Größen p, q, r gleichmäßig verbunden erscheinen:

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2\sqrt{A}}(p^2+q^2+r^2)$$
$$+\frac{Opqr}{3\sqrt{A}}(p^4+q^4+r^4+p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2),$$

welcher Gleichung die oben (§. 602) gegebenen Formeln Genüge leisten, oder auch nachstehende rationale Gleichung

$$\frac{4Cp^2q^2r^2}{A}=p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2-2r^2q^2.$$

Zusatz 3.

§. 604. Hätten wir dem Zähler der Integralformel noch das Glied Pz^8 beygefügt, damit

$$\Pi(z)=\int\frac{dz(L+Mz^2+Nz^4+Oz^6+Pz^8)}{\sqrt{(A+Cz^2)}}$$

wäre, so würde zu der eben gefundenen Gleichung noch folgendes Glied hinzugekommen seyn:

$$\frac{Ppqr}{4\sqrt{A}}(p^6+q^6+r^6+p^2q^4+p^2r^4+p^4q^2+p^4r^2$$
$$+q^4r^2+q^2r^4+\tfrac{4}{3}p^2q^2r^2).$$

Anmerkung.

§. 605. Diese Relationen hätten wir auch aus den obigen Re-
ctionen ableiten können, denn da $\Pi(z) = E\int\frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2)}} +$
iner algebraischen Größe, so wird, wenn hier für z nach
nd nach die Größen p, q, r gesetzt werden, welche so von einan-
er abhängen, wie wir oben erklärt haben,

$$\int\frac{dp}{\sqrt{(A + Cp^2)}} + \int\frac{dq}{\sqrt{(A + Cq^2)}} + \int\frac{dr}{\sqrt{(A + Cr^2)}} = 0,$$

nd hieraus schließen wir auf die Gleichung

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = f(p) + f(q) + f(r),$$

obey f irgend eine algebraische Function der nachfolgenden Größe
zeichnet. Die Summe dieser drey Functionen reducirt sich auf den
orhin gefundenen Ausdruck, so bald auf die zwischen p, q, r Statt
ndende Relation Rücksicht genommen wird; man müßte nämlich die
röße C eliminiren. Diese Reduction würde jedoch eine ungeheure
rbeit erfordern. Hier verdient die eben gebrauchte Methode eine vor-
igliche Würdigung, welche zu einer weit schwierigeren Untersuchung
e Bahn zu brechen scheint, indem sie ganz einfach ist. Eine Ver-
leichung zwischen den transcendenten Functionen, welche wir in dem
ächsten Kapitel betrachten wollen, scheint auf einem anderen Wege
ium möglich zu seyn, und daher wird der Nutzen dieser Methode in
em nächsten Kapitel vorzüglich in die Augen springen.

$$s = \frac{-PQr - Cpqr + PRq + QRp}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{-CPqr - CQpr + CRpq + PQR}{A} \text{ o[der]}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{PQR + C(Rpq - Pqr - Qpr)}{A}.$$

Zusatz 1.

§. 591. Weil der Voraussetzung gemäß $\Pi(f) = 0$ ist, so f[in]den wir, wenn Kürze halber $\sqrt{(A + Cf^2)} = F$ und $r = f$, al[so] $R = F$ gesetzt wird, aus der Gleichung

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

folgende Bestimmungen:

$$s = \frac{F(Pq + Qp) - PQf - Cfpq}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{FPQ + CFpq - Cf(Pq + Qp)}{A}.$$

Zusatz 2.

§. 592. Wenn wir $q = f$ und $Q = F$ setzen, damit $\Pi(q) =$ [o] werde, so erhalten wir aus der Gleichung

$$\Pi(s) = \Pi(p) - \Pi(r)$$

folgende Relationen:

$$s = \frac{F(Rp - Pr) + fPR - Cfpr}{A} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cs^2)} = \frac{FPR - CFpr + Cf(Rp - Pr)}{A}.$$

Zusatz 3.

§. 593. Wenn $C = 0$ und $A = 1$ ist, so wird

$$\Pi(z) = \int dz = z - f,$$

weil das Integrale so genommen werden muß, daß es für $z = f$ [ver]schwindet, dann würde also $P = 1$, $Q = 1$ und $R = 1$. Da demnach

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q) - \Pi(r), \text{ oder}$$
$$s = p + q - r \text{ werde, muß}$$
$$s = -r + q + p \text{ und } \sqrt{(1 + 0 \cdot s^2)} = 1$$

seyn, wie für sich klar ist.

Wäre also umgekehrt diese Differenzialgleichung gegeben, so würde ihr Genüge geleistet durch die endliche Gleichung

$$-Am + \gamma^2(x^2+y^2) + 2xy\sqrt{(\gamma^4 + Cm\gamma^2 + AEm^2)} - Emx^2y^2 = o,$$

oder wenn man $\frac{\gamma^2}{m} = k$ setzt, durch folgende:

$$-A + k(x^2+y^2) + 2xy\sqrt{(k^2 + kC + AE)} - Ex^2y^2 = o,$$

und da diese die Constante k enthält, welche in der Differenzialgleichung nicht erscheint, so ist sie zugleich das vollständige Integrale. Man erhält hieraus aber

$$ky + x\sqrt{(k^2+kC+AE)} - Ex^2y = \sqrt{k}(A+Cx^2+Ex^4) \text{ und}$$
$$kx + y\sqrt{(k^2+kC+AE)} - Exy^2 = \sqrt{k}(A+Cy^2+Ey^4).$$

Zusatz 1.

§. 607. Die Constante k läßt sich so bestimmen, daß $y=b$ für $x=o$ wird, und daher erhält man

$$bk = \sqrt{Ak} \text{ und } b\sqrt{(k^2+kC+AE)} = \sqrt{k}(A+Cb^2+Eb^4),$$

und daher

$$k = \frac{A}{b^2} \text{ und } \sqrt{(k^2+kC+AE)} = \frac{1}{b^2}\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)},$$

und demnach erhalten wir

$$Ay + x\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)} - Eb^2x^2y = b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}$$

und

$$Ax + y\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)} - Eb^2xy^2 = b\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)}.$$

Zusatz 2.

§. 608. Diese zwischen x und y bestehende endliche Relation ist demnach das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cx^2+Ex^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A+Cy^2+Ey^4)}} = o,$$

oder wenn man diese Gleichung in Bezug auf x und y rational darstellt:

$$A(x^2+y^2-b^2) + 2xy\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)} - Eb^2x^2y^2 = o.$$

Zusatz 3.

§. 609. Drückt man also y durch x aus, so findet man

$$y = \frac{b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)} - x\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}}{A-Eb^2x^2},$$

Aufgabe 77.

§. 596. Wenn $\Pi(z) = \int \frac{dz\,(L + Mz^2)}{\sqrt{(A + Cz^2)}}$ so bestimmt wird, daß es für $z = 0$ verschwindet, so ergeben sich transcendente Functionen, welche mit einander verglichen werden sollen.

Auflösung.

Man setze, daß zwischen der Veränderlichen x und y folgende Relation

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

bestehe, so wird

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{[-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2)x^2]}}{\gamma}.$$

Nun setze man $-\alpha\gamma = Am$ und $\delta^2 - \gamma^2 = Cm$, so wird

$$\gamma y + \delta x = \sqrt{[m(A + Cx^2)]} \text{ und}$$

$$\gamma x + \delta y = \sqrt{[m(A + Cy^2)]}.$$

Differenzirt man aber jene Gleichung, so findet man

$$dx(\gamma x + \delta y) + dy(\gamma y + \delta x) = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = 0.$$

Ferner setze man

$$\frac{dx\,(L + Mx^2)}{\sqrt{(A + Cx^2)}} + \frac{dy\,(L + My^2)}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = dV\sqrt{m},$$

so erhält man durch Integration

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} + V\sqrt{m}.$$

Da also

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2)}} = -\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2)}}, \text{ so wird}$$

$$dV\sqrt{m} = \frac{M\,dx\,(x^2 - y^2)}{\sqrt{(A + Cx^2)}} \text{ und demnach, weil}$$

$$y = \frac{\sqrt{[m(A + Cx^2)]} - \delta x}{\gamma}, \text{ ist}$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{\gamma^2}\left[\gamma^2 x^2 - mA - mCx^2 - \delta^2 x^2 + 2\delta x\sqrt{[m(A + Cx^2)]}\right].$$

Es ist aber $\gamma^2 - \delta^2 = -mC$, also

$$dV\sqrt{m} = \frac{M\,dx\,[2\delta x\sqrt{m(A + Cx^2)} - mA - 2mCx^2]}{\gamma^2\sqrt{(A + Cx^2)}},$$

wovon sich das Integrale leicht bestimmen läßt; es wird nämlich

$$V\sqrt{m} = \frac{\delta M x^2 \sqrt{m}}{\gamma^2} - \frac{M m x}{\gamma^2} \sqrt{(A + C x^2)}.$$

Weil aber

$$\sqrt{[m(A + C x^2)]} = \gamma y + \delta x$$

ist, so geht jene Gleichung über in

$$V\sqrt{m} = \frac{\delta M x^2 - \gamma M x y - \delta M x^2}{\gamma^2} \sqrt{m} = -\frac{M x y}{\gamma} \sqrt{m}.$$

Wir erhalten demnach

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} - \frac{M x y}{\gamma} \sqrt{m}, \text{ wobey}$$

$\gamma y + \delta x = \sqrt{[m(A + C x^2)]}$ und $\gamma x + \delta y = \sqrt{[m(A + C y^2)]}$,
ferner $-\alpha\gamma = A m$ und $\delta^2 - \gamma^2 = C m$.

Zur Bestimmung der Constanten setzen wir $y = b$ für $x = o$, damit

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(b) - \frac{M x y}{\gamma} \sqrt{m}$$

werde; dann aber ist

$$\gamma b = \sqrt{m A} \quad \text{und} \quad \delta b = \sqrt{(m A + m C b^2)}, \text{ also}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{m A}}{b} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\sqrt{(m A + m C b^2)}}{b}$$

Hieraus schließen wir also, wenn

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{(A + C b^2)} = b\sqrt{(A + C x^2)},$$

oder was dasselbe ist:

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{(A + C b^2)} = b\sqrt{(A + C y^2)},$$

auf die Existenz folgender Gleichung:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(b) - \frac{M b x y}{\sqrt{A}},$$

wobey Π eine solche Function der nachstehenden Veränderlichen bezeichnet, daß $\Pi(z) = \int \frac{dz\,(L + M z^2)}{\sqrt{(A + C z^2)}}$ wird, welches Integrale aber so genommen werden muß, daß es für $z = o$ verschwindet. Nachdem wir nun die Natur dieser Functionen festgesetzt haben, wollen wir von dem Unterschiede zwischen der Constanten und Veränderlichen abstrahiren, so daß

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q) + \frac{M p q r}{\sqrt{A}} \text{ wird, wenn}$$

$$q\sqrt{A} + p\sqrt{(A + C r^2)} = r\sqrt{(A + C p^2)} \text{ und}$$
$$p\sqrt{A} + q\sqrt{(A + C r^2)} = r\sqrt{(A + C q^2)}, \text{ also}$$

$$r = \frac{p\sqrt{(A + Cq^2)} + q\sqrt{(A + Cp^2)}}{\sqrt{A}} \text{ und}$$

$$\sqrt{(A + Cr^2)} = \frac{Cpq + \sqrt{(A + Cp^2)(A + Cq^2)}}{\sqrt{A}} \text{ ist.}$$

Zusatz 1.

§. 597. Nimmt man z negativ, so wird

$$\Pi(-z) = -\Pi(z);$$

werden daher die Größen p und q negativ genommen, so erhält man

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = \frac{Mpqr}{\sqrt{A}}, \text{ wenn}$$

$$p\sqrt{A} + q\sqrt{(A + Cr^2)} + r\sqrt{(A + Cq^2)} = 0, \text{ oder}$$

$$q\sqrt{A} + p\sqrt{(A + Cr^2)} + r\sqrt{(A + Cp^2)} = 0, \text{ oder}$$

$$r\sqrt{A} + p\sqrt{(A + Cq^2)} + q\sqrt{(A + Cp^2)} = 0, \text{ oder}$$

$$Cpq - \sqrt{[A(A + Cr^2)]} + \sqrt{(A + Cp^2)(A + Cq^2)} = 0,$$

woraus sich folgende Relation ergibt:

$$Cpqr + p\sqrt{(A + Cq^2)(A + Cr^2)} + q\sqrt{(A + Cp^2)(A + Cr^2)} + r\sqrt{(A + Cp^2)(A + Cq^2)} = 0.$$

Zusatz 2.

§. 598. Nach dieser Methode lassen sich demnach drey Functionen von der Form $\Pi(z)$ darstellen, deren Summe eines algebraischen Ausdruckes fähig ist. Was wir oben von dieser Summe gezeigt haben, gilt auch von der Summe zweyer, weniger der dritten Function.

Zusatz 3.

§. 599. Wird $L = A$ und $M = C$ gesetzt, so bezeichnet die vorgelegte Function $\Pi(z) = \int dz\sqrt{(A + Cz^2)}$ den Flächeninhalt einer Curve, zu deren Abscisse z die Größe $\sqrt{(A + Cz^2)}$ als Ordinate gehört, und die Summe dreyer solcher Flächenräume stellt sich in algebraischer Form auf folgende Art dar:

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = \frac{Cpqr}{\sqrt{A}},$$

wenn zwischen p, q, r die obige Relation festgesetzt ist.

Anmerkung.

§. 600. Diese Eigenschaft verdanken wir dem Umstande, daß das Differenziale dV die Integration zuließ. Da nämlich

$$d V \sqrt{m} = \frac{M d x (x^2 - y^2)}{\sqrt{(A + C x^2)}}$$ und

$\sqrt{[m (A + C x^2)]} = \gamma y + \delta x$ war, so wird

$$d V = \frac{M d x (x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x},$$

wovon das Integrale mit Hülfe der angenommenen Gleichung

$$\alpha + \gamma (x^2 + y^2) + 2 \delta x y = 0$$

leicht bestimmt werden kann. Denn man setze nur

$x^2 + y^2 = t^2$ und $x y = u$, so wird

$$\alpha + \gamma t^2 + 2 \delta u = 0,$$

und durch Differenziation

$$x d x + y d y = t d t,$$
$$x d y + y d x = d u \text{ und}$$
$$\gamma t d t + \delta d u = 0.$$

Aus den beyden ersten Gleichungen ergibt sich

$(x^2 - y^2) d x = x t d t - y d u$, und weil

$t d t = - \delta \frac{d u}{\gamma}$, so wird

$$(x^2 - y^2) d x = - \frac{d u}{\gamma} (\delta x + \gamma y),$$

so daß demnach

$$\frac{d x (x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x} = - \frac{d u}{\gamma},$$ und daher

$$d V = - \frac{M d u}{\gamma}$$

wird. Hieraus folgt nun offenbar

$$V = - \frac{M u}{\gamma} = - \frac{M x y}{\gamma},$$

wie wir in der Auflösung auf einem weit mühsameren Wege gefunden haben. Diese Operation findet jedoch eine bequeme Anwendung in der folgenden Aufgabe, wo wir zusammengesetztere Formeln betrachten wollen.

Aufgabe 78.

§. 601. Es sey

$$\Pi (z) = \int \frac{d z (L + M z^2 + N z^4 + O z^6 + \text{rc.})}{\sqrt{(A + C z^2)}},$$

welches Integrale so bestimmt werden soll, daß es für $z = 0$ verschwindet. Man soll die hieraus sich erge-

benden transscendenten Functionen mit einander vergleichen.

Auflösung.

Es finde wie früher zwischen den Größen x und y die Relation

$$\alpha + \gamma (x^2 + y^2) + 2\delta x y = 0$$

Statt, und es sey

$$-\alpha\gamma = A m \quad \text{und} \quad \delta^2 - \gamma^2 = C m, \text{ so wird}$$

$\gamma y + \delta x = \sqrt{[m (A + C x^2)}$ und $\gamma x + \delta y = \sqrt{[m (A + C y^2)]}$, durch Differenziation erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + C x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + C y^2)}} = 0,$$

und man setze

$$\frac{dx (L + M x^2 + N x^4 + O x^6)}{\sqrt{(A + C x^2)}} + \frac{dy (L + M y^2 + N y^4 + O y^6)}{\sqrt{(A + C y^2)}} = d V \sqrt{m},$$

damit

$$\Pi (x) + \Pi (y) = \text{Const.} + V \sqrt{m}$$

werde. Es ist aber

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + C y^2)}} = - \frac{dx}{\sqrt{(A + C x^2)}},$$

und daher geht jene Gleichung über in folgende:

$$\frac{dx [M (x^2 - y^2) + N (x^4 - y^4) + O (x^6 - y^6)]}{\sqrt{(A + C x^2)}} = d V \sqrt{m},$$

oder weil $\sqrt{[m (A + C x^2)]} = \gamma y + \delta x$ ist, in folgende:

$$\frac{dx (x^2 - y^2) [M + N (x^2 + y^2) + O (x^4 + x^2 y^2 + y^4)]}{\gamma y + \delta x} = d V.$$

Nun sey $x^2 + y^2 = t^2$ und $xy = u$, so daß

$$\alpha + \gamma t^2 + 2\delta u = 0 \quad \text{und} \quad \gamma t dt + \delta du = 0, \text{ oder}$$

$$t dt = - \frac{\delta du}{\gamma} \text{ wird, und weil}$$

$$x dx + y dy = t dt \quad \text{und} \quad x dy + y dx = du,$$

so folgern wir hieraus

$$(x^2 - y^2) dx = x t dt - y du = - \frac{du}{\gamma} (\gamma y + \delta x),$$

$$\text{und daher } \frac{dx (x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x} = - \frac{du}{\gamma}; \text{ hieraus folgt}$$

$$d V = - \frac{du}{\gamma} [M + N (x^2 + y^2) + O (x^4 + x^2 y^2 + y^4)].$$

Es ist $x^2 + y^2 = t^2 = \frac{-\alpha - 2\delta u}{\gamma}$ und

$$x^4 + x^2 y^2 + y^4 = t^4 - u^2.$$

Da aber $\frac{du}{\gamma} = -\frac{t\,dt}{\delta}$, so schließen wir, daß

$$dV = -\frac{M\,du}{\gamma} + \frac{N t^3 dt}{\delta} + \frac{O t^5 dt}{\delta} + \frac{O u^2 du}{\gamma}$$

ey, und so erhalten wir durch Integration

$$V = -\frac{Mu}{\gamma} + \frac{N t^4}{4\delta} + \frac{O t^6}{6\delta} + \frac{O u^3}{3\gamma}.$$

Nehmen wir nun an, daß $y = b$ für $x = o$ werde, so erhalten wir

$$\gamma = \frac{\sqrt{mA}}{b},\quad \delta = \frac{\sqrt{m}\,(A + Cb^2)}{b} \text{ und } \alpha = -b\sqrt{mA};$$

dann aber ist

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{(A + Cb^2)} = b\sqrt{(A + Cx^2)},$$
$$x\sqrt{A} + y\sqrt{(A + Cb^2)} = b\sqrt{(A + Cy^2)},$$
$$b\sqrt{A} = x\sqrt{(A + Cy^2)} + y\sqrt{(A + Cx^2)}.$$

Da nun

$$V = -\frac{Mbxy}{\sqrt{mA}} + \frac{Nb\,(x^2 + y^2)^2}{4\sqrt{m}(A + Cb^2)} + \frac{Ob\,(x^2 + y^2)^3}{6\sqrt{m}\,(A + Cb^2)} + \frac{Obx^3y^3}{3\sqrt{mA}},$$

so wird unsere, zwischen den transcendenten Functionen Statt findende Relation, welcher die vorhergehenden Bestimmungen entsprechen, durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(b) - \frac{Mbxy}{\sqrt{A}} + \frac{Nb\,(x^2 + y^2)^2}{4\sqrt{(A + Cb^2)}}$$
$$+ \frac{Ob\,(x^2 + y^2)^3}{6\sqrt{(A + Cb^2)}} + \frac{Obx^3y^3}{3\sqrt{A}} - \frac{Nb^5}{4\sqrt{(A + Cb^2)}} - \frac{Ob^7}{6\sqrt{(A + Cb^2)}},$$

wobey zu bemerken ist, daß

$$-b\sqrt{A} + \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{A}}{b} + \frac{2xy\sqrt{(A + Cb^2)}}{b} = o, \text{ oder}$$

$$x^2 + y^2 = b^2 - \frac{2xy\sqrt{(A + Cb^2)}}{\sqrt{A}}.$$

Hieraus erhält man nun

$$(x^2 + y^2)^2 - b^4 = -\frac{4b^2xy\sqrt{(A + Cb^2)}}{\sqrt{A}} + \frac{4x^2y^2(A + Cb^2)}{A} \text{ und}$$

$$(x^2 + y^2)^3 - b^6 = -\frac{6b^4xy\sqrt{(A + Cb^2)}}{\sqrt{A}} + \frac{12b^2x^2y^2\,(A + Cb^2)}{A}$$
$$- \frac{8x^3y^3\,(A + Cb^2)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{A}},$$

so daß also unsere Gleichung sich in folgender Form darstellt:

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}-\frac{Nb^3xy}{\sqrt{A}}+\frac{Nbx^2y^2}{A}\sqrt{(A+Cb^2)}$$
$$-\frac{Ob^5xy}{\sqrt{A}}+\frac{2Ob^3x^2y^2}{A}\sqrt{(A+Cb^2)}-\frac{Obx^3y^3}{3A\sqrt{A}}(3A+4Cb^2).$$

Zusatz 1.

§. 602. Setzen wir $b=r$, $x=-p$, $y=-q$, so wird unsere Gleichung

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{pqr}{\sqrt{A}}(M+Nr^2+Or^4)-$$
$$\frac{p^2q^2\sqrt{(A+Cr^2)}}{A}(Nr+2Or^3)+\frac{Op^3q^3r}{3A\sqrt{A}}(3A+4Cr^2),$$

wobey $p^2+q^2=r^2-\frac{2pq}{\sqrt{A}}\sqrt{(A+Cr^2)}$,

und daher wird

$$\frac{\sqrt{(A+Cr^2)}}{\sqrt{A}}=\frac{r^2-p^2-q^2}{2pq}.$$

Zusatz 2.

§. 603. Substituirt man diesen für $\frac{\sqrt{(A+Cr^2)}}{\sqrt{A}}$ gefundenen Werth, so erhält man folgende Gleichung, in welcher die drey Größen p, q, r gleichmäßig verbunden erscheinen:

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2\sqrt{A}}(p^2+q^2+r^2)$$
$$+\frac{Opqr}{3\sqrt{A}}(p^4+q^4+r^4+p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2),$$

welcher Gleichung die oben (§. 602) gegebenen Formeln Genüge leisten, oder auch nachstehende rationale Gleichung

$$\frac{4Cp^2q^2r^2}{A}=p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2-2r^2q^2.$$

Zusatz 3.

§. 604. Hätten wir dem Zähler der Integralformel noch das Glied Pz^8 beygefügt, damit

$$\Pi(z)=\int\frac{dz(L+Mz^2+Nz^4+Oz^6+Pz^8)}{\sqrt{(A+Cz^2)}}$$

wäre, so würde zu der eben gefundenen Gleichung noch folgendes Glied hinzugekommen seyn:

$$\frac{Ppqr}{4\sqrt{A}}(p^6+q^6+r^6+p^2q^4+p^2r^4+p^4q^2+p^4r^2$$
$$+q^4r^2+q^2r^4+\tfrac{4}{5}p^2q^2r^2).$$

Anmerkung.

§. 605. Diese Relationen hätten wir auch aus den obigen Reductionen ableiten können, denn da $\Pi(z) = E \int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2)}} +$ einer algebraischen Größe, so wird, wenn hier für z nach und nach die Größen p, q, r gesetzt werden, welche so von einander abhängen, wie wir oben erklärt haben,

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(A + Cp^2)}} + \int \frac{dq}{\sqrt{(A + Cq^2)}} + \int \frac{dr}{\sqrt{(A + Cr^2)}} = 0,$$

und hieraus schließen wir auf die Gleichung

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = f(p) + f(q) + f(r),$$

wobey f irgend eine algebraische Function der nachfolgenden Größe bezeichnet. Die Summe dieser drey Functionen reducirt sich auf den vorhin gefundenen Ausdruck, so bald auf die zwischen p, q, r Statt findende Relation Rücksicht genommen wird; man müßte nämlich die Größe C eliminiren. Diese Reduction würde jedoch eine ungeheure Arbeit erfordern. Hier verdient die eben gebrauchte Methode eine vorzügliche Würdigung, welche zu einer weit schwierigeren Untersuchung die Bahn zu brechen scheint, indem sie ganz einfach ist. Eine Vergleichung zwischen den transcendenten Functionen, welche wir in dem nächsten Kapitel betrachten wollen, scheint auf einem anderen Wege kaum möglich zu seyn, und daher wird der Nutzen dieser Methode in dem nächsten Kapitel vorzüglich in die Augen springen.

Kapitel VI.

Von der Vergleichung der transcendenten Größen, welche enthalten sind unter der Form:

$$\int \frac{P\,dz}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4)}}.$$

Aufgabe 79.

§. 606. Wenn zwischen x und y die Relation

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + \zeta x^2 y^2 = 0$$

gegeben ist, so sollen hieraus transcendente Functionen von der vorgeschriebenen Form gesucht werden, zwischen welchen eine Vergleichung angestellt werden kann.

Auflösung.

Man bestimme aus der vorgelegten Gleichung jede der Veränderlichen, nämlich

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{[-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\zeta)x^2 - \gamma\zeta x^4]}}{\gamma + \zeta x^2} \text{ und}$$

$$x = \frac{-\delta y + \sqrt{[-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\zeta)y^2 - \gamma\zeta y^4]}}{\gamma + \zeta y^2},$$

und bringe diese Radicalen auf die vorgeschriebene Form, indem man $-\alpha\gamma = Am$, $\delta^2 - \gamma^2 - \alpha\zeta = Cm$ und $-\gamma\zeta = Em$ setzt, so erhält man

$$\alpha = -\frac{Am}{\gamma},\ \zeta = -\frac{Em}{\gamma} \text{ und } \delta^2 = Cm + \gamma^2 + \frac{AEm^2}{\gamma^2}.$$

Es wird demnach

$$\gamma y + \delta x + \zeta x^2 y = \sqrt{m(A + Cx^2 + Ex^4)},$$
$$\gamma x + \delta y + \zeta x y^2 = \sqrt{m(A + Cy^2 + Ey^4)}.$$

Differenzirt man aber die vorgelegte Gleichung selbst, so erhält man

$$dx(\gamma x + \delta y + \zeta x y^2) + dy(\gamma y + \delta x + \zeta x^2 y) = 0,$$

und durch Substitution jener Werthe

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = 0.$$

Wäre also umgekehrt diese Differenzialgleichung gegeben, so würde ihr Genüge geleistet durch die endliche Gleichung

$$-Am+\gamma^2(x^2+y^2)+2xy\sqrt{(\gamma^4+Cm\gamma^2+AEm^2)}-Emx^2y^2=o,$$

oder wenn man $\frac{\gamma^2}{m}=k$ setzt, durch folgende:

$$-A+k(x^2+y^2)+2xy\sqrt{(k^2+kC+AE)}-Ex^2y^2=o,$$

und da diese die Constante k enthält, welche in der Differenzialgleichung nicht erscheint, so ist sie zugleich das vollständige Integrale. Man erhält hieraus aber

$$ky+x\sqrt{(k^2+kC+AE)}-Ex^2y=\sqrt{k}(A+Cx^2+Ex^4) \text{ und}$$
$$kx+y\sqrt{(k^2+kC+AE)}-Exy^2=\sqrt{k}(A+Cy^2+Ey^4).$$

Zusatz 1.

§. 607. Die Constante k läßt sich so bestimmen, daß $y=b$ für $x=o$ wird, und daher erhält man

$$bk=\sqrt{Ak} \text{ und } b\sqrt{(k^2+kC+AE)}=\sqrt{k}(A+Cb^2+Eb^4),$$

und daher

$$k=\frac{A}{b^2} \text{ und } \sqrt{(k^2+kC+AE)}=\frac{1}{b^2}\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)},$$

und demnach erhalten wir

$$Ay+x\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}-Eb^2x^2y=b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}$$

und

$$Ax+y\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}-Eb^2xy^2=b\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)}.$$

Zusatz 2.

§. 608. Diese zwischen x und y bestehende endliche Relation ist demnach das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cx^2+Ex^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(A+Cy^2+Ey^4)}}=o,$$

oder wenn man diese Gleichung in Bezug auf x und y rational darstellt:

$$A(x^2+y^2-b^2)+2xy\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}-Eb^2x^2y^2=o.$$

Zusatz 3.

§. 609. Drückt man also y durch x aus, so findet man

$$y=\frac{b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}-x\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}}{A-Eb^2x^2},$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}}{A} =$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix}(A + Eb^2x^2)\sqrt{(A + Cb^2 + Eb^4)}\,(A + Cx^2 + Ex^4) \\ -2AEbx(b^2 + x^2) - Cbx(A + Eb^2x^2)\end{matrix}\right\}}{(A - Eb^2x^2)^2}$$

Zusatz 4.

§. 610. Da man hier die Constante b nach Belieben bestimmen kann, so lassen sich unendlich viele besondere Integralien angeben, deren vorzüglichste folgende sind:

1) für $b = 0$ wird $y = -x$,

2) für $b = \infty$ wird $y = \frac{\sqrt{A}}{x\sqrt{E}}$,

3) für $A + Cb^2 + Eb^4 = 0$, also $b^2 = \frac{-C + \sqrt{(C^2 - 4AE)}}{2E}$,

wird $y = \frac{b\sqrt{A}\,(A + Cx^2 + Ex^4)}{A - Eb^2x^2}$.

Anmerkung.

§. 611. Der Gebrauch jener Methode, nach welcher wir von der endlichen Gleichung auf die Differenzialgleichung zurückgekommen sind, wird hier schon deutlich eingesehen. Denn da sich die Integration der Formel $\int \frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}$ weder durch Logarithmen noch durch Kreisbogen auf keine Art durchführen läßt, so ist es allerdings wunderbar, daß das Integrale einer solchen Differenzialgleichung sogar algebraisch dargestellt werden kann. Was wir im vorhergehenden Kapitel nach derselben Methode gelehrt haben, läßt sich auch auf dem gewöhnlichen Wege darstellen, wenn die einzelnen Differenzialformeln entweder durch Logarithmen oder Kreisbogen ausgedrückt werden, deren Vergleichung dann auf eine algebraische Gleichung führt. Weil aber hier eine solche Integration durchaus nicht Statt findet, so gibt es zuverläßig keinen andern Weg, auf welchem sich das hier gefundene Integrale bestimmen ließe. Wir wollen demnach diesen Gegenstand mit mehr Fleiß behandeln.

Aufgabe 80.

§. 612. Es bezeichne $\Pi(z)$ eine solche Function von z, daß $\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2 + Ez^4)}}$ für $z = 0$ ver-

schwindet; man vergleiche die hieraus sich ergebenen Functionen.

Auflösung.

Setzen wir zwischen den zwey Veränderlichen x und y die oben bestimmte Relation fest, so wird, wie wir gesehen haben,

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = o.$$

Da nun y = b für x = o wird, so findet man durch Integration

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(b).$$

Weil ferner zwischen der Veränderlichen x und y und der Constanten b kein Unterschied mehr Statt findet, so setzen wir x = p, y = q und b = − r, so daß Π (b) = − Π (r), so wird die zwischen den transcendenten Functionen Statt findende Relation

$$\Pi(p) + \Pi(q) + \Pi(r) = o$$

sich durch folgende algebraische Formeln ausdrücken lassen:

$$(A - Ep^2r^2)q + p\sqrt{A(A + Cr^2 + Er^4)} + r\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)} = o$$

oder

$$(A - Ep^2q^2)r + q\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)} + p\sqrt{A(A + Cq^2 + Eq^4)} = o$$

oder

$$(A - Eq^2r^2)p + r\sqrt{A(A + Cq^2 + Eq^4)} + q\sqrt{A(A + Cr^2 + Er^4)} = o,$$

welche sich ergeben aus folgender Gleichung:

$$A(p^2 + q^2 - r^2) - Ep^2q^2r^2 + 2pq\sqrt{A(A + Cr^2 + Er^4)} = o;$$

oder wenn sie rational gemacht wird, aus folgender:

$$A^2(p^4 + q^4 + r^4 - 2p^2q^2 - 2p^2r^2 - 2q^2r^2)$$
$$- 2AEp^2q^2r^2(p^2 + q^2 + r^2) - 4ACp^2q^2r^2 + E^2p^4q^4r^4 = o,$$

welche aber wegen der Vieldeutigkeit der Wurzeln allen Veränderungen der Zeichen in der obigen transcendenten Gleichung Genüge leistet.

Zusatz 1.

§. 613. Nehmen wir r negativ, damit

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q)$$

werde, so erhalten wir

$$r = \frac{p\sqrt{A(A + Cq^2 + Eq^4)} + q\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)}}{A - Ep^2q^2},$$

und demnach

$$\frac{\sqrt{(A + Cr^2 + Er^4)}}{A} =$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{c} (A + Ep^2q^2) \sqrt{(A + Cp^2 + Ep^4)(A + Cq^2 + Eq^4)} + \\ + 2AEpq(p^2 + q^2) + Cpq(A + Ep^2q^2) \end{array} \right\}}{(A - Ep^2q^2)^2}$$

Zusatz 2.

§. 614. Setzen wir also $p = q$, damit

$$\Pi(r) = 2\Pi(p)$$

werde, so erhalten wir

$$r = \frac{2p\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)}}{A - Ep^4} \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{A + Cr^2 + Er^4}{A}} = \frac{A^2 + 2ACp^2 + 6AEp^4 + 2CEp^6 + E^2p^8}{(A - Ep^4)^2}.$$

Auf diese Weise läßt sich also eine Function angeben, welche dem Doppelten einer ähnlichen Function gleich ist.

Zusatz 3.

§. 615. Wird $q = \frac{2p\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)}}{A - Ep^4}$ und

$$\sqrt{A(A + Cq^2 + Eq^4)} = \frac{A(A^2 + 2ACp^2 + 6AEp^4 + 2CEp^6 + E^2p^8)}{(A - Ep^4)^2}$$

gesetzt, damit $\Pi(q) = 2\Pi(p)$ werde, so erhält man, dem ersten Zusatze zu Folge:

$$\Pi(r) = 3\Pi(p).$$

Dann ist also

$$r = \frac{p(3A^2 + 4ACp^2 + 6AEp^4 - E^2p^8)}{A^2 - 6AEp^4 - 4CEp^6 - 3E^2p^8}.$$

Anmerkung 1.

§. 616. Es ist zu mühsam, die Multiplication der Functionen weiter zu treiben, und es läßt sich noch weniger das Gesetz erkennen, nach welcher dieselbe fortschreitet. Setzen wir der Kürze wegen

$$\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)} = AP \text{ und } A - Ep^4 = A\mathfrak{P},$$

damit

$$Cp^2 = AP^2 - A - Ep^4 \text{ und } Ep^4 = A(1 - \mathfrak{P}),$$

so verhalten sich die Multiplicationen bis zum Vierfachen wie folgt.

Setzen wir nämlich $\Pi(r) = 2\Pi(p)$; $\Pi(s) = 3\Pi(p)$ und $\Pi(t) = 4\Pi(p)$, so findet man

$$r = \frac{2Pp}{\mathfrak{P}},\quad s = \frac{p(4P^2 - \mathfrak{P}^2)}{\mathfrak{P}^2 - 4P^2(1-\mathfrak{P})},\quad t = \frac{4pP\mathfrak{P}[2P^2(2-\mathfrak{P}) - \mathfrak{P}^2]}{\mathfrak{P}^4 - 16P^4(1-\mathfrak{P})}.$$

Setzt man auf ähnliche Weise

$$\sqrt{A(A + Cr^2 + Er^4)} = AR \quad \text{und} \quad A - Er^4 = A\mathfrak{R},$$

so erhält man,

$$R = \frac{2P^2(2-\mathfrak{P}) - \mathfrak{P}^2}{\mathfrak{P}^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{P}^4 - 16P^4(1-\mathfrak{P})}{\mathfrak{P}^4},$$

und demnach ist für das Vierfache

$$t = \frac{2Rr}{\mathfrak{R}},\quad T = \frac{2R^2(2-\mathfrak{R}) - \mathfrak{R}^2}{\mathfrak{R}^2},\quad \mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{R}^4 - 16R^4(1-\mathfrak{R})}{\mathfrak{R}^4}.$$

Setzen wir daher für das Achtfache

$$\Pi(z) = 8\Pi(p),$$

so hat man

$$z = \frac{2Tt}{\mathfrak{T}} = \frac{4rR\mathfrak{R}[2R^2(2-\mathfrak{R}) - \mathfrak{R}^2]}{\mathfrak{R}^4 - 16R^4(1-\mathfrak{R})}.$$

Man erkennt hieraus, wie man sich bey der fortgesetzten Verdoppelung zu benehmen habe; das Gesetz des Fortganges aber kann man nicht entdecken. Die Kenntniß dieses Gesetzes wäre für die Erweiterung der Analysis sehr wünschenswerth, um daraus allgemein die Beziehung zwischen z und p für die Gleichung $\Pi(z) = n\Pi(p)$ ableiten zu können, wie wir dieses im vorhergehenden Kapitel mit glücklichem Erfolge gethan haben; denn hieraus ließen sich dann vortreffliche Eigenschaften rücksichtlich der Integration von den Formen $\int \frac{dz}{\sqrt{(A + Cz^2 + Ez^4)}}$ erkennen, wodurch die Analysis sehr viel gewinnen würde.

Anmerkung 2.

§. 617. Der zweckmäßigste Weg, das Gesetz der Fortschreitung jener Producte, scheint durch die Betrachtung von drey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern zu bestehen. Es sey also

$$\Pi(x) = (n-1)\Pi(p),\ \Pi(y) = n\Pi(p),\ \Pi(z) = (n+1)\Pi(p).$$

Da nun hier

$$\Pi(x) = \Pi(y) - \Pi(p) \quad \text{und} \quad \Pi(z) = \Pi(y) + \Pi(p);$$

so wird

$$x = \frac{y\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)} - p\sqrt{A(A + Cy^2 + Ey^4)}}{A - Ep^2y^2},$$

$$z = \frac{y\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)} + p\sqrt{A(A + Cy^2 + Ey^4)}}{A - Ep^2y^2};$$

hieraus folgern wir

$$(A - Ep^2y^2)(x + z) = 2y\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)}.$$

Setzen wir also wie früher

$$\sqrt{A(A + Cp^2 + Ep^4)} = AP \quad \text{und} \quad A - Ep^4 = A\mathfrak{P},$$
$$\text{und} \quad x = pX, \quad y = pY \quad \text{und} \quad z = pZ,$$

weil die Größen x, y, z den einfachen Factor p enthalten, so wird

$$[1 - (1 - \mathfrak{P})Y^2](X + Z) = 2PY, \quad \text{oder}$$

$$Z = \frac{2PY}{1 - (1 - \mathfrak{P})Y^2} - X,$$

und mit Hülfe dieser Formel läßt sich dann aus je zweyen Nachbargliedern X und Y das nachfolgende Glied Z ohne Schwierigkeit bestimmen. Damit man dies leichter erkenne, setze man $2P = Q$ und $1 - \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$, so wird

$$Z = \frac{QY}{1 - \mathfrak{Q}Y^2} - X.$$

Die gesuchten Ausdrücke gehen demnach auf folgende Weise fort:

1) 1,

2) $\frac{Q}{\mathfrak{P}}$,

3) $\frac{Q^2 - \mathfrak{P}^2}{\mathfrak{P}^2 - Q^2\mathfrak{Q}}$,

4) $\frac{Q^3\mathfrak{P}(1 + \mathfrak{Q}) - 2Q\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{P}^4 - Q^4\mathfrak{Q}}$,

5) $\frac{\mathfrak{P}^6 - 3Q^2\mathfrak{P}^4 + Q^4\mathfrak{P}^2(1 + 2\mathfrak{Q}) - Q^6\mathfrak{Q}^2}{\mathfrak{P}^6 - 3Q^2\mathfrak{P}^4\mathfrak{Q} + Q^4\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q}(2 + \mathfrak{Q}) - Q^6\mathfrak{Q}}$,

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Es kömmt also nur noch darauf an, eine Progression zu bestimmen, und zwar mit Hülfe der, zwischen drey auf einander folgenden Gliedern X, Y, Z gegebenen Relation, welche durch die Gleichung

$$Z = \frac{QY}{1 - \mathfrak{Q}Y^2} - X$$

gegeben seyn soll, bey welcher Progression das erste Glied $= 1$, und das zweyte $= \frac{Q}{1 - \mathfrak{Q}}$ ist.

Aufgabe 81.

§. 618 Es soll $\Pi(z)$ eine solche Function von z bezeichnen, daß

$$\Pi(z) = \int \frac{dz(L + Mz^2 + Nz^4)}{\sqrt{(A + Cz^2 + Ez^4)}},$$

welches Integrale für $z = 0$ verschwinden soll; man vergleiche die sich hieraus ergebenden transcendenten Functionen.

Auflösung.

Setzen wir, zwischen den zwey Veränderlichen x und y bestehe die Relation

$$Ay + \mathfrak{B}x - Eb^2x^2y = b\sqrt{A(A + Cx^2 + Ex^4)},\ \text{oder}$$

$$Ax + \mathfrak{B}y - Eb^2xy^2 = b\sqrt{A(A + Cy^2 + Ey^4)},$$

oder wenn man die Gleichung von der Irrationalität befreyt:

$$A(x^2 + y^2 - b^2) + 2\mathfrak{B}xy - Eb^2x^2y^2 = 0,$$

wobey der Kürze wegen

$$\mathfrak{B} = \sqrt{A(A + Cb^2 + Eb^4)}$$

ist, so erhält man, wie wir oben gesehen haben,

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = 0.$$

Setzen wir also

$$\frac{dx(L + Mx^2 + Nx^4)}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}} + \frac{dy(L + My^2 + Ny^4)}{\sqrt{(A + Cy^2 + Ey^4)}} = bdV\sqrt{A},$$

damit nach unserer Bezeichnungsart

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} + bV\sqrt{A}$$

werde, wobey die Constante so bestimmt werden muß, daß $y = b$ für $x = 0$ werde. Die Frage ist also zurückgeführt auf die Bestimmung der Function V. Substituiren wir zu diesem Zwecke für dy den aus der ersten Gleichung gefundenen Werth, so erhalten wir

$$bdV\sqrt{A} = \frac{dx\,[M(x^2 - y^2) + N(x^4 - y^4)]}{\sqrt{(A + Cx^2 + Ex^4)}}.$$

Weil aber

$$b\sqrt{A(A + Cx^2 + Ex^4)} = Ay + \mathfrak{B}x - Eb^2x^2y,$$

so erhalten wir

$$dV = \frac{dx(x^2 - y^2)[M + N(x^2 + y^2)]}{Ay + \mathfrak{B}x - Eb^2x^2y}.$$

Stellen wir die Gleichung in der rationalen Form

$$A(x^2+y^2-b^2)+2\mathfrak{B}xy-Eb^2x^2y^2=0$$

dar, und setzen

$$x^2+y^2=t^2 \quad \text{und} \quad xy=u,$$

so wird

$$A(t^2-b^2)+2\mathfrak{B}u-Eb^2u^2=0,$$

und daher

$$Atdt=-\mathfrak{B}du+Eb^2udu.$$

Da ferner

$$xdx+ydy=tdt \quad \text{und} \quad xdy+ydx=du, \text{ so wird}$$

$$(x^2-y^2)dx=xtdt-ydu, \text{ oder}$$

$$A(x^2-y^2)dx=-du(Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y), \text{ so daß}$$

$$\frac{dx(x^2-y^2)}{Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y}=-\frac{du}{A}, \text{ woraus}$$

$$dV=-\frac{du}{A}(M+Nt^2)$$

gefunden wird, und weil

$$t^2=b^2-\frac{2\mathfrak{B}u}{A}+\frac{Eb^2u^2}{A}, \text{ so wird}$$

$$dV=-\frac{du}{A^2}(AM+ANb^2-2\mathfrak{B}Nu+ENb^2u^2),$$

und daher durch Integration

$$V=-\frac{Mu}{A}-\frac{Nb^2u}{A}+\frac{\mathfrak{B}Nu^2}{A^2}-\frac{ENb^2u^3}{3A^2}.$$

Wird dieser Werth substituirt, so erhalten wir wegen $u=xy$ die Gleichung

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}-\frac{Nb^3xy}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{B}Nbx^2y^2}{A\sqrt{A}}-\frac{ENb^3x^3y^3}{3A\sqrt{A}}.$$

Da aber

$$\mathfrak{B}xy=\tfrac{1}{2}Ab^2-\tfrac{1}{2}A(x^2+y^2)+Eb^2x^2y^2, \text{ so wird}$$

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}-\frac{Nbxy}{2A\sqrt{A}}[A(b^2+x^2+y^2)-\tfrac{2}{3}Eb^2x^2y^2],$$

welcher Gleichung also Genüge geschieht durch die algebraische Formeln, welche wir oben dargestellt haben, und durch welche die Relation zwischen x, y und b ausgedrückt wird. Wenn wir demnach die Gleichung

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2A\sqrt{A}}[A(p^2+q^2+r^2)-\tfrac{2}{3}Ep^2q^2r^2]$$

annehmen, so wird ihr Genüge geleistet durch folgende zwischen p, q und r bestehende Relationen:

$$(A-Ep^2q^2)r+p\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}+q\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=0,$$

oder

$$(A-Ep^2r^2)q+p\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}+r\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=0,$$

oder

$$(A-Eq^2r^2)p+q\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}+r\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}=0,$$

oder wenn wir das eine Wurzelzeichen wegschaffen:

$$A(p^2+q^2-r^2)+2pq\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}-Ep^2q^2r^2=0,$$

oder

$$A(p^2+r^2-q^2)+2pr\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}-Ep^2q^2r^2=0,$$

oder

$$A(q^2+r^2-p^2)+2qr\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}-Ep^2q^2r^2=0,$$

und wenn die Irrationalität ganz beseitiget wird:

$$E^2p^4q^4r^4-2AEp^2q^2r^2(p^2+q^2+r^2)-4ACp^2q^2r^2$$
$$+A^2(p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2-2q^2r^2)=0.$$

Zusatz 1.

§. 619. Für $q=r=s$ erhalten wir die Gleichung

$$\Pi(p)+2\Pi(s)=\frac{Mps^2}{\sqrt{A}}+\frac{Nps^2}{2A\sqrt{A}}\left[A(p^2+2s^2)-\tfrac{1}{3}Ep^2s^4\right],$$

welcher Genüge geleistet wird durch die Relation

$$(A-Es^4)p+2s\sqrt{A(A+Cs^2+Es^4)}=0.$$

Zusatz 2.

§. 620. Nehmen wir s negativ und substituiren dann für p diesen Werth, so erhalten wir die Gleichung

$$2\Pi(s)+\Pi(q)+\Pi(r)+\frac{Mps^2}{\sqrt{A}}+\frac{Nps^2}{2A\sqrt{A}}\left[A(p^2+2s^2)-\tfrac{1}{3}Ep^2s^4\right]=$$
$$=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2A\sqrt{A}}\left[A(p^2+q^2+r^2)-\tfrac{1}{3}Ep^2q^2r^2\right],$$ wobey

$$p=\frac{2s\sqrt{A(A+Cs^2+Es^4)}}{A-Es^4},$$ und demnach wird

$$\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=\frac{A(A+Cs^2+Es^4)^2+A(4AE-C^2)s^4}{(AE-s^4)^2},$$

welche Werthe in den obigen Formeln zu substituiren sind.

Zusatz 3.

§. 621. Auf diese Art kann man bezwecken, daß die algebraischen Theile verschwinden, und dann bloß zwischen den transcendenten Grö-

ßen eine Vergleichung Statt findet. Wäre z. B. $N = o$, so müßte man $s^2 = qr$ setzen, um die Gleichung

$$2\Pi(s) + \Pi(q) + \Pi(r) = o$$

zu erhalten. Wird aber $s^2 = qr$ gesetzt, so findet man

$$p = \frac{2\sqrt{A}\,qr\,(A + Cqr + Eq^2r^2)}{A - Eq^2r^2}.$$

Es ist aber auch

$$p = \frac{-q\sqrt{A(A + Cr^2 + Er^4)} - r\sqrt{A(A + Cq^2 + Eq^4)}}{A - Eq^2r^2};$$

und setzt man diese beyden Werthe einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$(A^2 + E^2q^4r^4)(q^2 - 6qr + r^2) - 8Cq^2r^2(A + Eq^2r^2) - 2AEq^2r^2(q^2 + 10qr + r^2) = o.$$

Anmerkung.

§. 622. Bezeichnet $\Pi(z)$ den Bogen irgend einer krummen Linie, welcher zur Abscisse oder Sehne z gehört, so kann man demnach mehrere Bogen derselben Curve mit einander vergleichen, so daß entweder der Unterschied zwischen je zweyen algebraisch wird, oder daß die Bögen ein gegebenes Verhältniß zu einander erhalten. Auf diese Weise lassen sich vortreffliche Eigenschaften der Curven entwickeln, zu deren Kenntniß man kaum auf einem andern Wege gelangen dürfte. — Zwar lassen sich die aus den Elementen bekannten, zwischen den Kreisbogen bestehenden Relationen, wie wir gesehen haben, leicht nach dem vorhergehenden Kapitel vergleichen, woraus sich dann auch die Vergleichung zwischen dem parabolischen Bogen ergibt; allein die Vergleichung zwischen den elliptischen und hyperbolischen Bogen kann auf ähnliche Weise nach dem gegenwärtigen Kapitel angestellt werden. Denn da sich im Allgemeinen der Bogen einer Kegelschnittslinie unter der Form $\int dx \sqrt{\frac{a + bx^2}{c + ex^2}}$ darstellt, so läßt sich diese, wenn sie auf die Gestalt

$$\int \frac{dx\,(a + bx^2)}{\sqrt{ac + (ae + bc)x^2 + bex^4}}$$

gebracht wird, nach den bereits gelehrten Vorschriften behandeln, indem man $A = ac$, $C = ae + bc$ und $E = be$, $L = a$, $M = b$ und $N = o$ setzt. Diese Untersuchung kann aber auf die Formeln, deren Nenner

$$\sqrt{[A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4]}$$

ſt, ausgedehnt werden, und iſt der vorhergehenden ähnlich, welche wir deßhalb hier auseinander ſetzen wollen, wobey ſich zugleich zeigen wird, daß wir über dieſes Ziel hinaus nicht weiter vordringen können, denn die verwickelteren Integralformeln, bey welchen unter dem Wurzelzeichen höhere Potenzen von z erſcheinen, oder bey welchen der Wurzelexponent ſelbſt größer iſt, ſcheinen mit Ausnahme von ſehr wenigen Fällen, welche ſich durch irgend eine Subſtitution auf die angezeigte Form bringen laſſen, keiner ſolchen Vergleichung fähig zu ſeyn.

Aufgabe 82.

§. 623. Die Functionen mit einander zu vergleichen, welche ſich aus der Form

$$\Pi(z) = \frac{dz}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4)}}$$

ergeben, wobey alſo $\Pi(z)$ eine Function von z bezeichnet.

Auflöſung.

Die zwiſchen den beyden Veränderlichen x und y beſtehende Relation ſoll gegeben ſeyn durch die Gleichung

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta x^2y^2 = 0,$$

ſo wird

$$y^2 = \frac{-2y(\beta + \delta x + \varepsilon x^2) - \alpha - 2\beta x - \gamma x^2}{\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2},$$

oder wenn man die Wurzel wirklich auszieht:

$$y = \frac{-\beta - \delta x - \varepsilon x^2 + \sqrt{[(\beta + \delta x + \varepsilon x^2)^2 - (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2)]}}{\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2}.$$

Man reducire nun das Radicale auf die vorgelegte Form, indem man

$$\beta^2 - \alpha\gamma = Am,\quad \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = Bm,$$
$$\delta^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\zeta - \gamma^2 = Cm,\quad \delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon = Dm,$$
$$\varepsilon^2 - \gamma\zeta = Em$$

ſetzt, ſo laſſen ſich von den ſechs Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ fünf beſtimmen, und bey dem ſechsten erſcheint überdieß die Größe m, ſo daß alſo die angenommene Gleichung noch eine willkürliche Conſtante involvirt. Setzen wir demnach Kürze halber

$$\sqrt{[A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4]} = X, \text{ und}$$
$$\sqrt{[A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4]} = Y,$$

so erhalten wir

$$\beta + \gamma y + \delta x + \varepsilon x^2 + 2\varepsilon xy + \zeta x^2 y = X\sqrt{m}, \text{ und}$$
$$\beta + \gamma x + \delta y + \varepsilon y^2 + 2\varepsilon xy + \zeta xy^2 = Y\sqrt{m}.$$

Die Differenziation der angenommenen Gleichung gibt aber

$$\left.\begin{array}{l} + dx(\beta + \gamma x + \delta y + 2\varepsilon xy + \varepsilon y^2 + \zeta xy^2) \\ + dy(\beta + \gamma y + \delta x + 2\varepsilon xy + \varepsilon x^2 + \zeta x^2 y) \end{array}\right\} = 0.$$

Diese mit den obigen übereinstimmenden Ausdrücken geben

$$Y dx \sqrt{m} + X dy \sqrt{m} = 0, \text{ oder}$$
$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0;$$

und daher finden wir durch Integration

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.},$$

welche Constante, wenn $y = b$ für $x = 0$ werden soll, offenbar $= \Pi(0) + \Pi(b)$ ist; oder sie wird allgemein $= \Pi(a) + \Pi(b)$, wenn $y = b$ für $x = a$ werden soll. Werden also die Größen α, β, γ, δ, ε, ζ durch die obigen Bedingungen bestimmt, so ist die zwischen x und y angenommene algebraische Gleichung das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{[A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4]}} + \frac{dy}{\sqrt{[A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4]}} = 0.$$

Zusatz 1.

§. 624. Zur Bestimmung der Größen α, β, γ, δ, ε, ζ nehme man zuerst die beyden obigen rechtsstehenden Gleichungen, nämlich

$$(\delta - \gamma)\beta - \alpha\varepsilon = Bm \quad \text{und} \quad (\delta - \gamma)\varepsilon - \zeta\beta = Dm,$$

und suche hieraus die Größen β und ε, so findet man

$$\beta = \frac{(\delta - \gamma)B + \alpha D}{(\delta - \gamma)^2 - \alpha\zeta} \cdot m \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{(\delta - \gamma)D + \zeta B}{(\delta - \gamma)^2 - \alpha\zeta} \cdot m.$$

Zusatz 2.

§. 625. Es sey Kürze wegen $\delta - \gamma = \lambda$ oder $\delta = \gamma + \lambda$, so wird

$$\beta = \frac{D\alpha + B\lambda}{\lambda^2 - \alpha\zeta} \cdot m \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{B\zeta + D\lambda}{\lambda^2 - \alpha\zeta} \cdot m.$$

Nun folgt aus der ersten und letzten Bedingung die Gleichung

$$\beta^2\zeta - \alpha\varepsilon^2 = (A\zeta - E\alpha)m,$$

d wenn hier jene Werthe gesetzt werden, so ergibt sich

$$\frac{\zeta - D^2\alpha}{ - \alpha\zeta} m = A\zeta - E\alpha, \text{ und daher } m = \frac{(\lambda^2 - \alpha\zeta)(A\zeta - E\alpha)}{B^2\zeta - D^2\alpha}.$$

Aus der ersten und letzten Gleichung folgt aber

$$D^2\beta^2 - B^2\varepsilon^2 + \gamma(B^2\zeta - D^2\alpha) = (AD^2 - B^2E)\,m,$$

d hieraus findet man

$$= \frac{[(A\zeta - E\alpha)(AD^2 - B^2E)\lambda^2 + 2BD(A\zeta - E\alpha)\lambda + AB^2\zeta^2 - D^2E\alpha^2]}{(B^2\zeta - D^2\alpha)^2}.$$

Zusatz 3.

§. 626. Es bleibt uns noch die dritte Gleichung

$$2\gamma\lambda + \lambda^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\zeta = Cm$$

rig, und diese gibt, weil durch Substitution des Werthes von m

$$= \frac{(A\zeta - E\alpha)(D\alpha + B\lambda)}{B^2\zeta - D^2\alpha} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{(A\zeta - E\alpha)(B\zeta + D\lambda)}{B^2\zeta - D^2\alpha}$$

rd, durch Einführung dieser Werthe den Ausdruck

$$= \frac{C(A\zeta - E\alpha)(B^2\zeta - D^2\alpha) - 2BD(A\zeta - E\alpha)^2 - (B^2\zeta - D^2\alpha)^2}{2(A\zeta - E\alpha)(AD^2 - B^2E)}.$$

Anmerkung.

§. 627. Weil diese Werthe für $AD^2 - B^2E = 0$ unbrauchbar werden, so werde ich zur Vermeidung dieses Übelstandes noch eine andere Auflösung lehren. Man setze $\delta = \gamma + \lambda$ und $\lambda^2 = \alpha\zeta + \mu$, damit die ersten Formeln sich verwandeln in

$$\beta = \frac{m}{\mu}(D\alpha + B\lambda) \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{m}{\mu}(B\zeta + D\lambda),$$

so findet man durch Verbindung der ersten und letzten Gleichung

$$A\zeta - E\alpha = \frac{m}{\mu}(B^2\zeta - D^2\alpha),$$

wodurch das Verhältniß zwischen α und ζ bestimmt wird, und da dieß hinreichend ist, so wird

$$\alpha = \mu A - B^2 m \quad \text{und} \quad \zeta = \mu E - D^2 m, \text{ und daher}$$

$$\lambda^2 = \mu + (\mu A - B^2 m)(\mu E - D^2 m), \text{ woraus}$$

$$\gamma = \frac{m^2}{\mu^2}[2BD\lambda + (AD^2 - B^2E)\mu] - \frac{2B^2D^2m^3}{\mu^2} - \frac{m}{\mu}$$

gefolgert wird. Setzt man in der Formel des Zusatzes 3 statt α und

ζ ihre Werthe, so erhält man

$$\lambda = \frac{\mu^2}{2m} + BDm - \tfrac{1}{2}C\mu,$$

und wird das Quadrat dieses Ausdruckes dem Werthe $\alpha\zeta + \mu$ glei[ch] gesetzt, so wird man auf die Gleichung

$$\mu(\mu - Cm)^2 + 4(BD - AE)m^2\mu + 4(AD^2 - BCD + BCE)m^3 = 4[m^2]$$

geleitet. Um diese Gleichung aufzulösen, setze man $\mu = Mm$, so wi[rd]

$$m = \frac{4}{M(M-C)^2 + 4M(BD - AE) + 4(AD^2 - BCD + B^2E)}$$

wo M die für das vollständige Integrale erforderliche Consta[nte] bezeichnet.

Auf diese Art erscheinen alle Größen α, β, γ, δ, ε, ζ mi[t] einerley Nenner behaftet, und wenn wir diesen vernachläßigen, [so] finden wir

$$\alpha = 4(AM - B^2); \qquad \beta = 2B(M - C) + 4AD;$$
$$\gamma = 4AE - (M - C)^2; \quad \zeta = 4(EM - D^2);$$
$$\varepsilon = 2D(M - C) + 4BE; \quad \delta = M^2 - C^2 + 4(AE + BD).$$

Sind diese Werthe gefunden, und wird unsere Hauptgleichung

$$o = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x + y) + \zeta x^2y^2$$

aufgelöst, so findet man, wenn Kürze halber

$$M(M - C)^2 + 4M(BD - AE) + 4(AD^2 - BCD + B^2E) = \Delta$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2) =$$
$$= \pm 2\sqrt{\Delta}\,(A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4)$$
$$\beta + \delta y + \varepsilon y^2 + x(\gamma + 2\varepsilon y + \zeta y^2) =$$
$$= \pm 2\sqrt{\Delta}\,(A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4),$$

und diese bezeichnet demnach das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$o = \frac{dx}{\pm\sqrt{[A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4]}} + \frac{dy}{\pm\sqrt{[A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4]}}$$

Anmerkung.

§. 628. Da hier alles von einer geschickten Bestimmung der Coefficienten abhängt, so wird es sich wohl der Mühe lohnen, dieselbe ausführlicher aus einander zu setzen. Setzt man also gleich

$$\delta = \gamma + \lambda \quad \text{und} \quad \lambda^2 - \alpha\zeta = Mm,$$

o hat man folgende fünf Bedingungen zu erfüllen:

$$\text{I. } \beta^2 - \alpha\gamma = Am;$$
$$\text{II. } \varepsilon^2 - \gamma\zeta = Em;$$
$$\text{III. } \beta\lambda - \alpha\varepsilon = Bm;$$
$$\text{IV. } \varepsilon\lambda - \beta\zeta = Dm;$$
$$\text{V. } Mm + 2\gamma\lambda - 2\beta\varepsilon = Cm.$$

Durch Combination der dritten und vierten Gleichung findet man

$$n(B\lambda + D\alpha) = \beta(\lambda^2 - \alpha\zeta) = \beta Mm, \text{ also } \beta = \frac{B\lambda + D\alpha}{M},$$
$$n(D\lambda + B\zeta) = \varepsilon(\lambda^2 - \alpha\zeta) = \varepsilon Mm, \text{ also } \varepsilon = \frac{D\lambda + B\zeta}{M}.$$

Eliminirt man ferner aus der ersten und zweyten Gleichung die Größe γ, so wird

$$m(A\zeta - E\alpha) = \beta^2\zeta - \varepsilon^2\alpha = \frac{B^2\zeta - D^2\alpha}{M} \cdot m, \text{ daher}$$
$$\zeta(AM - B^2) = \alpha(EM - D^2),$$

und deßhalb setze man

$$\alpha = n(AM - B^2) \text{ und } \zeta = n(EM - D^2).$$

Dann ist aber eben so

$$E\beta^2 - E\alpha\gamma = A\varepsilon^2 - A\gamma\zeta, \text{ oder}$$
$$\gamma(A\zeta - E\alpha) = A\varepsilon^2 - E\beta^2.$$

Durch Substitution der Werthe für α und ζ findet man

$$\beta = nAD + \frac{B}{M}(\lambda - nBD) \text{ und } \varepsilon = nBE + \frac{D}{M}(\lambda - nBD),$$

und wenn Kürze halber $\lambda - nBD = nMN$ gesetzt wird, so hat man

$$\beta = n(AD + BN) \text{ und } \varepsilon = n(BE + DN);$$

weil aber

$$A\zeta - E\alpha = n(B^2E - AD^2) \text{ und}$$
$$A\varepsilon^2 - E\beta^2 = n^2(AB^2E^2 + AD^2N^2 - A^2D^2E - B^2EN^2),$$

oder

$$A\varepsilon^2 - E\beta^2 = n^2(B^2E - AD^2)(AE - N^2); \text{ so wird}$$
$$\gamma = n(AE - N^2).$$

Da aber

$$\lambda = n(BD + MN) \text{ und}$$
$$\lambda^2 = n^2(AM - B^2)(EM - D^2) + Mm,$$

so findet man

$$Mm = n^2 [2BDMN + M^2 N^2 - AEM^2 + M(AD^2 + B^2 I$$

oder $m = n^2 (2BDN + MN^2 - AEM + AD^2 + B^2 E)$.

Endlich gibt die Entwickelung der fünften Bedingungsgleich

$\beta \varepsilon - \gamma \lambda = \frac{m}{2} (M - C)$ folgende Gleichung:

$$\beta \varepsilon - \gamma \lambda = n^2 [(AD + BN)(BE + DN) - (AE - N^2)(BD + MI$$
$$- n^2 N (2BDN + MN^2 - AEM + AD^2 + B^2 E) = N$$

daher wird $N = \frac{1}{2}(M - C)$, und überdieß

$$m = n^2 [BD(M - C) + \tfrac{1}{4} M (M - C)^2 - AEM + AD^2 + B^2$$

Setzt man hier $n = 4$, so ergeben sich die obigen Werthe.

Beyspiel 1.

§. 629. Man bestimme das vollständige Integr der Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm \sqrt{a + bp}} + \frac{dq}{\pm \sqrt{a + bq}} = 0.$$

Hier ist $x = p$, $y = q$, $A = a$, $B = \frac{1}{2} b$, $C = 0$, $D = E = 0$, daher werden die Coefficienten

$$\alpha = 4aM - b^2, \quad \beta = bM, \quad \gamma = - M^2,$$
$$\zeta = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = M^2,$$

und $\Delta = M^3$; daher ist das vollständige Integrale

$$bM + M^2 p - Mq = \pm 2M \sqrt{M(a + bp)}, \text{ oder}$$
$$b + M(p - q) = \pm 2 \sqrt{M(a + bp)}, \text{ oder}$$
$$b + M(q - p) = \pm 2 \sqrt{M(a + bq)},$$

wo die doppelten Zeichen der Wurzelgrößen mit den Zeichen in Differenzialgleichung übereinstimmen müssen.

Beyspiel 2.

§. 630. Man suche das vollständige Integrale Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm \sqrt{a + pb^2}} + \frac{dq}{\pm \sqrt{a + bq^2}} = 0.$$

Für $x = p$ und $y = q$ wird $A = a$, $B = 0$, $C = b$, $D =$ also

$$\alpha = 4aM, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -(M - b)^2,$$
$$\zeta = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = M^2 - b^2, \text{ und}$$
$$\Delta = M(M - b)^2;$$

daher ist das vollständige Integrale in folgenden Gleichungen enthalten:

$(M^2 - b^2) p - (M - b)^2 q = \pm 2 (M - b) \sqrt{M (a + b p^2)}$,

oder

$$(M + b) p - (M - b) q = \pm 2 \sqrt{M (a + b p^2)}, \text{ und}$$
$$(M + b) q - (M - b) p = \pm 2 \sqrt{M (a + b q^2)}.$$

Beyspiel 3.

§. 631. Man suche das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a + b p^3}} + \frac{dq}{\pm\sqrt{a + b q^3}} = 0.$$

Für $x = p$, $y = q$ wird $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2} b$, $E = 0$, also

$$\alpha = 4 a M,\quad \beta = 2 a b,\quad \gamma = - M^2,$$
$$\zeta = - b^2,\quad \varepsilon = b M,\quad \delta = M^2 \text{ und}$$
$$\Delta = M^3 + a b^2;$$

und daher ist das vollständige Integrale

$$2 a b + M^2 p + b M p^2 + q (- M^2 + 2 b M p - b^2 p^2) =$$
$$= \pm 2 \sqrt{(M^3 + a b^2)(a + b p^3)}, \text{ oder}$$
$$2 a b + M p (M + b p) - q (M - b p)^2 =$$
$$= \pm 2 \sqrt{(M^3 + a b^2)(a + b p^3)} \text{ und}$$
$$2 a b + M q (M + b q) - p (M - b q)^2 =$$
$$= \pm 2 \sqrt{(M^3 + a b^2)(a + b q^3)}.$$

Beyspiel 4.

§. 632. Man bestimme das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a + b p^4}} + \frac{dq}{\pm\sqrt{a + b q^4}} = 0.$$

Setzt man $x = p$ und $y = q$, so wird $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = b$, also

$$\alpha = 4 a M,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 4 a b - M^2,$$
$$\zeta = 4 b M,\quad \varepsilon = 0,\quad \delta = M^2 + 4 a b \text{ und}$$
$$\Delta = M^3 - 4 a b M;$$

es ist demnach das gesuchte vollständige Integrale

$$(M^2+4ab)p+q(4ab-M^2+4bMp^2)=$$
$$=\pm 2\sqrt{M(M^2-4ab)(a+bp^4)},$$
$$(M^2+4ab)q+p(4ab-M^2+4bMq^2)=$$
$$=\pm 2\sqrt{M(M^2-4ab)(a+bq^4)}.$$

Beyspiel 5.

§. 633. Man bestimme das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^6}}=0.$$

Man setze $x=p^2$ und $y=q^2$, so erhält für $A=0$ unsere allgemeine Gleichung die Form

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{2B+Cp^2+2Dp^4+Ep^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{2B+Cq^2+2Dq^4+Eq^6}}=0$$

Man muß also $B=\frac{1}{2}a$, $C=0$, $D=0$ und $E=b$ setzen, so ergeben sich dann für die Coefficienten folgende Werthe:

$$\alpha=-a^2,\quad \beta=aM,\quad \gamma=-M^2,$$
$$\zeta=4bM,\quad \varepsilon=2ab,\quad \delta=M^2 \text{ und}$$
$$\Delta=M^3+a^2b;$$

folglich ist das vollständige Integrale

$$aM+M^2p^2+2abp^4+q^2(-M^2+4abp^2+4bMp^4)=$$
$$=\pm 2p\sqrt{(M^3+a^2b)(a+bp^6)}, \text{ oder}$$
$$aM+M^2q^2+2abq^4+p^2(-M^2+4abq^2+4bMq^4)=$$
$$=\pm 2q\sqrt{(M^3+a^2b)(a+bq^6)}.$$

Zusatz.

§. 634. Setzt man die Constante $M=-\sqrt[3]{a^2b}$, damit $M^3+a^2b=0$ werde, so erhält man ein particuläres Integrale, welches ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$p^2=\frac{q^2\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}{2q^2\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ oder } q^2=\frac{p^2\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}{2p^2\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

und welches der vorgelegten Differenzialgleichung ebenfalls Genüge leistet.

Aufgabe 83.

§. 635. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^2+cp^4+ep^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^2+cq^4+eq^6}}=0$$

durch einen algebraischen Ausdruck anzugeben.

Auflösung.

Die vorhergehende Differenzialgleichung läßt sich nach der algebraischen Darstellung ihres Integrals auf diese Form zurückführen, wenn man $x=p^2$, $y=q^2$ und $A=0$ setzt; denn man erhält

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{2B+Cp^2+2Dp^4+Ep^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{2B+Cq^2+2Dq^4+Eq^6}}=0.$$

Man hat demnach nur $A=0$, $B=\frac{a}{2}$, $C=b$, $D=\frac{c}{2}$, $E=e$ zu setzen, so erhält man für die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ folgende Werthe:

$\alpha=-a^2$, $\quad\beta=a(M-b)$, $\quad\gamma=-(M-b)^2$,
$\zeta=4eM-c^2$, $\varepsilon=c(M-b)+2ae$, $\delta=M^2-b^2+ae$,
$\Delta=M(M-b)^2+acM-abc+a^2e$
$\quad=(M-b)^3+b(M-b)^2+ac(M-b)+a^2e$;

und da die Constante M ganz willkürlich ist, so ist das vollständige Integrale

$$\beta+\delta p^2+\varepsilon p^4+q^2(\gamma+2\varepsilon p^2+\zeta p^4)=$$
$$=\pm 2p\sqrt{\Delta(a+bp^2+cp^4+ep^6)},$$
$$\beta+\delta q^2+\varepsilon q^4+p^2(\gamma+2\varepsilon q^2+\zeta q^4)=$$
$$=\pm 2q\sqrt{\Delta(a+bq^2+cq^4+eq^6)},$$

welche beyde Gleichungen zwar mit einander übereinstimmen, aber wegen der in der Differenzialgleichung herrschenden Zweydeutigkeit der Zeichen, nach Beseitigung derselben beyde bemerkt werden müssen. Aus beyden Fällen entspringt übrigens folgende rationale Gleichung:

$$0=\alpha+2\beta(p^2+q^2)+\gamma(p^4+q^4)+2\delta p^2q^2$$
$$+2\varepsilon p^2q^2(p^2+q^2)+\zeta p^4q^4.$$

Zusatz 1.

§. 636. Wenn die Constante M so bestimmt wird, daß $\Delta=0$

wird, so erhält man ein particuläres Integrale von der Form $q^2 = \frac{E + Fp^2}{G + Hp^2}$, was sich auch praktisch nachweisen läßt. Damit nämlich dieser Werth Genüge leiste, muß man

$$aG^3 + bEG^2 + cE^2G + eE^3 = 0$$

setzen, und hieraus bestimmt sich das Verhältniß $E:G$, dann aber findet man $F = -G$, und endlich

$$H = \frac{-cEG - 2cE^2}{aG} = \frac{2aG^2 + 2bEG + cE^2}{aE}.$$

Zusatz 2.

§. 637. Man ändere den Werth der Constanten M dergestalt, daß $M - b = \frac{a}{f^2}$ werde, so erhält man

$$\alpha = -a^2, \quad \beta = \frac{a^2}{f^2}, \quad \gamma = -\frac{a^2}{f^4},$$

$$\zeta = 4be - c^2 + \frac{4ae}{f^2}, \quad \varepsilon = \frac{ac}{f^2} + 2ae, \quad \delta = \frac{a^2}{f^4} + \frac{2ab}{f^2} + ae, \text{ und}$$

$$\Delta = \frac{a^2}{f^6}(a + bf^2 + cf^4 + ef^6),$$

und die Integralgleichung ist

$$a^2f^2 + a(a + 2bf^2 + ef^4)p^2 + af^2(c + 2ef^2)p^4$$
$$-q^2[a^2 - 2af^2(c + 2ef^2)p^2 + f^2(c^2f^2 - 4bef^2 - 4ae)p^4] =$$
$$= \pm 2afp\sqrt{(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)(a + bp^2 + cp^4 + ep^6)};$$

und hieraus erhellt, daß $q^2 = f^2$ für $p = 0$ werde.

Zusatz 3.

§. 638. Diese Gleichung läßt sich leicht auf folgende Form bringen:

$$af^2(a + bp^2 + cp^4 + ep^6) + ap^2(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)$$
$$- q^2(a - cf^2p^2)^2 - aef^2p^2(f^2 - p^2)^2 +$$
$$+ 4ef^2p^2q^2(af^2 + ap^2 + bf^2p^2) =$$
$$= \pm 2fp\sqrt{a(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)\,a(a + bp^2 + cp^4 + ep^6)};$$

wo man sogleich sieht, daß diese Gleichung für $e = 0$ durch Ausziehung der Wurzel sich verwandle in

$$f\sqrt{a(a + bp^2 + cp^4)} \pm p\sqrt{a(a + bf^2 + cf^4)} = q(a - cf^2p^2),$$

welche Gleichung das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^2+cp^4}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^2+cq^4}}=0$$

bezeichnet, wie wir schon oben gefunden haben.

Zusatz 4.

§. 639. Auf ähnliche Art leuchtet ein, daß, wenn e nicht verschwindet, das vollständige Integrale sich im Allgemeinen bequemer unter folgender Form darstellen lasse:

$$[f\sqrt{a(a+bp^2+cp^4+ep^6)}\pm p\sqrt{a(a+bf^2+cf^4+ef^6)}]^2=$$
$$=q^2(a-cf^2p^2)^2+4aef^2p^2(f^2-p^2)^2-4ef^2p^2q^2(af^2+ap^2+bf^2p^2).$$

Da hier $q=f$ für $p=0$ wird, so entspricht die letzte Gleichung folgender Relation zwischen den transcendenten Functionen:

$$\pm\Pi(p)\pm\Pi(q)=\pm\Pi(0)\pm\Pi(f).$$

Anmerkung 1.

§. 640. Die Gattungen der transcendenten Functionen, welche wir auf dem betretenen Wege gerade wie Kreisbogen mit einander vergleichen konnten, sind demnach in den zwey Integralformeln

$$\int\frac{dz}{\sqrt{[A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4]}}\quad\text{und}\quad\int\frac{dz}{\sqrt{[a+bz^2+cz^4+ez^6]}}$$

enthalten, und diese Methode scheint der Ausdehnung auf andere noch zusammengesetztere Formeln nicht fähig zu seyn. Die letztere Integralformel läßt im Nenner keine ungeraden Potenzen von z zu, wenn nicht zufällig eine einfache Substitution die Reduction auf jene Form möglich macht. Es ist aber leicht einzusehen, daß sich Ausdrücke von der Form

$$\int\frac{dz}{\sqrt{[A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4+Fz^5+Gz^6]}}$$

durchaus nicht nach dieser Methode behandeln lassen; denn wären auch die Coefficienten so beschaffen, daß man die angezeigte Wurzel ausziehen könnte, so erhielte man einen Ausdruck von der Form

$$\int\frac{dz}{a+bz+cz^2+ez^3},$$

und da das Integrale desselben sowohl Logarithmen als auch Kreisbogen enthalten würde, so ist es allerdings unmöglich, daß mehrere solche Functionen einer algebraischen Vergleichung fähig sind. Übrigens ist die erstere Formel viel umfassender als die letztere, weil diese aus

jener hervorgeht, so bald $A = 0$ und z^2 statt z geschrieben wird. Rücksichtlich der ersten Formel verdient bemerkt zu werden, daß sie ihre Form nicht ändert, wenn auch $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}$ gesetzt wird, denn man findet durch diese Substitution

$$\int \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)\,dy}{\left\{\begin{array}{c}\surd[A(\gamma + \delta y)^4 + 2B(\alpha + \beta y)(\gamma + \delta y)^3 + C(\alpha + \beta y)^2(\gamma + \delta y)^2 \\ + 2D(\alpha + \beta y)^3(\gamma + \delta y) + E(\alpha + \beta y)^4]\end{array}\right\}},$$

wo, wie man sieht, die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so genommen werden können, daß die ungeraden Potenzen verschwinden. Diese Größen können aber auch so bestimmt werden, daß das erste und letzte Glied verschwindet, denn dann fallen für $y = u^2$ in jenem Ausdrucke die ungeraden Potenzen weg.

Anmerkung 2.

§. 641. Am bequemsten werden die ungeraden Potenzen auf folgende Art weggeschafft:

Da die Formel

$$A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4$$

zuverläßig immer zwey reelle Factoren hat, so bringe man die Integralformel auf die Form

$$\int \frac{dz}{\surd(a + 2bz + cz^2)\,(f + 2gz + hz^2)},$$

welche sich für $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}$ verwandelt in

$$\int \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)\,dy}{\left\{\begin{array}{c}\surd[a(\gamma + \delta y)^2 + 2b(\alpha + \beta y)(\gamma + \delta y) + c(\alpha + \beta y)^2] \\ \surd[f(\gamma + \delta y)^2 + 2g(\alpha + \beta y)(\gamma + \delta y) + h(\alpha + \beta y)^2]\end{array}\right\}}.$$

Werden hier die Factoren des Nenners entwickelt, so findet man

$$(a\gamma^2 + 2b\alpha\gamma + c\alpha^2) + 2(a\gamma\delta + b\alpha\delta + b\beta\gamma + c\alpha\beta)y$$
$$+ (a\delta^2 + 2b\beta\delta + c\beta^2)y^2,$$
$$(f\gamma^2 + 2g\alpha\gamma + h\alpha^2) + 2(f\gamma\delta + g\alpha\delta + g\beta\gamma + h\alpha\beta)y$$
$$+ (f\delta^2 + 2g\beta\delta + h\beta^2)y^2,$$

und läßt man in beyden Ausdrücken das mittlere Glied verschwinden, so wird

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{-b\gamma - c\alpha}{a\gamma + b\alpha} = \frac{-g\gamma - h\alpha}{f\gamma + g\alpha},$$ und daher

$$bf\gamma^2 + (bg + cf)\alpha\gamma + cg\alpha^2 = ag\gamma^2 + (ah + bg)\alpha\gamma + bh\alpha^2,$$

oder $\gamma^2 = \frac{(ah - cf)\alpha\gamma + (bh - cg)\alpha^2}{bf - ag}$, und daher wird

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{ah - cf + \sqrt{[(ah - cf)^2 + 4(bf - ag)(bh - cg)]}}{2(bf - ag)}.$$

Wir könnten uns demnach damit begnügen, bloß jene Formeln, in welchen die ungeraden Potenzen fehlen, behandelt zu haben, was wir auch im Anfange dieses Kapitels gethan haben; allein wenn auch noch ein Zähler hinzukömmt, findet diese Reduction nicht mehr Statt.

Aufgabe 84.

§. 642. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4)}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{(A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4)}}$$

aufzufinden und in einer algebraischen Form darzustellen, wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Auflösung.

Das vollständige Integrale, durch transcendente Functionen ausgedrückt, ist

$$\Pi(y) = n\Pi(x) + \text{Const.}$$

Um nun dieses Integrale in einer algebraischen Form zu erhalten, setze man $M - C = L$, und nach den oben (§. 627) gefundenen Formeln

$\alpha = 4(AC - B^2 + AL)$, $\beta = 4AD + 2BL$, $\gamma = 4AE - L^2$,
$\zeta = 4(CE - D^2 + EL)$, $\varepsilon = 4BE + 2DL$, $\delta = 4AE + 4BD + 2CL + L^2$,
und

$$\Delta = L^3 + CL^2 + 4(BD - AE)L + 4(AD^2 + B^2E - ACE).$$

Wenn nun durch Substitution dieser Werthe

$$\beta + \delta p + \varepsilon p^2 + q(\gamma + 2\varepsilon p + \zeta p^2) =$$
$$= 2\sqrt{\Delta}\,[A + 2Bp + Cp^2 + 2Dp^3 + Ep^4],$$
$$\beta + \delta q + \varepsilon q^2 + p(\gamma + 2\varepsilon q + \zeta q^2) =$$
$$= -2\sqrt{\Delta}\,[A + 2Bq + Cq^2 + 2Dq^3 + Eq^4)$$

erhalten wird, so ist

$$\Pi(q) = \Pi(p) + \text{Const.}$$

Da nun aber diese beyden Gleichungen mit einander übereinstimmen, und in der rationalen Gleichung

$$\alpha + 2\beta(p+q) + \gamma(p^2+q^2) + 2\delta pq + 2\varepsilon pq(p+q) + \zeta p^2q^2 = 0$$

enthalten sind, so muß, wenn $q = b$ für $p = a$ werden soll, jene Constante L so bestimmt werden, daß

$$\alpha + 2\beta(a+b) + \gamma(a^2+b^2) + 2\delta ab + 2\varepsilon ab(a+b) + \zeta a^2b^2 = 0$$

wird, und dann erhält man

$$\Pi(q) = \Pi(p) + \Pi(b) - \Pi(a),$$

wo zwischen dem Constanten und Veränderlichen nicht mehr unterschieden wird.

Setzen wir also $p = b$, damit

$$\Pi(q) = 2\Pi(p) - \Pi(a)$$

werde, so stimmen mit dieser Gleichung die obigen algebraischen Gleichungen überein, wenn nur die Constante L so bestimmt wird, daß

$$\alpha + 2\beta(a+p) + \gamma(a^2+p^2) + 2\delta ap + 2\varepsilon ap(a+p) + \zeta a^2p^2 = 0$$

wird, und hieraus folgt dann die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}L(a-p)^2 = A + B(a+p) + Cap + Dap(a+p) + Ea^2p^2 \pm$$
$$\pm \sqrt{[A+2Ba+Ca^2+2Da^3+Ea^4][A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4]}.$$

Wird also dieser Werth für L genommen, und werden hieraus die Größen α, β, γ, δ, ε, ζ durch die obigen Formeln richtig bestimmt, so erhalten wir, wenn nun p und q als veränderlich, a aber als constant betrachtet wird, die Gleichung

$$\alpha + 2\beta(p+q) + \gamma(p^2+q^2) + 2\delta pq + 2\varepsilon pq(p+q) + \zeta p^2q^2 = 0$$

als das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dq}{\sqrt{[A+2Bq+Cq^2+2Dq^3+Eq^4]}} = \frac{2dp}{\sqrt{[A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4]}}.$$

Nachdem man q durch p auf diese Art ausgedrückt hat, bestimme man r mittelst der Gleichung

$$\alpha + 2\beta(q+r) + \gamma(q^2+r^2) + 2\delta qr + 2\varepsilon qr(q+r) + \zeta q^2r^2 = 0,$$

so wird

$$\Pi(r) - \Pi(q) = \Pi(p) - \Pi(a),$$

weil für $q = a$ und $r = p$ die Größe L, welche in den für α, β, γ, δ, ε, ζ erhaltenen Werthen erscheint, eben so wie oben bestimmt wird.

Da nun

$$\Pi(q) = 2\Pi(p) - \Pi(a), \text{ so wird}$$
$$\Pi(r) = 3\Pi(p) - 2\Pi(a).$$

Wird nun a als constant betrachtet, so ist jene zwischen q und r

aufgestellte algebraische Gleichung, wenn nach der vorhergehenden Gleichung q aus p bestimmt wird, das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{dr}{\sqrt{[A + 2Br + Cr^2 + 2Dr^3 + Er^4]}} = \frac{3dp}{\sqrt{[A + 2Bp + Cp^2 + 2Dp^3 + Ep^4]}}.$$

Nachdem nun r aus p gefunden ist, suche man s aus der Gleichung

$$\alpha + 2\beta(r + s) + \gamma(r^2 + s^2) + 2\delta rs + 2\varepsilon rs(r + s) + \zeta r^2 s^2 = 0,$$

während L immer den anfangs angegebenen Werth beybehält, so wird

$$\Pi(s) - \Pi(r) = \Pi(p) - \Pi(a), \text{ oder}$$
$$\Pi(s) = 4\Pi(p) - 3\Pi(a),$$

und daher bezeichnet jene algebraische Gleichung das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{ds}{\sqrt{[A + 2Bs + Cs^2 + 2Ds^3 + Es^4]}} = \frac{4dp}{\sqrt{[A + 2Bp + Cp^2 + 2Dp^3 + Ep^4]}}.$$

Da man auf diese Art so weit fortgehen kann als man will, so ist einleuchtend, daß man zur Bestimmung des vollständigen Integrales, welches der Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{\sqrt{[A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4]}} = \frac{ndp}{\sqrt{[A + 2Bp + Cp^2 + 2Dp^3 + Ep^4]}}$$

entspricht, folgende Operationen durchzuführen habe:

1) Man bestimme eine Größe L von der Beschaffenheit, daß

$$\tfrac{1}{2}L(p - a)^2 = A + B(a + p) + Cap + Dap(a + p) + Ea^2p^2 \pm$$
$$\pm \sqrt{[A + 2Ba + Ca^2 + 2Da^3 + Ea^4][A + 2Bp + Cp^2 + 2Dp^3 + Ep^4]},$$

werde.

2) Hieraus bestimme man die Größen α, β, γ, δ, ε, ζ, mit Hülfe der Formeln

$$\alpha = 4[AC - B^2 + AL], \beta = 4AD + 2BL, \gamma = 4AE - L^2,$$
$$\zeta = 4[CE - D^2 + EL], \varepsilon = 4BE + 2DL, \delta = 4AE + 4BD + 2CL + L^2.$$

3) Man bilde eine Reihe von Größen, p, q, r, s, t, ... z, deren erste p, zweyte q, dritte r u. s. w., deren letzte aber, nämlich die n^{te}, die Größe z ist, und welche nach und nach bestimmt werden mit Hülfe der Formeln

$$\alpha + 2\beta(p + q) + \gamma(p^2 + q^2) + 2\delta pq + 2\varepsilon pq(p + q) + \zeta p^2q^2 = 0,$$
$$\alpha + 2\beta(q + r) + \gamma(q^2 + r^2) + 2\delta qr + 2\varepsilon qr(q + r) + \zeta q^2r^2 = 0,$$
$$\alpha + 2\beta(r + s) + \gamma(r^2 + s^2) + 2\delta rs + 2\varepsilon rs(r + s) + \zeta r^2s^2 = 0,$$

u. s. w.

bis man endlich auf die letzte Größe z selbst kommt.

4) Die hieraus gefolgerte Relation zwischen p und x wird dann das vollständige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung seyn, und die Größe a vertritt die Stelle der willkürlichen, durch die Integration eingeführten Constante.

Zusatz.

§. 643. Es läßt sich also auch das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$\frac{m\,dy}{\sqrt{[A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4]}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{[A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4]}}$$

angeben, wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen. Denn man setze nur jedes Glied $=\frac{du}{\sqrt{[A+2Bu+Cu^2+2Du^3+Eu^4]}}$, und suche sowohl die zwischen x und u, als auch die zwischen y und u feststehende Relation, so erhält man durch Elimination von u eine algebraische Gleichung zwischen x und y.

Anmerkung.

§. 644. Damit die bey den einzelnen Gleichungen zu wiederholende Ausziehung der Wurzel keine Zweydeutigkeit veranlasse, so wird es zweckmäßig seyn, statt jeder einzelnen Gleichung zwey anzugeben, in welchen die Wurzel schon entwickelt ist. Um nämlich aus der ersten Gleichung den Werth von q durch p richtig ausgedrückt zu erhalten, haben wir zuerst,

$$q=\frac{-\beta-\delta p-\varepsilon p^2+2\sqrt{\Delta}(A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4)}{\gamma+2\varepsilon p+\zeta p^2},$$

dann aber müssen wir

$$2\sqrt{\Delta}(A+2Bq+Cq^2+2Dq^3+Eq^4)=$$
$$=-\beta-\delta q-\varepsilon q^2-p(\gamma+2\varepsilon q+\zeta q^2)$$

setzen, und auf diese Art haben wir bey der Aufsuchung der zwischen je zwey der folgenden Gleichungen bestehenden Relation zu verfahren. Übrigens ist noch zu bemerken, daß die durch m und n bezeichneten ganzen Zahlen positiv seyn müssen, und daß diese Untersuchung nicht auf negative Zahlen auszudehnen sey, und zwar um so weniger, weil die Differenzialformel $\frac{dz}{\sqrt{(A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4)}}$ ihre Natur ändert, sobald z negativ genommen wird. Da wir jedoch die Gleichung

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\text{Const.}$$

oben in einer algebraischen Form dargestellt haben, so lassen sich mit Hülfe derselben auch jene Fälle auflösen, in welchen m und n negative Zahlen bezeichnen; denn wäre

$$\Pi(z) = n \, . \, \Pi(p) + \text{Const.},$$

so suche man y, damit

$$\Pi(y) + \Pi(z) = \text{Const.}$$

werde, so erhält man

$$\Pi(y) = -n \, . \, \Pi(p) + \text{Const.}$$

Aufgabe 85.

§. 645. Es sey $\Pi(z)$ eine solche Function von z, daß

$$\Pi(z) = \int \frac{dz\,[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4]}{\sqrt{[A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4]}};$$

man vergleiche diese sich hieraus ergebenden Functionen.

Auflösung.

Aus den Coefficienten A, B, C, D, E bestimme man zugleich mit der willkürlichen Constante L folgende Werthe:

$\alpha = 4[AC - B^2 + AL]$, $\beta = 4AD + 2BL$, $\gamma = 4AE - L^2$,
$\zeta = 4[CE - D^2 + EL]$, $\varepsilon = 4BE + 2DL$, $\delta = 4AE + 4BD + 2CL + L^2$,

und zwischen den beyden Veränderlichen x und y setze man folgende Relation fest:

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta x^2y^2 = 0,$$

so wird

$$\frac{dx}{\sqrt{[A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4]}} + \frac{dy}{\sqrt{[A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4]}} = 0,$$

und für diese Gleichung hat man ohne Zweydeutigkeit

$$\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2) =$$
$$= 2\sqrt{\Delta}\,(A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4),$$
$$\beta + \delta y + \varepsilon y^2 + x(\gamma + 2\varepsilon y + \zeta y^2) =$$
$$= 2\sqrt{\Delta}\,(A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4),$$ wobey

$$\Delta = L^3 + CL^2 + 4(BD - AE)L + 4(AD^2 + B^2E - ACE).$$

Setzen wir demnach

$$\frac{dx\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4)}{\sqrt{[A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4]}} +$$
$$+ \frac{dy\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \mathfrak{E}y^4)}{\sqrt{[A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4]}} = 2dV.\sqrt{\Delta},$$

damit

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} + 2V.\sqrt{\Delta}$$

werde, so erhalten wir

$$\frac{dx\,[\mathfrak{B}(x-y) + \mathfrak{C}(x^2-y^2) + \mathfrak{D}(x^3-y^3) + \mathfrak{E}(x^4-y^4)]}{\sqrt{[A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4]}} = 2\,dV.\sqrt{\Delta},$$

oder

$$d.V = \frac{dx\,[\mathfrak{B}(x-y) + \mathfrak{C}(x^2-y^2) + \mathfrak{D}(x^3-y^3) + \mathfrak{E}(x^4-y^4)]}{\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2)}.$$

Man setze nun $x+y=t$ und $xy=u$, also $dx+dy=dt$ und $xdy+ydx=du$, so wird

$$dx = \frac{xdt - du}{x-y}, \quad \text{oder} \quad (x-y)\,dx = xdt - du,$$

dann aber ist $x = \frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{t^2}{4} - u}$. Durch diese Substitution aber nimmt die angenommene Gleichung folgende Form an:

$$\alpha + 2\beta t + \gamma t^2 + 2(\delta - \gamma)u + 2\varepsilon tu + \zeta u^2 = 0,$$

und daher durch Differenziation

$$dt(\beta + \gamma t + \varepsilon u) + du(\delta - \gamma + \varepsilon t + \zeta u) = 0, \text{ also}$$

$$dt = \frac{-du(\delta - \gamma + \varepsilon t + \zeta u)}{\beta + \gamma t + \varepsilon u}, \text{ und}$$

$$xdt - du = \frac{-du[\beta + \gamma t + \varepsilon u + (\delta - \gamma)x + \varepsilon tx + \zeta ux]}{\beta + \gamma t + \varepsilon u}, \text{ oder}$$

$$xdt - du = \frac{-du[\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2)]}{\beta + \gamma t + \varepsilon u};$$

und so erhalten wir

$$\frac{dx(x-y)}{\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2)} = \frac{-du}{\beta + \gamma t + \varepsilon u}, \text{ also}$$

$$dV = \frac{-du\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}t + \mathfrak{D}(t^2-u) + \mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{\beta + \gamma t + \varepsilon u}, \text{ oder}$$

$$dV = \frac{+dt\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}t + \mathfrak{D}(t^2-u) + \mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{\delta - \gamma + \varepsilon t + \zeta u}.$$

Durch Auflösung jener Gleichung finden wir aber

$$t = \frac{-\beta - \varepsilon u + \sqrt{[\beta^2 - \alpha\gamma + 2(\gamma^2 + \beta\varepsilon - \gamma\delta)u + (\varepsilon^2 - \gamma\zeta)u^2]}}{\gamma},$$

oder

$$t = \frac{-\beta - \varepsilon u + 2\sqrt{\Delta}\,(A + Lu + Eu^2)}{\gamma},$$

und hieraus ergibt sich dann

$$dV = \frac{-du\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}t + \mathfrak{D}(t^2-u) + \mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{2\sqrt{\Delta}\,(A + Lu + Eu^2)},$$

und daher

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} - \int \frac{du\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}t + \mathfrak{D}(t^2 - u) + \mathfrak{E}t(t^2 - 2u)]}{\sqrt{(A + Lu + Eu^2)}}.$$

Weil aber

$$u = \frac{-(\delta - \gamma) - \varepsilon t + \sqrt{[(\delta - \gamma)^2 - \alpha\zeta + 2[((\delta - \gamma)\varepsilon - \beta\zeta)\,t + (\varepsilon^2 - \gamma\zeta)\,t^2]}}{\zeta}$$

gefunden wird, und dieser Ausdruck übergeht in

$$u = \frac{-(\delta - \gamma) - \varepsilon t + 2\sqrt{\Delta}(L + 2Dt + Et^2)}{\zeta i.},$$ so wird

$$dV = \frac{dt\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}t + \mathfrak{D}(t^2 - u) + \mathfrak{E}t\,(t^2 - 2u)]}{2\sqrt{\Delta}\,(L + C + 2Dt + Et^2)},$$

und so erhalten wir in t:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const.} + \int \frac{dt\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}t + \mathfrak{D}(t^2 - u) + \mathfrak{E}t\,(t^2 - 2u)]}{\sqrt{[L + C + 2Dt + Et^2]}},$$

welcher Ausdruck, wenn er nicht algebraisch seyn sollte, sich doch gewiß durch Logarithmen oder Kreisbogen darstellen läßt. Dann aber hat man nach der Integration bloß für t wieder den Werth $x + y$ zu substituiren.

Zusatz 1.

§. 646. Soll $y = b$ für $x = a$ werden, so muß die Constante L so bestimmt werden, daß

$$\tfrac{1}{2}L(b-a)^2 = A + B(a+b) + Cab + Dab(a+b) + Ea^2b^2 \pm$$
$$\pm \sqrt{[A + 2Ba + Ca^2 + 2Da^3 + Ea^4][A + 2Bb + Cb^2 + 2Db^3 + Eb^4]}$$

wird; dann ist also unsere Constante $= \Pi(a) + \Pi(b)$, das letztere Integrale so genommen, daß es für $t = a + b$ verschwindet.

Zusatz 2.

§. 647. Auf dieselbe Art läßt sich auch die Differenz der Functionen $\Pi(x) - \Pi(y)$ darstellen, wenn das Zeichen der Wurzelgröße in der einen Formel geändert wird, wodurch sich zugleich das Zeichen der anderen Differenzialformel in das entgegengesetzte verwandelt.

Zusatz 3.

§. 648. Die zur Vergleichung dieser Functionen dienende Größe V wird algebraisch seyn, wenn die Differenzialformel

$$\frac{dt\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\zeta t + \mathfrak{D}(\delta - \gamma + \varepsilon t + \zeta t^2) + \mathfrak{E}\,[2(\delta - \gamma) + 2\varepsilon t + \zeta t^2]\,t]}{\zeta\sqrt{[L + C + 2Dt + Et^2]}}$$

die Integration zuläßt, weil der andere Theil $\frac{-2dt\sqrt{\Delta}}{\zeta}$ (D + 2Et) für sich integrabel ist.

Anmerkung.

§. 649. Wir haben also diese allerdings neue Theorie der Vergleichung solcher transcendenten Functionen so umständlich erörtert, als es gegenwärtig nur immer erforderlich zu seyn schien. Sobald wir aber dieselbe auf die Vergleichung der Bogen krummer Linien, deren Länge durch solche Functionen ausgedrückt wird, anwenden wollen, müssen wir uns auf eine ausführlichere Untersuchung einlassen, weil die Betrachtung der auf diese Art gefundenen besonderen Eigenschaften von vorzüglichem Nutzen seyn kann. Diese Theorie kann aber zweckmäßig in die Lehre von der Auflösung der Gleichungen verwiesen werden, weil sie uns die Integrale solcher Gleichungen vollständig, und zwar in algebraischer Form darstellen lehrt, was nach anderen Methoden vergeblich versucht wird. Die allgemeine Methode, die Integrale aller Differenzialgleichungen näherungsweise zu bestimmen, wird also diesen Abschnitt beschließen.

Kapitel VII.

on der Integration der Differenzialgleichungen durch Annäherung.

Aufgabe 86.

§. 650. Das vollständige Integrale von was ımmer für einer gegebenen Differenzialgleichung ıherungsweise zu bestimmen.

Auflösung.

Seyen x, y die beyden Veränderlichen, zwischen welchen eine ifferenzialgleichung vorgelegt wird, und zwar von der Form $\frac{dy}{dx} = V$, obey V irgend eine Function von x und y bezeichnet. Da nun das llständige Integrale gesucht wird, so ist dieß so zu verstehen, daß e eine Veränderliche y irgend einen gegebenen Werth $y = b$ erhalte, enn der anderen Veränderlichen irgend ein bestimmter Werth $x = a$ ygelegt wird. Den ersten Schritt zur Auflösung unseres Problemes ollen wir also dadurch machen, daß wir den Werth für y suchen, enn der Veränderlichen x ein von a nur wenig verschiedener Werth ygelegt wird, daß wir nämlich y für $x = a + \omega$ suchen. Da nun ω ne sehr kleine Größe bezeichnet, so wird auch y von b nur sehr wenig rschieden seyn; während also x von a in $a + \omega$ übergeht, kann man e Größe V als constant betrachten. Es sey demnach $V = A$ für $= a$ und $y = b$, so erhalten wir für diese kleine Änderung $\frac{dy}{dx} = A$, nd daher durch Integration $y = b + A(x - a)$, wo eine solche Conante beygesetzt wurde, daß $y = b$ für $x = a$ werde. Setzen wir also $= a + \omega$, so wird $y = b + A\omega$. Wie wir demnach hier aus den sprünglich gegebenen Werthen $x = a$ und $y = b$ die nächst gelegenen Berthe $x = a + \omega$ und $y = b + A\omega$ gefunden haben, so können wir ach auf dieselbe Art durch sehr kleine Intervalle fortschreiten, bis man ıdlich auf Werthe stößt, die von den ursprünglichen noch so weit entrnt seyn mögen. Damit diese Operationen besser übersehen werden, ühre man sie nach und nach auf folgende Art durch. Man setze

für	nach und nach die Werthe
x	$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{IV},\ \ldots\ldots\ 'x\quad x,$
y	$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{IV},\ \ldots\ldots\ 'y\quad y,$
V	$A,\ A',\ A'',\ A''',\ A^{IV},\ \ldots\ldots\ 'V,\ V.$

Man erhält nämlich aus dem ersten Paare der gegebenen Größen $x = a$ und $y = b$ den Werth $V = A$, für das zweyte Paar wird dann seyn $b' = b + A(a' - a)$, wo die Differenz $a' - a$ nach Belieben klein genommen werden kann. Setzen wir also $x = a'$ und $y = b'$, so wird $V = A'$, und daher erhält man für das dritte Paar

$$b'' = b' + A'(a'' - a'),$$

wo $V = A''$ gefunden wird, wenn man $x = a''$ und $y = b''$ setzt. Wir haben so für das vierte Paar $b''' = b'' + A''(a''' - a'')$, und demnach $V = A'''$ für $x = a'''$ und $y = b'''$, und so kann man fortschreiten, bis man zu den Werthen kommt, die von den ursprünglichen so weit entfernt sind, als man nur immer will. Die erste Reihe, welche die auf einander folgenden Werthe von x darstellt, kann nach Belieben angenommen werden, wenn nur jene Werthe in sehr kleinen Intervallen wachsen oder abnehmen.

Zusatz 1.

§. 651. Für die einzelnen noch so kleinen Intervalle wird also die Rechnung auf dieselbe Art durchgeführt, und so werden die Werthe, von welchen die folgenden abhängen, erhalten. Auf diese Art können demnach die Werthe von y selbst bestimmt werden, welche den einzelnen für x angenommenen Werthen entsprechen.

Zusatz 2.

§. 652. Je kleiner die Intervalle angenommen werden, durch welche man die Werthe von x fortschreiten läßt, desto genauer werden die einzelnen Größen bestimmt. Inzwischen werden die bey den einzelnen Schritten begangenen Fehler, wenn sie auch noch so klein sind, wegen ihrer großen Anzahl dennoch bedeutend.

Zusatz 3.

§. 653. Die Fehler kommen bey dieser Rechnung daher, daß wir bey den einzelnen Intervallen die beyden Größen x und y als constant betrachten, und so die Function V als eine unveränderliche Größe erhalten. Je weniger sich also der Werth von V von einem Intervalle zum andern ändert, desto größere Fehler sind zu befürchten.

Anmerkung 1.

§. 654. Dieser nachtheilige Umstand ereignet sich besonders dann, wenn der Werth von V entweder verschwindet, oder in das Unendliche übergeht, obgleich die den Größen x und y zugehörigen Werthe hinreichend klein genommen werden. In diesen Fällen wird man die gewissermaßen ungeheuren Fehler auf folgende Art vermeiden: Es sey für den Anfang eines solchen Intervalles $x = a$ und $y = b$; dann aber setze man in der vorgelegten Gleichung $x = a + \omega$ und $y = b + \psi$, damit $\frac{d\psi}{d\omega} = V$ werde, bey der Substitution der Werthe $x = a + \omega$ und $y = b + \psi$ in dem Werthe von V aber betrachte man die Größen ω und ψ als sehr klein, indem man nämlich die höhern Potenzen derselben gegen die niedrigeren wegfallen läßt, denn auf diese Art wird man meistens die Integration für diese Intervalle wirklich ausführen können. Diese Verbesserung wird jedoch kaum nöthig seyn, wenn sich nicht die aus den Werthen a und b entstandenen Glieder gegenseitig aufheben. Hätte man z. B. die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{x^2 - y^2}$, und es sollte gleich anfangs $x = a$ und $y = a$ werden, so setze man für das hier beginnende Intervall $x = a + \omega$ und $y = a + \psi$, so erhält man

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \frac{a^2}{2a\omega - 2a\psi}, \quad \text{oder} \quad 2\omega d\psi - 2\psi d\psi = a d\omega, \text{ oder}$$

$$d\omega - \frac{2\omega d\psi}{a} = \frac{-2\psi d\psi}{a}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch $e^{-\frac{2\psi}{a}} = 1 - \frac{2\psi}{a}$ und integrirt sie, so erhält man

$$\left(1 - \frac{2\psi}{a}\right)\omega = -\frac{2}{a}\int\left(1 - \frac{2\psi}{a}\right)\psi d\psi = \frac{-\psi^2}{a},$$

weil $\psi = 0$ für $\omega = 0$ werden muß. Man erhält also

$$\omega = \frac{-\psi^2}{a - 2\psi} = \frac{-\psi^2}{a} \quad \text{oder} \quad a(a^1 - a) = -(b^1 - b)^2,$$

wobey $b = a$; und hieraus ergibt sich für das folgende Intervall $b^1 = b + \sqrt{-a(a^1 - a)}$, in welchem Falle der Werth von x offenbar die Größe a nicht überschreiten kann, weil sonst y imaginär werden würde.

Anmerkung 2.

§. 655. Die Regeln, welche die Integralien der Differenzial-

gleichungen mittels unendlicher Reihen darstellen lehren, tragen gewöhnlich das Gebrechen an sich, daß sie nur auf particuläre Integrale führen, und weil überdieß jene Reihen nur in einem bestimmten Falle convergiren, und demnach in allen andern Fällen unbrauchbar sind. Wäre z. B. die Gleichung $dy + ydx = ax^n dx$ gegeben, so müßten wir im Allgemeinen eine Reihe von folgender Gestalt annehmen:

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + Dx^{\alpha+3} + Ex^{\alpha+4} + \ldots$$

durch deren Substitution man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha Ax^{\alpha-1} + (\alpha+1)Bx^{\alpha} + (\alpha+2)Cx^{\alpha+1} + (\alpha+3)Dx^{\alpha+2} + \ldots \\ -\,ax^n + \quad A \quad + \quad B \quad + \quad C \quad + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Man setze also $\alpha - 1 = n$ oder $\alpha = n + 1$, so wird $A = \frac{a}{n+1}$, und wenn die übrigen Coefficienten $= 0$ gesetzt werden:

$$B = \frac{-A}{n+2},\quad C = \frac{-B}{n+3},\quad D = \frac{-C}{n+4},\ \text{rc.},$$

und so erhalten wir die Reihe

$$y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{ax^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{ax^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\ \text{rc.}$$

Allein dieses Integrale ist nur ein particuläres, weil, wenn x verschwindet, auch zugleich y verschwindet, wenn nicht $n + 1$ eine negative Zahl bezeichnet; dann aber convergirt diese Reihe nicht, außer für einen sehr kleinen Werth von x. Es lassen sich demnach auch hieraus keineswegs die Werthe von y bestimmen, welche beliebigen Werthen von x entsprechen. Von diesen Mängeln aber ist die Methode, welche wir hier in Kürze angegeben haben, frey, weil sie erstlich das Integrale vollständig gibt, so lange sie nämlich für einen gegebenen Werth von x auch den der Größe y beygelegten Werth gibt, und weil sie ferner durch sehr kleine Intervalle fortschreitend, der Wahrheit sich immer mehr annähert, und so weit fortgesetzt werden kann, als man nur immer will. Diese Methode wird aber auf folgende Weise noch mehr vervollkommnet werden können.

Aufgabe 87.

§. 656. Die vorhergehende Methode, Differenzialgleichungen näherungsweise zu integriren, mehr zu

vervollkommnen, damit die Resultate weniger von der Wahrheit abweichen.

Auflösung.

Wenn man die Gleichung $\frac{dy}{dx} = V$ zu integriren hat, so begeht man, nach der oben auseinander gesetzten Methode verfahrend, einen Fehler, der daher entsteht, daß man durch die einzelnen Intervallen die Function V als constant betrachtet, da sie doch in der That einer Änderung unterliegt, besonders wenn die Intervalle nicht sehr klein genommen werden. Allein die Veränderlichkeit der Function V kann bey jedem Intervalle auf ähnliche Art in Rechnung gebracht werden, wie wir es im vorhergehenden Abschnitte, §. 321, gethan haben. Denn wenn dem x ein bestimmtes y zukommt, so entspricht auch dem Ausdrucke $x - ndx$, der Natur der Differenzialien gemäß, bekanntlich der Werth

$$y - n\,dy + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} d^2y - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} d^3y + \ldots$$

welcher Ausdruck, wenn n unendlich groß genommen wird, übergeht in

$$y - n\,dy + \frac{n^2}{1\,.\,2} d^2y - \frac{n^3}{1\,.\,2\,.\,3} d^3y + \frac{n^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} d^4y - \ldots$$

Nun setze man $x - ndx = a$, und

$$y - n\,dy + \frac{n^2}{1\,.\,2} d^2y - \frac{n^3}{1\,.\,2\,.\,3} d^3y + \frac{n^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} d^4y - \ldots = b,$$

und betrachte bey jedem Intervalle diese Werthe als die ursprünglichen, während man durch x und y die andern Grenzwerthe bezeichnet. Weil also $n = \frac{x-a}{dx}$, so wird

$$y = b + \frac{(x-a)}{1} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(x-a)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{(x-a)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots,$$

welche Reihe, wenn x nur wenig die Größe a überschreitet, sehr schnell convergirt, und daher auch zur näherungsweisen Darstellung des Werthes y ganz geeignet ist. Es muß jedoch bey der Entwickelung der einzelnen Glieder dieser Reihe bemerkt werden, daß $\frac{dy}{dx} = V$, und daher $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dV}{dx}$ sey. Weil aber V eine Function von x und y be-

zeichnet, so wird, wenn man $dV = Mdx + Ndy$ setzt, wegen $\frac{dy}{dx} = V$, offenbar $\frac{d^2y}{dx^2} = M + NV$, oder nach der schon früher festgesetzten Bezeichnungsart $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dV}{dx}\right) + V \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right)$, und so wie dieser Ausdruck aus dem Vorhergehenden $\frac{dy}{dx} = V$ entstanden ist, eben so wird auch aus ihm der folgende entstehen:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + 2V\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)$$
$$+ V\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + V^2\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right).$$

Da jedoch der Werth von y noch nicht bekannt ist, so wird auf diese Art eine algebraische Gleichung gefunden, welche die zwischen x und y bestehende Relation ausdrückt, wenn es nicht zufällig schon hinreichend ist, in den einzelnen Gliedern $y = b$ zu setzen.

Die andere, §. 322 auseinander gesetzte Operation aber wird den Werth von y, welcher dem x am Ende eines jeden Intervalles entspricht, in einer entwickelten Form darstellen, wenn im Anfange eben jenes Intervalles $x = a$ und $y = b$ war. Denn setzen wir $x = a + nda$, und betrachten a und b als veränderliche Größen, so wird

$$y = b + ndb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3b + \ldots$$

und weil $n = \frac{x-a}{da}$, also eine unendliche Zahl ist, so wird

$$y = b + (x-a) \cdot \frac{db}{da} + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2b}{da^2} + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3b}{da^3} + \ldots$$

Es ist aber $\frac{db}{da} = V$, wenn man in der Function V setzt $x = a$ und $y = b$, und dann ist, wenn eben diese Werthe für x und y gesetzt werden:

$$\frac{d^2b}{da^2} = \left(\frac{dV}{dx}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right), \text{ und}$$

$$\frac{d^3b}{da^3} = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + 2V\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right) + V^2\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$$
$$+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left[\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)\right],$$

und hieraus muß man auf ähnliche Art die folgenden Quotienten ableiten. Es sey also, wenn $x = a$ und $y = b$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = B, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = C, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = D, \text{ etc.,}$$

so wird dem Werthe $x = a + \omega$ der Werth

$$y = b + A\omega + \tfrac{1}{2}B\omega^2 + \tfrac{1}{6}C\omega^3 + \tfrac{1}{24}D\omega^4 + \ldots$$

entsprechen, welche beyden Werthe für das nächstfolgende Intervall schon die anfänglichen Gränzen bezeichnen, aus welchen dann auf ähnliche Art die andern Gränzwerthe entwickelt werden müssen.

Zusatz 1.

§. 657. Weil wir hier die Veränderlichkeit der Function V berücksichtiget haben, so können wir jetzt die Intervalle schon größer nehmen, und wenn wir jene Ausdrücke A, B, C, D... ohne Ende fortsetzen wollten, so könnten die Intervalle, so groß man nur immer will, genommen werden, nur würden wir dann für y eine unendliche Reihe erhalten.

Zusatz 2.

§. 658. Wenn wir nur die beyden ersten Glieder der gefundenen Reihe nehmen, so daß $y = b + A\omega$ wird, so erhalten wir die vorhergehende Bestimmung, woraus zugleich erhellt, daß der dort begangene Fehler allen nachfolgenden Gliedern zusammengenommen gleich sey.

Zusatz 3.

§. 659. Wenn wir aber auch mehrere der Anfangsglieder der obigen Reihe beybehalten, so wird es dennoch nicht gut seyn, die Intervalle allzu groß zu nehmen, damit ω einen kleinen Werth erhalte, besonders wenn die Größen B, C, D... sehr groß ausfallen sollten.

Anmerkung.

§. 660. Wenn einige der Coefficienten A, B, C, D... unendlich groß werden sollten, so würden diese Operationen auf eine höchst nachtheilige Art gestört, allein dieß ereignet sich nur bey gewissen Intervallen, wo die Function V selbst entweder verschwindet oder unendlich wird, und wir haben bereits angedeutet, wie man diesem Übelstande begegnen könne, bald aber werden wir diesen Punct genauer erörtern. Übrigens wird für die einzelnen Intervalle die Rechnung immer auf dieselbe Art geführt, so daß, wenn für das erste Intervall, welches von den willkürlich angenommenen Werthen $x = a$ und $y = b$ beginnt, die Relation gefunden ist, dieselbe auch für die folgenden Intervalle gilt. Denn da für das Ende des ersten Intervalles

$$x = a + \omega = a', \text{ und}$$
$$y = b + A\omega + \tfrac{1}{2}B\omega^2 + \tfrac{1}{6}C\omega^3 + \tfrac{1}{24}D\omega^4 + \ldots = b'$$
wird, so werden eben diese Gränzwerthe die Anfangswerthe für das zweyte Intervall, aus welchen auf ähnliche Art die Endwerthe gesucht werden müssen; hier wird nämlich die Rechnung mit den Größen a' und b' eben so geführt, wie bey der ersten Rechnung mit a und b, was aus den nachfolgenden Beyspielen noch deutlicher erhellen wird.

Beyspiel 1.

§. 661. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung $dy = dx\,(x^n + cy)$ näherungsweise zu bestimmen.

Da hier $V = \frac{dy}{dx} = x^n + cy$, so erhält man durch Differenziation $\frac{d^2y}{dx^2} = nx^{n-1} + cx^n + c^2y$, und so ferner

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)x^{n-2} + ncx^{n-1} + c^2x^n + c^3y,$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)cx^{n-2} + nc^2x^{n-1} + c^3x^n + c^4y,$$
u. s. w.

Nehmen wir also an, daß dem Werthe $x = a$ der Werth $y = b$ entspreche, so gehört zu jedem andern Werthe $x = a + \omega$ der Werth

$$y = b + \omega(cb + a^n) + \tfrac{1}{2}\omega^2(c^2b + ca^n + na^{n-1})$$
$$+ \tfrac{1}{6}\omega^3[c^3b + c^2a^n + nca^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}]$$
$$+ \tfrac{1}{24}\omega^4[c^4b + c^3a^n + nc^2a^{n-1} + n(n-1)ca^{n-2} + n(n-1)(n-2)a^{n-3}]$$
$$+ \ldots\ldots,$$

welche Reihe sehr schnell convergirt, so bald ω klein genug genommen wird. Setzen wir nun $a + \omega = a'$ und den zugehörigen Werth von $y = b'$, so werden wir auf dieselbe Art zu den folgenden Ausdrücken kommen, welche Operation wir nach Belieben fortsetzen können.

Beyspiel 2.

§. 662. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung $dy = dx\,(x^2 + y^2)$ näherungsweise zu bestimmen.

Da hier $\frac{dy}{dx} = V = x^2 + y^2$ ist, so findet man durch fortgesetztes Differenziiren

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2x^2y + 2y^3,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4y + 40x^2y^3 + 24y^5,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 40x^2 + 24y^2 + 104x^3y + 120xy^3 + 16x^6 + 136x^4y^2 + 240x^2y^4 + 120y^6.$$

Wird daher anfangs $x = a$ und $y = b$ gesetzt, so ergibt sich

$A = a^2 + b^2,$

$B = 2a + 2a^2b + 2b^3,$

$C = 2 + 4ab + 2a^4 + 8a^2b^2 + 6b^4,$

$D = 4b + 12a^3 + 20ab^2 + 16a^4b + 40a^2b^3 + 24b^5,$

$E = 40a^2 + 24b^2 + 104a^3b + 120ab^3 + 16a^6 + 136a^4b^2 + 240a^2b^4 + 120b^6;$

daher wird zu jedem andern Werthe $x = a + \omega$ der Werth

$$y = b + A\omega + \tfrac{1}{2}B\omega^2 + \tfrac{1}{6}C\omega^3 + \tfrac{1}{24}D\omega^4 + \tfrac{1}{120}E\omega^5 + \ldots$$

gehören, und aus zwey solchen zusammengehörigen Werthen $x = a'$ und $y = b'$ können wieder die nächstfolgenden abgeleitet werden.

Anmerkung.

§. 663. Weil hier alles auf die Bestimmung der Coefficienten $A, B, C, D\ldots$ ankommt, so bemerke ich, daß man dieselben ohne Differenziation finden könne, was bey unserem letzten Beyspiele $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ auf folgende Art geschieht. Da $y = b$ für $x = a$ werden soll, so setzen wir allgemein $x = a + \omega$ und $y = b + \psi$, wodurch unsere Gleichung folgende Form annimmt:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = a^2 + b^2 + 2a\omega + \omega^2 + 2b\psi + \psi^2,$$

und weil ψ zugleich mit ω verschwindet, so setze man

$$\psi = \alpha\omega + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3 + \delta\omega^4 + \varepsilon\omega^5 + \ldots$$

und durch Substitution dieses Werthes ergibt sich

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta\omega + 3\gamma\omega^2 + 4\delta\omega^3 + 5\varepsilon\omega^4 + \ldots = {} & a^2 + b^2 + 2a\omega + \omega^2 \\ & + 2\alpha b\omega + 2\beta b\omega^2 + 2\gamma b\omega^3 + 2\delta b\omega^4 + \ldots \\ & + \alpha^2\omega^2 + 2\alpha\beta\omega^3 + 2\alpha\gamma\omega^4 + \ldots \\ & + \beta^2\omega^4.\end{aligned}$$

Werden also die einzelnen Coefficienten = o gesetzt, so erhält man

$$\alpha = a^2 + b^2,\quad 2\beta = 2\alpha b + 2a,\quad 3\gamma = 2\beta b + \alpha^2 + 1;$$
$$4\delta = 2\gamma b + 2\alpha\beta,\quad 5\varepsilon = 2\delta b + 2\alpha\gamma + \beta^2,$$
$$6\zeta = 2\varepsilon b + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma,\ \text{rc. rc.},$$

also dieselben Werthe, welche oben durch Differenziation gefunden werden.

Diese Methode zeichnet sich von der vorigen nicht allein durch größere Einfachheit aus, sondern sie hat auch noch den Vorzug, daß sie immer Anwendung findet, während die obige Methode bisweilen ohne Erfolg gebraucht wird, wie dieß bey den angeführten Beyspielen der Fall ist, wenn die anfänglichen Werthe a und b verschwinden sollten, wo dann auch die meisten Coefficienten verschwinden würden; ja es kann sich, wie wir schon oben bemerkt haben, der mißliche Umstand ereignen, daß alle Coefficienten entweder verschwinden, oder unendlich werden. Dieß ist jedoch nur der Fall bey gewissen Intervallen, für welche demnach die Rechnung auf eine besondere Weise durchgeführt werden muß; für die übrigen Intervalle aber scheint die hier gelehrte Methode durch fortgesetztes Differenziiren bequemer zu seyn, weil die Differenziation sich oft leichter ausführen läßt, als die Substitution, und auf sicheren Regeln beruht, die auch bey transcendenten Gleichungen ihre Anwendung finden. Für jene besondern Intervalle müssen demnach eigene Vorschriften gelehrt werden.

Aufgabe 88.

§. 664. **Wenn bey der Integration der Gleichung $\frac{dy}{dx} = V$ es sich für irgend ein Intervall ereignet, daß die Größe V entweder verschwindet, oder unendlich wird, für dieses Intervall die Integration auszuführen.**

Auflösung.

Für den Anfang des Intervalles, welches wir betrachten, sey $x = a$ und $y = b$. Da in diesem Falle V entweder verschwindet oder unendlich wird, so setzen wir $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$, so daß für $x = a$ und $y = b$ entweder P oder Q, oder beyde Größen zugleich verschwinden. Um nun von diesen Gränzen weiter zu gehen, setzen wir $x = a + \omega$ und

$y = b + \psi$, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{d\omega}$, und sowohl P als Q erscheint als Function von ω und ψ, von welchen wenigstens die eine verschwindet, wenn $\omega = 0$ und $\psi = 0$ gesetzt wird. Um nun das Verhältniß zwischen ω und ψ wenigstens näherungsweise aufzufinden, setze man $\psi = m\omega^n$, so wird $\frac{d\psi}{d\omega} = mn\omega^{n-1}$ und daher $mnQ\omega^{n-1} = P$, wo P und Q wegen $\psi = m\omega^n$ Potenzen von ω enthalten werden, und es ist hinreichend, von denselben nur die niedrigsten Potenzen beyzubehalten, da die höhern gegen dieselben als verschwindend betrachtet werden können. Die niedrigsten Potenzen von ω sind also einander gleich zu stellen, und gleich Null zu setzen, woraus sich sowohl der Exponent n, als auch der Coefficient m bestimmen wird. Wollen wir dann die zwischen ω und ψ bestehende Relation genauer kennen lernen, so gehen wir nach der Bestimmung von m und n zu den höhern Potenzen über, indem wir

$$\psi = m\omega^n + M\omega^{n+\mu} + N\omega^{n+\nu} + \ldots$$

setzen, so werden dadurch auf ähnliche Art die folgenden Theile bestimmt werden, und zwar in so weit, als es rücksichtlich der Größe des Intervalles oder der kleinen Größe ω nöthig erscheint.

Zusatz 1.

§. 665. Wenn für $x = a$ und $y = b$ weder P noch Q verschwindet, so findet man nach Substitution dieser Werthe $\frac{d\psi}{d\omega} = \frac{A + \ldots}{\alpha + \ldots}$, und daher näherungsweise $\alpha\, d\psi = A\, d\omega$ und $\psi = \frac{A}{\alpha} \cdot \omega$, welches das erste Glied der vorhergehenden Näherungsformel ist, und ist dieses gefunden, so ergeben sich die übrigen Glieder wie vorher.

Zusatz 2.

§. 666. Verschwindet bloß α, so erhält man näherungsweise

$$\frac{d\psi}{d\omega}(M\omega^\mu + N\psi^\nu + \ldots) = A,$$

und wird $\psi = m\omega^n$ gesetzt, so findet man

$$A = mn\omega^{n-1}(M\omega^\mu + Nm^\nu\omega^{n\nu});$$

welcher Ausdruck aber seine Gültigkeit verliert, wenn nicht $\nu(1-\mu) > \mu$ oder $\nu > \frac{\mu}{1-\mu}$ wird. Sollte aber $\nu < \frac{\mu}{1-\mu}$ seyn, so muß man

$n - 1 + n\nu = 0$ oder $n = \frac{1}{1+\nu}$ setzen, indem man das andere Glied als die niedrigste Potenz betrachtet. Ist aber $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$, so sind beyde Glieder für einerley Potenzen zu betrachten, und man erhält $n = 1 - \mu$ und $A = mn\,(M + N m^{\nu})$, woraus der Werth von m zu bestimmen ist.

Anmerkung.

§. 667. Schwerlich kann man hier eine allgemeine Vorschrift geben, allein es wird in einem gegebenen Falle nicht schwer seyn, alle zur Auflösung führenden Mittel zu erkennen. Wenn alle Exponenten ganze Zahlen wären, so könnte man hier Newton's Regel, nach welcher mit Hülfe des Parallelogrammes die Auflösung der Gleichungen gelehrt wird, zu Hülfe nehmen, dann aber ist die Reduction der gebrochenen Exponenten auf ganze Zahlen eine hinlänglich bekannte Sache. Allein derley Fälle ereignen sich so selten, daß es unnütz wäre, bey den Vorschriften lange zu verweilen, welche der Geübte in jedem Falle sich leicht selbst entwerfen wird. Käme man z. B. auf die Gleichung $\frac{d\psi}{d\omega}(\alpha\sqrt{\omega} + \beta\psi) = \gamma$, so erhellt aus dem Obigen, daß die erste Operation auf den Ausdruck $\psi = m\sqrt{\omega}$ führe, und daher wird $\frac{1}{2}m(\alpha + \beta m) = \gamma$, und hieraus ergibt sich der Werth von m und zwar auf doppelte Weise. Diese Gleichung läßt sich aber auch homogen machen, wenn $\sqrt{\omega} = p$ gesetzt wird, und kann demnach wirklich integrirt werden. Weil man aber hievon kaum jemahls Gebrauch machen wird, so wollen wir nicht länger bey diesem Gegenstande verweilen, sondern lieber jene Materien auseinander setzen, welche in diesem Theile noch behandelt werden müssen, nämlich die Auflösungsmethode solcher Differenzialgleichungen, bey welchen das Verhältniß der Differenzialien, nämlich $\frac{dy}{dx} = p$ entweder in höhern Potenzen oder selbst in transcendenten Functionen verwebt erscheint, und nach Beendigung dieses Gegenstandes wollen wir zu dem zweyten Theile übergehen, in welchem die Differenzialien höherer Grade vorkommen.

Erstes Buch

der

Integralrechnung.

Erster Theil. Dritter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

on der Auflösung der Differenzialgleichungen, y welchen die Differenzialien in höhern Poten- n erscheinen, oder selbst in transcendenter Form vorkommen.

Aufgabe 89.

§. 668. Wenn zwischen den Differenzialien die :lation $\frac{dy}{dx} = p$ besteht, und es wird irgend eine eichung zwischen den beyden Größen x und p gege- n, so soll man die zwischen den Veränderlichen und y bestehende Relation selbst auffinden.

Auflösung.

Wenn irgend eine Gleichung zwischen p und x gegeben wird, › man gibt die Auflösung der Gleichung zu, so drücke man mit Hülfe selben p durch x aus, und man wird eine Function von x finden, che der Größe p gleich seyn wird. Man wird also auf eine Glei- ng von der Form $p = X$ kommen, wo X irgend eine Function der ;igen Veränderlichen x bezeichnet. Da nun $p = \frac{dy}{dx}$ ist, so erhal- wir $dy = X dx$, und so ist die vorgelegte Frage auf den ersten chnitt zurückgeführt, nach welchem man das Integrale der Formel l x bestimmen muß, und dann ist das gesuchte Integrale $y = \int X dx$.

Ist die zwischen x und p gegebene Gleichung so gestaltet, daß aus ihr leichter x durch p ausdrücken läßt, so suche man x, und n soll $x = P$ erhalten, wobey P irgend eine Function von p be- hnet. Wird also diese Gleichung differenzirt, so erhält man $dx = dP$, › daher $dy = p dx = p dP$, woraus dann durch Integration $= \int p dP$ oder $y = pP - \int P dp$ gefunden wird. Es werden

also die beyden Veränderlichen x und y durch die dritte p so bestimmt, daß

$$x = P \quad \text{und} \quad y = pP - \int P dp$$

wird, und hieraus ergibt sich dann die zwischen x und y statt findende Relation von selbst.

Wenn sich weder p durch x, noch x durch p bequem ausdrücken läßt, so kann man oft beyde leicht durch eine neue Veränderliche u bestimmen. Setzen wir also, man fände $x = U$ und $p = V$, so daß U und V Functionen derselben Veränderlichen u bezeichnen, so wird

$$dy = p dx = V dU \quad \text{und} \quad y = \int V dU,$$

und so werden dann x und y durch dieselbe neue Variable u dargestellt.

Zusatz 1.

§. 669. Auf ähnliche Art wird man verfahren, wenn irgend eine Gleichung zwischen p und der anderen Veränderlichen y gegeben wird, weil man die Variablen x und y mit einander vertauschen kann. Dann aber drücke man entweder p durch y oder y durch p, oder endlich p und y durch eine neue Veränderliche u aus, wobey jedoch bemerkt werden muß, daß $dx = \frac{dy}{p}$ sey.

Zusatz 2.

§. 670. Da $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Bogenelement einer krummen Linie bezeichnet, dessen rechtwinklige Coordinaten x und y sind, so kann man, wenn der Quotient

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{p}$$

eine Function von x oder von y wird, hieraus die zwischen x und y bestehende Relation auffinden.

Zusatz 3.

§. 671. Weil auf diese Art die zwischen x und y bestehende Relation durch Integration gefunden wird, so wird zugleich eine neue constante Größe eingeführt, weßhalb jene Relation für das vollständige Integrale angesehen werden kann.

Anmerkung 1.

§. 672. Bisher haben wir bloß solche Differenzialgleichungen be-

trachtet, bey welchen für $\frac{dy}{dx} = p$ eine solche Relation zwischen den drey Veränderlichen x, y und p gegeben ist, daß sich daraus der Werth von p bequem durch x und y bestimmen läßt, so daß $p = \frac{dy}{dx}$ irgend einer Function von x und y gleich wird. Wir müssen nun auch solche Relationen zwischen x, y und p betrachten, aus welchen sich der Werth von p entweder weniger bequem, oder gar nicht durch x und y bestimmen läßt. Der einfachste Fall ist ohne Zweifel der, wenn in der vorgelegten Gleichung die eine Veränderliche x oder y gar nicht erscheint, so daß nur zwischen p und x, oder zwischen p und y eine Relation gegeben ist. Diesen Fall haben wir im vorstehenden Probleme schon erörtert. Der bey der Auflösung gebrauchte Kunstgriff besteht darin, daß man aus der zwischen p und x gegebenen Gleichung nicht die Größe p durch x ausdrückt, wenn diese Bestimmung nicht etwa ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann, sondern lieber x durch p, oder beyde Größen durch eine neue Veränderliche u ausgedrückt darstellt. Wäre z. B. die Gleichung

$$x\,dx + a\,dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

gegeben, welche für $\frac{dy}{dx} = p$ übergeht in

$$x + ap = b\sqrt{1 + p^2},$$

so würde man nicht so bequem p durch x ausdrücken können. Da nun aber

$x = b\sqrt{1 + p^2} - ap$, so wird, wegen $y = \int p\,dx = px - \int x\,dp$,

$$y = bp\sqrt{1 + p^2} - ap^2 - b\int dp\sqrt{1 + p^2} + \tfrac{1}{2}ap^2;$$

und somit ist die zwischen x und y bestehende Relation bekannt. Würde man aber auf eine Gleichung von der Form

$$x^3 dx^3 + dy^3 = ax\,dx^2 dy \quad \text{oder} \quad x^3 + p^3 = apx$$

gekommen seyn, so könnte man weder x durch p, noch p durch x bequem ausdrücken. Wir setzen daher $p = ux$, so wird $x + u^3 x = au$, und daher $x = \frac{au}{1 + u^3}$ und $p = \frac{au^2}{1 + u^3}$.

Weil nun $dx = \frac{a\,du\,(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^2}$ ist, so findet man

$$y = a^2 \int \frac{u^2 du\,(1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3},$$

oder wenn man diesen Ausdruck auf eine einfachere Form bringt:

$$y = \frac{1}{6}a^2 \frac{2u^3 - 1}{(1 + u^3)^2} - a^2 \int \frac{u^2 du}{(1 + u^3)^2}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{6}a^2 \frac{2u^3 - 1}{(1 + u^3)^2} + \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{1 + u^3} + \text{Const.}$$

Anmerkung. 2.

§. 673. Da wir also den Fall, in welchem die Gleichung entweder zwischen x und p, oder zwischen y und p gegeben ist, allgemein auflösen konnten, so müssen wir untersuchen, in welchen Fällen die Entwickelung wirklich gelingt, wenn alle drey Größen x, y und p in der vorgelegten Gleichung erscheinen. Wir bemerken zuerst, daß, sobald die beyden Veränderlichen x und y durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, wie auch übrigens die Größe p erscheinen mag, die Auflösung auf die bereits behandelten Fälle immer zurückgeführt werden könne; es lassen sich nämlich solche Gleichungen eben so behandeln, wie die homogenen Gleichungen, unter welche dieselben mit Recht subsummirt werden, weil die von den Differenzialien entstandenen Dimensionen durchaus gleich seyn müssen, und die ganze Beurtheilung bloß auf die endlichen Größen x und y gegründet werden muß. Wenn diese daher durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen enthalten, so kann die vorgelegte Gleichung als homogen betrachtet werden, wie z. B. die Gleichung

$$x^2 dy - y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0, \text{ oder}$$

$$p x^2 - y^2 \sqrt{1 + p^2} = 0.$$

Es lassen demnach auch jene Gleichungen die Entwickelung zu, bey welchen die eine Veränderliche x oder y bloß in der ersten Potenz erscheint, wie auch übrigens der Differenzialquotient $p = \frac{dy}{dx}$ in die Gleichung verwebt seyn mag. Diese Fälle werden wir also hier einer genauern Betrachtung würdigen.

Aufgabe 90.

§. 674. Es sey $p = \frac{dy}{dx}$, und in der zwischen x, y und p gegebenen Gleichung sollen die beyden Veränderlichen x und y durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen enthalten; man bestimme zwischen x

) y jene Relation, welche das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung darstellt.

Auflösung.

Da in der zwischen x, y und p vorgelegten Gleichung die beyden Veränderlichen x und y in allen Theilen dieselbe Anzahl von Dimensionen darbiethen, so wird, wenn $y = ux$ gesetzt wird, die Größe durch Division wegfallen, und eine Gleichung bloß zwischen den Veränderlichen u und p erscheinen, wodurch die zwischen ihnen bestehende Relation so bestimmt werden wird, daß sich entweder u durch p, oder p durch u wird ausdrücken lassen. Aus der Annahme $y = ux$ folgt $dy = udx + xdu$, und weil $dy = pdx$ ist, so wird

$$pdx - udx = xdu, \text{ und demnach } \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}.$$

Da nun p durch u gegeben ist, so läßt sich die Differenzialformel $\frac{du}{p-u}$, welche nur eine einzige Veränderliche enthält, nach den Regeln des ersten Abschnittes integriren, und man erhält $lx = \int \frac{du}{p-u}$, daß also x durch u ausgedrückt wird. Weil aber $y = ux$ ist, so sind die beyden Veränderlichen x und y durch dieselbe dritte Variable bestimmt, und da jene Integration eine willkürliche Constante in die Gleichung bringt, so ist diese zwischen x und y bestehende Relation das vollständige Integrale.

Zusatz 1.

§. 675. Weil $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$ ist, so wird auch

$$lx = -l(p-u) + \int \frac{dp}{p-u}$$

seyn, welcher Ausdruck bequemer ist, wenn sich etwa aus der zwischen p und u vorgelegten Gleichung die Größe u leichter durch p bestimmen läßt.

Zusatz 2.

§. 676. Läßt sich das Integrale $\int \frac{du}{p-u}$ oder $\int \frac{dp}{p-u}$ mittelst Logarithmen angeben, so daß $\int \frac{du}{p-u} = lU$ wird, so erhält man $lx = lC + lU$, und demnach $x = CU$ und $y = CUu$; es

wird sich also die Relation zwischen x und y in einer algebraischen Form darstellen, und da $u = \frac{y}{x}$ ist, so wird auch die dritte Veränderliche u leicht gefunden.

Anmerkung.

§. 677. Dieselbe Auflösungsmethode haben wir schon oben bey den gewöhnlichen homogenen Gleichungen gelehrt, die daher durch die Dimensionen der Differenzialien keine Störung erleidet, ja sie gelingt sogar dann, wenn der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx} = p$ in einer transcendenten Form erscheinen sollte. Auf diesem Wege wird nämlich die Auflösung auf die Integration der abgesonderten Differenzialgleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$ zurückgeführt, wie wir auch schon oben nach der erstern Methode unsern Zweck erreicht haben. Die zweyte Methode aber, deren wir uns früher bedient haben, indem wir für die vorgelegte Differenzialgleichung einen integrirenden Factor suchten, findet hier offenbar keine Anwendung, weil durch das Differenziiren einer endlichen Gleichung niemals Differenzialien einer höhern Ordnung erhalten werden. Es wird demnach auf diesem Wege keine endliche Gleichung zwischen x und y erhalten, durch deren Differenziation die vorgelegte Gleichung erscheint, sondern nur eine Gleichung, welche mit derselben übereinstimmt, ohne daß jene willkürliche Constante im Wege steht, die, durch die Integration in die Gleichung verwebt, diese zum vollständigen Integrale erhebt.

Beyspiel 1.

§. 678. **Das vollständige Integrale einer vorgelegten Gleichung anzugeben, wenn keine der Veränderlichen x und y, sondern bloß der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx} = p$ in derselben erscheint.**

Wird also der Quotient $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, so wird die vorgelegte Gleichung bloß die Veränderliche p mit constanten Größen verbunden enthalten, und man wird durch die Auflösung derselben $p = \alpha$, $p = \beta$, $p = \gamma$, u. s. w. finden, wenn sie mehrere Wurzeln enthalten sollte. Nun wird man wegen $p = \frac{dy}{dx}$ aus den einzelnen Wurzeln die voll-

ständigen Integralien

$$y = \alpha x + a, \quad y = \beta x + b, \quad y = \gamma x + c, \text{ etc.}$$

bestimmen, welche einzeln genommen der vorgelegten Gleichung gleich Genüge leisten.

Wollen wir diese Integralien sämmtlich in einer einzigen endlichen Gleichung zusammenfassen, so finden wir als vollständiges Integrale die Gleichung

$$(y - \alpha x - a)(y - \beta x - b)(y - \gamma x - c) \ldots = 0,$$

welche nicht eine, sondern mehrere constante Größen a, b, c... zu enthalten scheint, so viele nämlich, als die vorgelegte Differenzialgleichung von höherer Ordnung Wurzeln hat.

Zusatz 1.

§. 679. So erhalten wir für die Differenzialgleichung

$$dy^2 - dx^2 = 0 \quad \text{oder} \quad p^2 - 1 = 0,$$

wegen $p = +1$ und $p = -1$ die beyden Integralien

$$y = x + a \quad \text{und} \quad y = -x + b,$$

und durch Verbindung dieser beyden Gleichungen finden wir

$$(y - x - a)(y + x - b) = 0, \text{ oder}$$

$$y^2 - x^2 - (a + b) y - (a - b) x + ab = 0.$$

Zusatz 2.

§. 680. Ist die Gleichung $dy^3 + dx^3 = 0$ oder $p^3 + 1 = 0$ gegeben, deren Wurzeln

$$p = -1, \quad p = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad p = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

sind, so findet man entweder

$$y = -x + a \quad \text{oder} \quad y = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot x + b, \text{ oder}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot x + c,$$

und durch Vereinigung dieser Gleichungen in eine einzige:

$$y^3 + x^3 - (a + b + c) y^2 + \left[a - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} b - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} . c\right] xy$$

$$+ \left[-a + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} b + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} . c\right] x^2 + (ab + ac + bc) y$$

$$+ \left(bc - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} ac - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} ab\right) x - abc = 0,$$

welche Gleichung sich aber auch unter der Form

$$y^3 + x^3 - fy^2 - gxy - hx^2 + Ay + Bx + C = 0$$

darstellen läßt, wobey die Constanten A, B, C so bestimmt werden müssen, daß diese Gleichung in drey einfache aufgelöst werden kann.

Beyspiel 2.

§. 681. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$y\,dx - x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$$

zu bestimmen.

Wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, so erhält man

$$y - x\sqrt{1 + p^2} = 0.$$

Man setze also $y = ux$, so wird

$$u = \sqrt{1 + p^2} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u},$$

und daher nach der zweyten Formel

$$lx = -l(p-u) + \int \frac{dp}{p - \sqrt{1+p^2}} = -l(p-u) - \int dp\,(p + \sqrt{1+p^2}).$$

Es ist aber

$$\int dp\sqrt{1 + p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + p^2} + \tfrac{1}{2}l\,[p + \sqrt{1 + p^2}],$$

und demnach wird

$$lx = C - \tfrac{1}{2}l\,[\sqrt{1+p^2} - p] - \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + p^2} - \tfrac{1}{2}p^2, \text{ oder}$$

$$lx = C + \tfrac{1}{2}l\,[\sqrt{1+p^2} + p] - \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + p^2} - \tfrac{1}{2}p^2, \text{ und}$$

$$y = ux = x\sqrt{p^2 + 1}.$$

Beyspiel 3.

§. 682. Das vollständige Integrale der Gleichung

$$y\,dx - x\,dy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

zu bestimmen.

Weil $\frac{dy}{dx} = p$ ist, so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$y - px = nx\sqrt{1 + p^2},$$

oder wenn $y = ux$ gesetzt wird, in

$$u - p = n\sqrt{1 + p^2}.$$

Da nun

$$lx = -l(p - u) + \int \frac{dp}{p - u}$$

, so wird

$$lx = -l.n\sqrt{1+p^2} - \int\frac{dp}{n\sqrt{1+p^2}},$$

und daher

$$lx = C - l.n\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{n}l.[p+\sqrt{1+p^2}].$$

Man findet demnach

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}[\sqrt{1+p^2}-p]^{\frac{1}{n}}, \text{ und}$$

$$y = \frac{a[p+n\sqrt{1+p^2}]}{\sqrt{1+p^2}}[\sqrt{1+p^2}-p]^{\frac{1}{n}}.$$

Weil nun aber $u^2 - 2up + p^2 = n^2 + n^2p^2$ ist, so wird

$$p = \frac{u - n\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}, \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}$$

und

$$\sqrt{1+p^2} - p = \frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n},$$

daher wird

$$\frac{x[-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}]}{a(1-n^2)} = \left[\frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n}\right]^{\frac{1}{n}},$$

da $u = \frac{y}{x}$ ist.

Ist aber $n = 1$, so wird

$$p = \frac{u^2-1}{2u}, \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{u^2+1}{2u}, \text{ und}$$

$$x = \frac{2au}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u} = \frac{2ax^2}{x^2+y^2}, \text{ oder } y^2 + x^2 = 2ax.$$

Wenn $n = -1$ ist, so ist zwar, wie vorhin,

$$p = \frac{u^2-1}{2u} \text{ und } \sqrt{1+p^2} = \frac{-u^2-1}{2u}, \text{ daher}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}[\sqrt{1+p^2}+p] = \frac{-2a}{1+u^2} = \frac{-2ax^2}{x^2+y^2};$$

so ist auch

$$x = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + 2ax = 0.$$

Anmerkung.

§. 683. Wenn man diese Gleichung aufs Quadrat erhebt, und nun den Werth von $p = \frac{dy}{dx}$ sucht, so wird sie auf eine gewöhnliche

homogene Gleichung reducirt, denn erstlich wird

$$y^2 - 2pxy + p^2x^2 = n^2x^2 + n^2p^2x^2, \text{ dann}$$

$$px = \frac{xdy}{dx} = \frac{y \pm n\sqrt{y^2 + x^2 - n^2x^2}}{1 - n^2},$$

welche Gleichung durch die Substitution $y = ux$ absonderungsfä[hig] gemacht wird. Hier verdient vorzüglich der Fall bemerkt zu werd[en] in welchem $n^2 = 1$ ist, denn dann wird

$$y^2 - 2pxy = x^2 \text{ oder } p = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy},$$

und daher

$$2xydy + x^2dx - y^2dx = 0;$$

diese Gleichung kann auch theilweise integrirt werden, da der Th[eil] $2xydy - y^2dx$ durch den Factor $\frac{1}{xy^2} f\left(\frac{y^2}{x}\right)$ integrabel wird. D[a]mit nun durch diesen Factor auch der andere Theil x^2dx integra[bel] gemacht werde, setze man jenen Ausdruck $= \frac{1}{x^2}$, so erhalten wir

$$\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} + dx = 0,$$

welcher Gleichung das Integrale $\frac{y^2}{x} + x = 2a$ zukömmt, wie vor[her]hin; nur daß hier die zweyte Auflösung $x = 0$ nicht gefunden wird. Denn da die obige quadrirte Gleichung für $n = 1$ sogleich in eine ein[]fache übergeht, so geht die zweyte Wurzel verloren, welche aber wi[e]der gefunden wird, wenn man $n = 1 - \alpha$ setzt, denn dann wird

$$y^2 - 2pxy = x^2 - 2\alpha x^2 - 2\alpha p^2x^2 + \alpha^2(1 + p^2)x^2,$$

und daher px unendlich. Läßt man also die Glieder, welche gege[n] die übrigen verschwinden, hinweg, so findet man

$$-pxy = x^2 - 2\alpha p^2x^2,$$

und da diese Gleichung den Factor x enthält, so gibt sie die and[ere] Auflösung $x = 0$. Eine solche Auflösung gelingt zwar dann, wen[n] man den Werth von p durch das Ausziehen der Wurzel bestimmen kann allein wenn die Gleichung von einem höhern Grade, oder gar tran[s]scendent ist, so können wir die hier erklärte Methode nicht umgehen.

Beyspiel 4.

§. 684. Man bestimme das vollständige Integral der Gleichung

$$xdy^3 + ydx^3 = dydx\sqrt{xy(dx^2 + dy^2)}.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$ und $y = ux$, so erhält unsere Gleichung die Form

$$p^3 + u = p\sqrt{u(1+p^2)},$$

und demnach ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}, \quad \text{oder} \quad lx = \int\frac{du}{p-u} = -l(p-u) + \int\frac{dp}{p-u}.$$

Es ergibt sich aber hieraus

$$\sqrt{u} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}p\sqrt{1-4p+p^2},$$

oder wenn man quadrirt:

$$u = \tfrac{1}{2}p^2 - p^3 + \tfrac{1}{2}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

und daher

$$p - u = \tfrac{1}{2}p(1+p^2)(2-p) - \tfrac{1}{2}p^2\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

folglich ist

$$\frac{dp}{p-u} = \frac{dp(2-p)}{2p(1-p+p^2)} + \frac{dp\sqrt{1-4p+p^2}}{2(1-p+p^2)\sqrt{1+p^2}}.$$

Setzt man in dem letzten Theile dieser Gleichung

$$\sqrt{\frac{1-4p+p^2}{1+p^2}} = q, \text{ so wird, weil}$$

$$p = \frac{2+\sqrt{[4-(1-q^2)^2]}}{1-q^2}, \quad dp = \frac{4q\,dq\,[2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}]}{(1-q^2)^2\sqrt{4-(1-q^2)^2}},$$

$$\text{und} \quad 1 - p + p^2 = \frac{(3+q^2)[2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}]}{(1-q^2)^2} \text{ ist,}$$

$$\int\frac{dp}{p-u} = \tfrac{1}{2}\int\frac{dp(2-p)}{p(1-p+p^2)} + 2\int\frac{q^2\,dq}{(3+q^2)\sqrt{4-(1-q^2)^2}},$$

wo der letzte Theil weder durch Logarithmen, noch durch Kreisbogen integrirt werden kann.

Beyspiel 5.

§. 685. Eine solche Relation zwischen x und y zu bestimmen, daß $s^2 = 2xy$ werde, wenn $s = \int\sqrt{dx^2+dy^2}$ gesetzt wird.

Weil $s = \sqrt{2xy}$ ist, so wird

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{2xy}},$$

und wenn $\frac{dy}{dx} = p$ und $y = ux$ gesetzt wird, findet man

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{p+u}{\sqrt{2u}}, \text{ oder } u = \sqrt{2u(1+p^2)} - p,$$

und wenn die Wurzel wirklich ausgezogen wird:

$$\sqrt{u} = \sqrt{\frac{1+p^2}{2}} + \frac{1-p}{\sqrt{2}} = \frac{1-p+\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2}}, \text{ daß}$$

$$u = 1 - p + p^2 + (1-p)\sqrt{1+p^2}, \text{ und}$$

$$p - u = -(1-p)\left[1-p+\sqrt{1+p^2}\right]; \text{ also ist}$$

$$\int \frac{dp}{p-u} = \int \frac{dp}{2p(1-p)}\left[1-p-\sqrt{1+p^2}\right] = \tfrac{1}{2}lp - \tfrac{1}{2}\int \frac{dp\sqrt{1+p^2}}{p(1-p)}$$

Wird nun $p = \frac{1-q^2}{2q}$ gesetzt, so erhält man

$$\int \frac{dp\sqrt{1+p^2}}{p(1-p)} = \int \frac{-dq(1+q^2)^2}{q(1-q^2)(q^2+2q-1)}$$

$$= +\int \frac{dq}{q} - 2\int \frac{dq}{1-q^2} - 4\int \frac{dq}{(q+1)^2-2}$$

$$= +lq - l\frac{1+q}{1-q} + \sqrt{2}\, l\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q},$$

und hieraus

$$\int \frac{dp}{p-u} = \tfrac{1}{2}lp - \tfrac{1}{2}lq + \tfrac{1}{2}l\frac{1+q}{1-q} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}$$

$$= l\left(\frac{1+q}{2q}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}\right).$$

Nun ist $p - u = \frac{(1+q)(1-2q-q^2)}{2q} = +\frac{(1+q)[2-(1+q)^2]}{2q}$

und so erhält man

$$lx = C - l(1+q) + lq - l[2-(1+q)^2]$$
$$+ l\left(\frac{1+q}{q}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}\right)$$

$$= la - l[2-(1+q)^2] - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}\right),$$

wobey $u = \frac{y}{x} = \tfrac{1}{2}(1+q)^2$ und $1 + q = \sqrt{\frac{2y}{x}}$ ist; daher

$$x = \frac{\tfrac{1}{2}ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ oder } x - y = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

oder

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}.$$

Die Gleichung zwischen x und y ist also, wie man sich auszudrü-
en pflegt, interscendent.

Anmerkung.

§. 686. Diese Auflösung wird leichter bewerkstelligt, wenn man gleich aus der Gleichung

$+ p = \sqrt{2u(1+p^2)}$, oder $u^2 + 2up + p^2 = 2u + 2up^2$,
en Werth von p sucht; man findet nämlich

$$p = \frac{u + \sqrt{(u^2 - 4u^2 + 2u + 2u^3 - u^2)}}{2u - 1}, \text{ oder}$$

$$p = \frac{u + (1-u)\sqrt{2u}}{2u - 1}, \text{ und}$$

$$p - u = \frac{(1-u)(2u + \sqrt{2u})}{2u - 1} = \frac{(1-u)\sqrt{2u}}{\sqrt{2u} - 1},$$

aher ist

$$x = \int \frac{du}{p-u} = \int \frac{du(\sqrt{2u} - 1)}{(1-u)\sqrt{2u}} = C - l(1-u) - \int \frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}}.$$

Sey nun $u = v^2$, so wird

$$\int \frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+v}{1-v}\right),$$

nd daher

$$lx = la - l(1-u) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\right).$$

Da nun $u = \frac{y}{x}$ ist, so findet man

$$x = \frac{ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ wie vorhin.}$$

Wird demnach eine Curve, auf die rechtwinkligen Coordinaten
und y bezogen, verlangt, welche die Eigenschaft haben soll, daß ihr
ogen $s = \sqrt{2xy}$ wird; so wird die Gleichung

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = a(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}$$

ie Natur dieser Curve charakterisiren. Übrigens ist für sich klar, daß
ie Aufgabe auf ähnliche Art aufgelöst werden könne, wenn der Bogen
irgend einer homogenen Function von x und y des ersten Grades
leich seyn soll, oder wenn irgend eine homogene Gleichung zwischen

x, y und s gegeben würde. Es wird sich der Mühe lohnen, dieß der folgenden Aufgabe zu zeigen.

Aufgabe 91.

§. 687. Eine endliche Gleichung zwischen x und y aufzufinden, wenn

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

seyn soll, und irgend eine homogene Gleichung zwischen x, y und s gegeben ist, in welcher nämlich die drey Veränderlichen x, y und s durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen haben.

Auflösung.

Man setze $y = ux$ und $s = vx$, damit durch diese Substitution die Veränderliche x aus der vorgelegten homogenen Gleichung wegfalle, und eine Gleichung zwischen den beyden Veränderlichen u und v erhalten werde, aus welcher sich v durch u bestimmen läßt. Wird aber $dy = pdx$ gesetzt, so wird

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2},$$

und demnach findet man

$$pdx = udx + xdu \quad \text{und} \quad dx\sqrt{1 + p^2} = vdx + xdv,$$

$$\text{also} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{dv}{\sqrt{1 + p^2} - v}.$$

Weil nun v durch u gegeben ist, so sey $dv = qdu$, damit man erhalte

$$\sqrt{1 + p^2} = v + pq - qu,$$

und wenn man die Quadrate nimmt:

$$1 + p^2 = (v - qu)^2 + 2pq(v - qu) + p^2q^2,$$

so findet man

$$p = \frac{q(v - qu) + \sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}{1 - q^2}, \text{ und}$$

$$p - u = \frac{qv - u + \sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}{1 - q^2}.$$

Hieraus ergibt sich demnach

$$\frac{dx}{x} = \frac{du\,(1 - q^2)}{qv - u + \sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}$$

$$= \frac{du\,[qv - u - \sqrt{(v - qu)^2 - 1 + q^2}]}{1 + u^2 - v^2},$$

und da v und q durch u gegeben sind, so kann man auch x durch u ausdrücken; weil aber $q\,du = dv$ ist, so erhält man

$$lx = la - l\sqrt{1 + u^2 - v^2} - \int \frac{du\sqrt{(v - qu)^2 - 1 + q^2}}{1 + u^2 - v^2},$$

und da $y = ux$ ist, so findet man, wenn $\frac{y}{x}$ statt u gesetzt wird, die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Zusatz 1.

§. 688. Da s den Bogen einer auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y sich beziehenden Curve bezeichnet, so wird diese Curve so bestimmt, daß ihr Bogen irgend einer Function von x und y des ersten Grades gleich wird, und diese ist also algebraisch, wenn das Integrale

$$\int \frac{du\sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}{1 + u^2 - v^2}$$

durch Logarithmen dargestellt werden kann.

Zusatz 2.

§. 689. Auf ähnliche Art kann man die Aufgabe lösen, wenn s eine solche Integralformel bezeichnet, daß $ds = Q\,dx$, wobey Q eine beliebige Function von den Größen p, u und v bezeichnet. Hier muß man aber aus der Gleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{du}{Q - v}$$

den Werth von p bestimmen, und da v durch u gegeben ist, so wird

$$lx = \int \frac{du}{p - u}.$$

Beyspiel 1.

§. 690. Wenn $s = \alpha x + \beta y$ seyn müßte, so wird $v = \alpha + \beta u$ und $q = \frac{dv}{du} = \beta$, daher $v - qu = \alpha$, also

$$lx = la - l\sqrt{[1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2]} - \int \frac{du\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2},$$

und der letzte Theil gibt

$$-\int \frac{du\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta u + (1 - \beta^2)u^2} =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{du}{\alpha^2 - 1 + 2\alpha\beta u + (\beta^2 - 1)u^2},$$

wird sich also die Relation zwischen x und y in einer algebraischen darstellen, und da $u = \frac{y}{x}$ ist, so wird auch die dritte Veränd u leicht gefunden.

Anmerkung.

§. 677. Dieselbe Auflösungsmethode haben wir schon obe den gewöhnlichen homogenen Gleichungen gelehrt, die daher du Dimensionen der Differenzialien keine Störung erleidet, ja sie g sogar dann, wenn der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx} = p$ in einer tra denten Form erscheinen sollte. Auf diesem Wege wird nämlich di lösung auf die Integration der abgesonderten Differenzialglei $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}$ zurückgeführt, wie wir auch schon oben nach der e Methode unsern Zweck erreicht haben. Die zweyte Methode deren wir uns früher bedient haben, indem wir für die vorgelegte ferenzialgleichung einen integrirenden Factor suchten, findet hier gar keine Anwendung, weil durch das Differenziiren einer end Gleichung niemals Differenzialien einer höhern Ordnung erhalten den. Es wird demnach auf diesem Wege keine endliche Glei zwischen x und y erhalten, durch deren Differenziation die vorg Gleichung erscheint, sondern nur eine Gleichung, welche mit der übereinstimmt, ohne daß jene willkürliche Constante im Wege die, durch die Integration in die Gleichung verwebt, diese zum ständigen Integrale erhebt.

Beyspiel 1.

§. 678. Das vollständige Integrale einer vo legten Gleichung anzugeben, wenn keine der änderlichen x und y, sondern bloß der Differen quotient $\frac{dy}{dx} = p$ in derselben erscheint.

Wird also der Quotient $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, so wird die vor Gleichung bloß die Veränderliche p mit constanten Größen verb enthalten, und man wird durch die Auflösung derselben $p = \alpha$, $p = \gamma$, u. s. w. finden, wenn sie mehrere Wurzeln enthalten Nun wird man wegen $p = \frac{dy}{dx}$ aus den einzelnen Wurzeln die

ändigen Integralien

$$y = \alpha x + a, \quad y = \beta x + b, \quad y = \gamma x + c, \text{ etc.}$$

stimmen, welche einzeln genommen der vorgelegten Gleichung gleich Genüge leisten.

Wollen wir diese Integralien sämmtlich in einer einzigen endlichen Gleichung zusammenfassen, so finden wir als vollständiges Integrale die Gleichung

$$(y - \alpha x - a)(y - \beta x - b)(y - \gamma x - c) \ldots = 0,$$

welche nicht eine, sondern mehrere constante Größen a, b, c... enthalten scheint, so viele nämlich, als die vorgelegte Differenzialgleichung von höherer Ordnung Wurzeln hat.

Zusatz 1.

§. 679. So erhalten wir für die Differenzialgleichung

$$dy^2 - dx^2 = 0 \quad \text{oder} \quad p^2 - 1 = 0,$$

wegen $p = +1$ und $p = -1$ die beyden Integralien

$$y = x + a \quad \text{und} \quad y = -x + b,$$

und durch Verbindung dieser beyden Gleichungen finden wir

$$(y - x - a)(y + x - b) = 0, \text{ oder}$$

$$y^2 - x^2 - (a + b) y - (a - b) x + ab = 0.$$

Zusatz 2.

§. 680. Ist die Gleichung $dy^3 + dx^3 = 0$ oder $p^3 + 1 = 0$ gegeben, deren Wurzeln

$$p = -1, \quad p = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad p = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

sind, so findet man entweder

$$y = -x + a \quad \text{oder} \quad y = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot x + b, \text{ oder}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot x + c,$$

und durch Vereinigung dieser Gleichungen in eine einzige:

$$y^3 + x^3 - (a+b+c) y^2 + \left[a - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} b - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} . c\right] xy$$

$$+ \left[-a + \frac{1-\sqrt{-3}}{2} b + \frac{1+\sqrt{-3}}{2} . c\right] x^2 + (ab + ac + bc) y$$

$$+ \left(bc - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} ac - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} ab\right) x - abc = 0,$$

welche Gleichung sich aber auch unter der Form

$$y^3 + x^3 - fy^2 - gxy - hx^2 + Ay + Bx + C = 0$$

darstellen läßt, wobey die Constanten A, B, C so bestimmt werden müssen, daß diese Gleichung in drey einfache aufgelöst werden kann.

Beyspiel 2.

§. 681. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$ydx - x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$$

zu bestimmen.

Wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, so erhält man

$$y - x\sqrt{1 + p^2} = 0.$$

Man setze also $y = ux$, so wird

$$u = \sqrt{1 + p^2} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u},$$

und daher nach der zweyten Formel

$$lx = -l(p-u) + \int \frac{dp}{p - \sqrt{1+p^2}} = -l(p-u) - \int dp(p + \sqrt{1+p^2}).$$

Es ist aber

$$\int dp\sqrt{1 + p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + p^2} + \tfrac{1}{2}l[p + \sqrt{1 + p^2}],$$

und demnach wird

$$lx = C - \tfrac{1}{2}l[\sqrt{1+p^2} - p] - \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + p^2} - \tfrac{1}{2}p^2, \text{ oder}$$

$$lx = C + \tfrac{1}{2}l[\sqrt{1+p^2} + p] - \tfrac{1}{2}p\sqrt{1 + p^2} - \tfrac{1}{2}p^2, \text{ und}$$

$$y = ux = x\sqrt{p^2 + 1}.$$

Beyspiel 3.

§. 682. Das vollständige Integrale der Gleichung

$$ydx - xdy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

zu bestimmen.

Weil $\frac{dy}{dx} = p$ ist, so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$y - px = nx\sqrt{1 + p^2},$$

oder wenn $y = ux$ gesetzt wird, in

$$u - p = n\sqrt{1 + p^2}.$$

Da nun

$$lx = -l(p - u) + \int \frac{dp}{p - u}$$

, so wird

$$lx = - l.n\sqrt{1+p^2} - \int\frac{dp}{n\sqrt{1+p^2}},$$

nd daher

$$lx = C - l.n\sqrt{1+p^2} - \frac{1}{n} l.[p+\sqrt{1+p^2}].$$

Man findet demnach

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}[\sqrt{1+p^2}-p]^{\frac{1}{n}}, \text{ und}$$

$$y = \frac{a[p+n\sqrt{1+p^2}]}{\sqrt{1+p^2}}[\sqrt{1+p^2}-p]^{\frac{1}{n}}.$$

Weil nun aber $u^2 - 2up + p^2 = n^2 + n^2p^2$ ist, so wird.

$$= \frac{u - n\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}, \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}$$

nd

$$\sqrt{1+p^2} - p = \frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n},$$

her wird

$$\frac{x[-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}]}{a(1-n^2)} = \left[\frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n}\right]^{\frac{1}{n}},$$

$u = \frac{y}{x}$ ist.

Ist aber $n = 1$, so wird

$$p = \frac{u^2-1}{2u}, \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{u^2+1}{2u}, \text{ und}$$

$$x = \frac{2au}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u} = \frac{2ax^2}{x^2+y^2}, \text{ oder } y^2 + x^2 = 2ax.$$

Wenn $n = -1$ ist, so ist zwar, wie vorhin,

$$p = \frac{u^2-1}{2u} \text{ und } \sqrt{1+p^2} = \frac{-u^2-1}{2u}, \text{ daher}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}[\sqrt{1+p^2}+p] = \frac{-2a}{1+u^2} = \frac{-2ax^2}{x^2+y^2};$$

o ist auch

$$x = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + 2ax = 0.$$

Anmerkung.

§. 683. Wenn man diese Gleichung aufs Quadrat erhebt, und an den Werth von $p = \frac{dy}{dx}$ sucht, so wird sie auf eine gewöhnliche

homogene Gleichung reducirt, denn erstlich wird

$$y^2 - 2pxy + p^2x^2 = n^2x^2 + n^2p^2x^2, \text{ dann aber}$$

$$px = \frac{xdy}{dx} = \frac{y \pm n\sqrt{y^2 + x^2 - n^2x^2}}{1 - n^2},$$

welche Gleichung durch die Substitution $y = ux$ absonderungsfähig gemacht wird. Hier verdient vorzüglich der Fall bemerkt zu werden, in welchem $n^2 = 1$ ist, denn dann wird

$$y^2 - 2pxy = x^2 \quad \text{oder} \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy},$$

und daher

$$2xydy + x^2dx - y^2dx = 0;$$

diese Gleichung kann auch theilweise integrirt werden, da der Theil $2xydy - y^2dx$ durch den Factor $\frac{1}{xy^2} f\left(\frac{y^2}{x}\right)$ integrabel wird. Damit nun durch diesen Factor auch der andere Theil x^2dx integrabel gemacht werde, setze man jenen Ausdruck $= \frac{1}{x^2}$, so erhalten wir

$$\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} + dx = 0,$$

welcher Gleichung das Integrale $\frac{y^2}{x} + x = 2a$ zukömmt, wie vorhin; nur daß hier die zweyte Auflösung $x = 0$ nicht gefunden wird. Denn da die obige quadrirte Gleichung für $n = 1$ sogleich in eine einfache übergeht, so geht die zweyte Wurzel verloren, welche aber wieder gefunden wird, wenn man $n = 1 - \alpha$ setzt, denn dann wird

$$y^2 - 2pxy = x^2 - 2\alpha x^2 - 2\alpha p^2x^2 + \alpha^2(1 + p^2)x^2,$$

und daher px unendlich. Läßt man also die Glieder, welche gegen die übrigen verschwinden, hinweg, so findet man

$$-pxy = x^2 - 2\alpha p^2x^2,$$

und da diese Gleichung den Factor x enthält, so gibt sie die andere Auflösung $x = 0$. Eine solche Auflösung gelingt zwar dann, wenn man den Werth von p durch das Ausziehen der Wurzel bestimmen kann; allein wenn die Gleichung von einem höhern Grade, oder gar transcendent ist, so können wir die hier erklärte Methode nicht umgehen.

Beyspiel 4.

§. 684. Man bestimme das vollständige Integrale der Gleichung

$$xdy^3 + ydx^3 = dydx\sqrt{xy(dx^2 + dy^2)}.$$

Setzt man $\frac{dy}{dx} = p$ und $y = ux$, so erhält unsere Gleichung [d]ie Form

$$p^3 + u = p\sqrt{u(1+p^2)},$$

[u]nd demnach ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}, \quad \text{oder} \quad lx = \int\frac{du}{p-u} = -l(p-u) + \int\frac{dp}{p-u}.$$

Es ergibt sich aber hieraus

$$\sqrt{u} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}p\sqrt{1-4p+p^2},$$

[od]er wenn man quadrirt:

$$u = \tfrac{1}{2}p^2 - p^3 + \tfrac{1}{2}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

[u]nd daher

$$p - u = \tfrac{1}{2}p(1+p^2)(2-p) - \tfrac{1}{2}p^2\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

[fo]lglich ist

$$\frac{dp}{p-u} = \frac{dp(2-p)}{2p(1-p+p^2)} + \frac{dp\sqrt{1-4p+p^2}}{2(1-p+p^2)\sqrt{1+p^2}}.$$

Setzt man in dem letzten Theile dieser Gleichung

$$\sqrt{\frac{1-4p+p^2}{1+p^2}} = q, \text{ so wird, weil}$$

$$p = \frac{2+\sqrt{[4-(1-q^2)^2]}}{1-q^2}, \quad dp = \frac{4q\,dq\,[2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}]}{(1-q^2)^2\sqrt{4-(1-q^2)^2}},$$

$$\text{und} \quad 1 - p + p^2 = \frac{(3+q^2)\,[2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}]}{(1-q^2)^2} \text{ ist,}$$

$$\int\frac{dp}{p-u} = \tfrac{1}{2}\int\frac{dp(2-p)}{p(1-p+p^2)} + 2\int\frac{q^2\,dq}{(3+q^2)\sqrt{4-(1-q^2)^2}},$$

[w]o der letzte Theil weder durch Logarithmen, noch durch Kreisbogen [in]tegrirt werden kann.

Beyspiel 5.

§. 685. Eine solche Relation zwischen x und y zu [b]estimmen, daß $s^2 = 2xy$ werde, wenn $s = \int\sqrt{dx^2+dy^2}$ [g]esetzt wird.

Weil $s = \sqrt{2xy}$ ist, so wird

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{2xy}},$$

und wenn $\frac{dy}{dx} = p$ und $y = ux$ gesetzt wird, findet man

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{p+u}{\sqrt{2u}}, \quad \text{oder} \quad u = \sqrt{2u(1+p^2)} - p,$$

und wenn die Wurzel wirklich ausgezogen wird:

$$\sqrt{u} = \sqrt{\frac{1+p^2}{2}} + \frac{1-p}{\sqrt{2}} = \frac{1-p+\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2}}, \text{ daher}$$

$$u = 1 - p + p^2 + (1-p)\sqrt{1+p^2}, \text{ und}$$

$$p - u = -(1-p)\left[1-p+\sqrt{1+p^2}\right]; \text{ also ist}$$

$$\int\frac{dp}{p-u} = \int\frac{dp}{2p(1-p)}\left[1-p-\sqrt{1+p^2}\right] = \tfrac{1}{2}lp - \tfrac{1}{2}\int\frac{dp\sqrt{1+p^2}}{p(1-p)},$$

Wird nun $p = \frac{1-q^2}{2q}$ gesetzt, so erhält man

$$\int\frac{dp\sqrt{1+p^2}}{p(1-p)} = \int\frac{-dq\,(1+q^2)^2}{q(1-q^2)(q^2+2q-1)}$$

$$= +\int\frac{dq}{q} - 2\int\frac{dq}{1-q^2} - 4\int\frac{dq}{(q+1)^2-2}$$

$$= +lq - l\frac{1+q}{1-q} + \sqrt{2}\,l\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q},$$

und hieraus

$$\int\frac{dp}{p-u} = \tfrac{1}{2}lp - \tfrac{1}{2}lq + \tfrac{1}{2}l\frac{1+q}{1-q} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}$$

$$= l\left(\frac{1+q}{2q}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}\right).$$

Nun ist $p - u = \frac{(1+q)(1-2q-q^2)}{2q} = +\frac{(1+q)[2-(1+q)^2]}{2q}$,
und so erhält man

$$lx = C - l(1+q) + lq - l\left[2-(1+q)^2\right] + l\left(\frac{1+q}{q}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}\right)$$

$$= la - l\left[2-(1+q)^2\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}\right),$$

wobey $u = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}(1+q)^2$ und $1+q = \sqrt{\frac{2y}{x}}$ ist; daher ist

$$x = \frac{\frac{1}{2}ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \text{oder} \quad x - y = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

oder

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}.$$

Die Gleichung zwischen x und y ist also, wie man sich auszudrü-
[c]en pflegt, interscendent.

Anmerkung.

§. 686. Diese Auflösung wird leichter bewerkstelligt, wenn man
gleich aus der Gleichung

$u + p = \sqrt{2u(1+p^2)}$, oder $u^2 + 2up + p^2 = 2u + 2up^2$,

den Werth von p sucht; man findet nämlich

$$p = \frac{u + \sqrt{(u^2 - 4u^2 + 2u + 2u^3 - u^2)}}{2u - 1}, \text{ oder}$$

$$p = \frac{u + (1-u)\sqrt{2u}}{2u - 1}, \text{ und}$$

$$p - u = \frac{(1-u)(2u + \sqrt{2u})}{2u - 1} = \frac{(1-u)\sqrt{2u}}{\sqrt{2u} - 1},$$

daher ist

$$lx = \int \frac{du}{p-u} = \int \frac{du\,(\sqrt{2u} - 1)}{(1-u)\sqrt{2u}} = C - l(1-u) - \int \frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}}.$$

Sey nun $u = v^2$, so wird

$$\int \frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2\,dv}{1 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+v}{1-v}\right),$$

und daher

$$lx = la - l(1-u) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\right).$$

Da nun $u = \frac{y}{x}$ ist, so findet man

$$x = \frac{ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ wie vorhin.}$$

Wird demnach eine Curve, auf die rechtwinkligen Coordinaten
x und y bezogen, verlangt, welche die Eigenschaft haben soll, daß ihr
Bogen $s = \sqrt{2xy}$ wird; so wird die Gleichung

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = a\,(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$$

die Natur dieser Curve charakterisiren. Übrigens ist für sich klar, daß
die Aufgabe auf ähnliche Art aufgelöst werden könne, wenn der Bogen
s irgend einer homogenen Function von x und y des ersten Grades
gleich seyn soll, oder wenn irgend eine homogene Gleichung zwischen

x, y und s gegeben würde. Es wird sich der Mühe lohnen, dieß i der folgenden Aufgabe zu zeigen.

Aufgabe 91.

§. 687. Eine endliche Gleichung zwischen x und aufzufinden, wenn

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

seyn soll, und irgend eine homogene Gleichung zwischen x, y und s gegeben ist, in welcher nämlich di drey Veränderlichen x, y und s durchaus dieselbe An zahl von Dimensionen haben.

Auflösung.

Man setze $y = ux$ und $s = vx$, damit durch diese Substitution die Veränderliche x aus der vorgelegten homogenen Gleichung weg falle, und eine Gleichung zwischen den beyden Veränderlichen u und v erhalten werde, aus welcher sich v durch u bestimmen läßt. Wird aber $dy = pdx$ gesetzt, so wird

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2},$$

und demnach findet man

$$pdx = udx + xdu \quad \text{und} \quad dx\sqrt{1 + p^2} = vdx + xdv,$$

$$\text{also } \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{dv}{\sqrt{1 + p^2} - v}.$$

Weil nun v durch u gegeben ist, so sey $dv = qdu$, damit man erhalte

$$\sqrt{1 + p^2} = v + pq - qu,$$

und wenn man die Quadrate nimmt:

$$1 + p^2 = (v - qu)^2 + 2pq(v - qu) + p^2q^2,$$

so findet man

$$p = \frac{q(v - qu) + \sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}{1 - q^2}, \text{ und}$$

$$p - u = \frac{qv - u + \sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}{1 - q^2}.$$

Hieraus ergibt sich demnach

$$\frac{dx}{x} = \frac{du(1 - q^2)}{qv - u + \sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}$$

$$= \frac{du[qv - u - \sqrt{(v - qu)^2 - 1 + q^2}]}{1 + u^2 - v^2},$$

und da v und q durch u gegeben sind, so kann man auch x durch u ausdrücken; weil aber $q\,du = dv$ ist, so erhält man

$$lx = la - l\sqrt{1 + u^2 - v^2} - \int \frac{du\sqrt{(v - qu)^2 - 1 + q^2}}{1 + u^2 - v^2},$$

und da $y = ux$ ist, so findet man, wenn $\frac{y}{x}$ statt u gesetzt wird, die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Zusatz 1.

§. 688. Da s den Bogen einer auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y sich beziehenden Curve bezeichnet, so wird diese Curve so bestimmt, daß ihr Bogen irgend einer Function von x und y des ersten Grades gleich wird, und diese ist also algebraisch, wenn das Integrale

$$\int \frac{du\sqrt{[(v - qu)^2 - 1 + q^2]}}{1 + u^2 - v^2}$$

durch Logarithmen dargestellt werden kann.

Zusatz 2.

§. 689. Auf ähnliche Art kann man die Aufgabe lösen, wenn s eine solche Integralformel bezeichnet, daß $ds = Q\,dx$, wobey Q eine beliebige Function von den Größen p, u und v bezeichnet. Hier muß man aber aus der Gleichuug

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{du}{Q - v}$$

den Werth von p bestimmen, und da v durch u gegeben ist, so wird

$$lx = \int \frac{du}{p - u}.$$

Beyspiel 1.

§. 690. Wenn $s = \alpha x + \beta y$ seyn müßte, so wird $v = \alpha + \beta u$ und $q = \frac{dv}{du} = \beta$, daher $v - qu = \alpha$, also

$$lx = la - l\sqrt{[1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2]} - \int \frac{du\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{1 + u^2 - (\alpha + \beta u)^2},$$

und der letzte Theil gibt

$$-\int \frac{du\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta u + (1 - \beta^2)u^2} =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \int \frac{du}{\alpha^2 - 1 + 2\alpha\beta u + (\beta^2 - 1)u^2},$$

welche Gleichung sich auf folgende Form bringen läßt:

$$\int \frac{(\beta^2-1) du \sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{[u(\beta^2-1)+\alpha\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}][u(\beta^2-1)+\alpha\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}]} =$$

$$= \tfrac{1}{2} l \frac{(\beta^2-1)u+\alpha\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{(\beta^2-1)u+\alpha\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}.$$

Wird demnach $u = \frac{y}{x}$ gesetzt, so erhält man, nachdem man die Quadrate genommen hat, die gesuchte Integralgleichung

$$\frac{x^2+y^2-(\alpha x+\beta y)^2}{a^2} = \frac{(\beta^2-1)y+\alpha\beta x - x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{(\beta^2-1)y+\alpha\beta x + x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}.$$

Wird aber $(\beta^2-1)y+\alpha\beta x - x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1} = P$

$(\beta^2-1)y+\alpha\beta x + x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1} = Q$

gesetzt, so wird

$$PQ = (\beta^2-1)^2 y^2 + 2\alpha\beta(\beta^2-1)xy + (\alpha^2-1)(\beta^2-1)x^2$$
$$= (\beta^2-1)[(\alpha x+\beta y)^2 - x^2 - y^2],$$

und nach Änderung der Constanten wird daher $\frac{PQ}{b^2} = \frac{P}{Q}$, also ist entweder $P = o$ oder $Q = b$; folglich ist im Allgemeinen die Auflösung

$$(\beta^2-1)y+\alpha\beta x \pm x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1} = c,$$

welches die Gleichung für die gerade Linie ist.

Beyspiel 2.

§. 691. Wenn $s = \frac{ny^2}{x}$ werden soll, so wird $v = nu^2$ und $q = 2nu$ seyn; daher

$1 + u^2 - v^2 = 1 + u^2 - n^2u^4$ und $v - qu = - nu^2$, folglich

$$lx = la - l\sqrt{1+u^2-n^2u^4} - \int \frac{du\sqrt{n^2u^4-1+4n^2u^2}}{1+u^2-n^2u^4},$$

welcher Ausdruck aber nicht mittels Logarithmen integrirt werden kann.

Beyspiel 3.

§. 692. Wenn $s^2 = x^2 + y^2$ seyn soll, so wird

$$v = \sqrt{1+u^2} \text{ und } q = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

und daher ist

$$1 + u^2 - v^2 = 0.$$

Wir müssen demnach die Auflösung mit Hülfe der ersten Formeln ausführen, und finden daher

$$v - qu = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}},$$

$$q^2 - 1 = \frac{-1}{1 - u^2} \quad \text{und} \quad qv - u = 0; \quad \text{also}$$

$$p - u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0,$$

so daß man $y = nx$ erhält.

Beyspiel 4.

§. 693. Soll $s^2 = y^2 + nx^2$, oder $v = \sqrt{u^2 + n}$ und $q = \frac{u}{\sqrt{u^2 + n}}$ seyn, so wird $1 + u^2 - v^2 = 1 - n$, $v - qu = \frac{n}{\sqrt{u^2 + n}}$ und $q^2 - 1 = \frac{-n}{u^2 + n}$.

Man wird demnach erhalten

$$lx = la - l\sqrt{1 - n} - \frac{1}{1 - n}\int \frac{du\sqrt{n^2 - n}}{\sqrt{u^2 + n}}$$

$$= lb + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n - 1}}\, l\left[u + \sqrt{u^2 + n}\right], \text{ und daher}$$

$$\frac{x}{b} = \left[\frac{y + \sqrt{y^2 + nx^2}}{x}\right]^{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}.$$

Wenn also $\frac{n}{n - 1}$ eine Quadratzahl ist, so erhält man zwischen x und y eine algebraische Gleichung. Für $\sqrt{\frac{n}{n - 1}} = m$ findet man $n = \frac{m^2}{m^2 - 1}$ und $s^2 = y^2 + \frac{m^2 x^2}{m^2 - 1}$, welcher Bedingung Genüge geleistet wird durch die algebraische Gleichung

$$x^{m+1} = b\left[y + \sqrt{y^2 + \frac{m^2 x^2}{m^2 - 1}}\right]^m,$$

welche sich auch unter folgender Form darstellen läßt:

$$x^{\frac{2}{m}} - 2b^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1-m}{m}}\, y = \frac{m^2}{m^2 - 1} b^{\frac{2}{m}} \text{ oder}$$

$$y = \frac{(m^2 - 1)\, x^{\frac{2}{m}} - m^2 b^{\frac{2}{m}}}{2(m^2 - 1)\, b^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1-m}{m}}}.$$

Zusatz.

§. 694. Setzen wir $m = \frac{1}{n}$, und ist

$$y = \frac{b^{2n} + (n^2 - 1) x^{2n}}{2 (n^2 - 1) b^n x^{n-1}}, \text{ so wird}$$

$$s^2 = y^2 - \frac{x^2}{n^2 - 1} \text{ oder } s = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{n^2 - 1}}$$

Ist demnach

$$y = \frac{b^4 + 3 x^4}{6 b^2 x}, \text{ so wird}$$

$$s = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{3}}.$$

Aufgabe 92.

§. 695. **Die zwischen den beyden Veränderlichen x und y bestehende Relation aufzufinden, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, und zwischen x, y und p eine solche Gleichung gegeben ist, daß in derselben die eine Veränderliche y nur eine Dimension hat.**

Auflösung.

Hier wird also y irgend einer Function von x und p gleich seyn, und man wird durch Differenziation erhalten $dy = P dx + Q dp$. Weil nun $dy = p dx$ ist, so erhält man die Differenzialgleichung $(P - p) dx + Q dp = 0$, deren Integrale bestimmt werden muß. Da diese Gleichung nur die zwey Veränderlichen x und p enthält, und in ihr bloß die einfachen Differenzialien erscheinen, so muß man ihre Auflösung nach den oben erklärten Methoden versuchen.

Die Auflösung wird also erstlich gelingen, wenn $P = p$ ist, und demnach $dy = p dx + Q dp$. Dieß ist der Fall, wenn y durch x und p so bestimmt wird, daß $y = px + \Pi$, wobey Π was immer für eine Function von p bezeichnet. Dann wird also $Q = x + \frac{d\Pi}{dp}$, und weil die Auflösung von der Gleichung $Q dp = 0$ abhängt, so wird entweder $dp = 0$, und daher $p = \alpha$, oder $y = \alpha x + \beta$, wo die eine von den Constanten α und β durch die vorgelegte Gleichung selbst bestimmt wird, wenn $\beta = \Pi$ für $p = \alpha$ wird; oder man erhält $Q = 0$, und daher $x = -\frac{d\Pi}{dp}$ und $y = -\frac{p\, d\Pi}{dp} + \Pi$, wo also

beyde Auflösungen algebraische Resultate geben, wenn nur Π eine algebraische Function von p bezeichnet.

Zweytens wird die Gleichung $(P - p)\,dx + Q\,dp = 0$ die Auflösung zulassen, wenn die eine Veränderliche x mit ihrem Differenziale dx den ersten Grad nicht übersteigt. Dieß ereignet sich, wenn $y = Px + \Pi$ ist, so lange P und Π bloß Functionen von p bezeichnen, denn dann wird $P = P$ und $Q = \frac{x\,dP}{dp} + \frac{d\Pi}{dp}$, und man hat dann folgende Gleichung zu integriren:

$$(P - p)\,dx + x\,dP + d\Pi = 0, \text{ oder}$$
$$dx + \frac{x\,dP}{P - p} = -\frac{d\Pi}{P - p}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{\int \frac{dP}{P-p}}$, so erhält man

$$e^{\int \frac{dP}{P-p}} \cdot x = -\int e^{\int \frac{dP}{P-p}} \cdot \frac{d\Pi}{P - p};$$

oder man setze $\frac{dP}{P - p} = \frac{dR}{R}$, so findet man die Integralgleichung

$$Rx = C - \int \frac{R\,d\Pi}{P - p} = C - \int \frac{d\Pi\,dR}{dP},$$

und daher wird

$$x = \frac{C}{R} - \frac{1}{R}\int \frac{d\Pi\,dR}{dP} \text{ und}$$
$$y = \frac{CP}{R} + \Pi - \frac{P}{R}\int \frac{d\Pi\,dR}{dP}.$$

Drittens wird die Auflösung keine Schwierigkeit darbiethen, wenn $y = X + Vp$ seyn sollte, wobey X und V was immer für Functionen von x bezeichnen; denn dann erhält man

$$dy = p\,dx = dX + V\,dp + p\,dV, \text{ und daher}$$
$$dp + p\left(\frac{dV - dx}{V}\right) = -\frac{dX}{V}.$$

Sey nun $\frac{dx}{V} = \frac{dR}{R}$, damit auch R eine Function von x werde, so erhält man

$$\frac{V}{R}\,p = C - \int \frac{dX}{R}, \text{ oder } p = \frac{CR}{V} - \frac{R}{V}\int \frac{dX}{R} \text{ und}$$
$$y = X + CR - R\int \frac{dX}{R},$$

welche Gleichung die zwischen x und y bestehende Relation ausdrückt.

Viertens läßt die Gleichung $(P - p) dx + Q dp = o$ die Auflösung zu, wenn sie homogen ist. Da also das Glied $p dx$ zwey Dimensionen hat, so wird die Gleichung homogen seyn, wenn auch alle übrigen Glieder zwey Dimensionen enthalten, woraus hervorgeht, daß P und Q homogene Functionen des ersten Grades von x und p seyn müssen. Wenn sich daher y durch x und p so bestimmen läßt, daß y gleich wird einer homogenen Function zweyer Dimensionen von x und p, so wird die Auflösung gelingen. Denn wenn

$$dy = P dx + Q dp$$

ist, so wird die, die Auflösung enthaltende Gleichung

$$(P - p) dx + Q dp = o$$

homogen seyn, und für sich integrabel werden, wenn man sie durch $(P - p) x + Q p$ dividirt.

Zusatz 1.

§. 696. Wenn man in dem vierten Falle $y = z^2$ setzt, so muß die zwischen den drey Veränderlichen x, z und p vorgelegte Gleichung homogen seyn. Wenn daher irgend eine homogene Gleichung zwischen x, z und p gegeben wird, in welcher die drey Größen x, z und p durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen bilden, so kann die Aufgabe immer gelöst werden.

Zusatz 2.

§. 697. Werden die Veränderlichen vertauscht, und man setzt $x = v^2$ und $\frac{dx}{dy} = q$, so daß $p = \frac{1}{q}$ wird, so läßt sich, wenn irgend eine homogene Gleichung zwischen y, v und q gegeben wird, die Aufgabe ebenfalls auf dieselbe Art lösen.

Anmerkung.

§. 698. Für den vierten Fall können die Bedingungen erweitert werden, damit die Gleichung $(P - p) dx + Q dp = o$ homogen werde. Denn man setze $x = v^\mu$ und $p = q^\nu$, und es wird durch diese Substitution die Gleichung

$$\mu (P - q^\nu) v^{\mu - 1} dv + \nu Q q^{\nu - 1} dq = o$$

zwischen den Größen v und q homogen, so wird P eine homogene Function von μ Dimensionen, und Q eine homogene Function von ν Dimensionen. Da nun

$$dy = P dx + Q dp = \mu P v^{\mu-1} dv + \nu Q q^{\nu-1} dq,$$

so wird y eine homogene Function von $\mu + \nu$ Dimensionen seyn, wird daher $y = z^{\mu+\nu}$ gesetzt, so läßt die Aufgabe die Auflösung zu, wenn zwischen x, y und p eine solche Relation gegeben wird, daß für $y = z^{\mu+\nu}$, $x = v^{\mu}$ und $p = q^{\nu}$ zwischen den drey Größen z, v und q eine homogene Gleichung erhalten werde, so daß jene Größen durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen darbiethen; und wenn eine solche homogene Gleichung zwischen den Größen z, v und q gegeben wird, so kann das Problem auf folgende Art aufgelöst werden. Weil $dy = p dx$ ist, so wird

$$(\mu + \nu)\, z^{\mu+\nu-1} dz = \mu v^{\mu-1} q^{\nu} dv;$$

nun setze man $z = rq$ und $v = sq$, so wird die vorgelegte Gleichung nur die zwey Größen r und s enthalten, aus welcher sich die eine durch die andere bestimmen läßt, dann aber erhält man durch diese Substitutionen die Gleichung

$$(\mu + \nu)\, r^{\mu+\nu-1} q^{\mu+\nu-1} (r dq + q dr) =$$
$$= \mu s^{\mu-1} q^{\mu+\nu-1} (s dq + q ds),$$

und aus dieser erhält man

$$\frac{dq}{q} = \frac{\mu s^{\mu-1} ds - (\mu + \nu)\, r^{\mu+\nu-1} dr}{(\mu + \nu)\, r^{\mu+\nu} - \mu s^{\mu}},$$

welche Differenzialgleichung abgesondert ist, weil s durch r gegeben wird. Selbst die beyden angeführten Fälle sind offenbar enthalten in den Formeln

$$y = z^{\mu+\nu}, \quad x = v^{\mu}, \quad p = q^{\nu};$$

der erstere nämlich, wenn $\mu = 1$ und $\nu = 1$, der letztere aber, wenn $\mu = 2$ und $\nu = -1$ gesetzt wird. Es wird demnach zweckmäßig seyn, diese Fälle eben so wie die vorhergehenden durch Beyspiele zu erläutern, deren ersterer besonders merkwürdig ist, weil durch Differenziation der vorgelegten Gleichung $y = px + \Pi$ sogleich die gesuchte Integralgleichung erhalten wird, und gar keine Integration nöthig ist, so bald wir die zweyte Auflösung, welche die Gleichung $dp = 0$ darbiethet, außer Acht lassen.

Beyspiel 1.

§. 699. Man bestimme das Integrale folgender Differenzialgleichung:

$$y dx - x dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Wird $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, so erhält man $y - px = a\sqrt{1 + p^2}$, und durch Differenziation dieser Gleichung findet man, weil

$$dy = p\,dx \text{ ist}, \quad - x\,dp = \frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Da nun diese Gleichung durch dp theilbar ist, so erhält man zuerst $p = \alpha$, und daher $y = \alpha x + a\sqrt{1 + \alpha^2}$. Der andere Factor aber gibt $x = \frac{-ap}{\sqrt{1 + p^2}}$, und daher wird

$$y = \frac{-ap^2}{\sqrt{1 + p^2}} + a\sqrt{1 + p^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}},$$

also wird $x^2 + y^2 = a^2$, welches auch die Integralgleichung ist; allein weil sie keine neue Constaute mit sich führt, so kann sie nicht als das vollständige Integrale angesehen werden, denn dieses letztere umfaßt zwey Gleichungen, nämlich:

$$y = \alpha x + a\sqrt{1 + \alpha^2} \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

welche sich in eine Gleichung zusammenziehen lassen, und zwar in folgende:

$$[(y - \alpha x)^2 - a^2 (1 + \alpha^2)]\,(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Anmerkung.

§. 700. Wenn man die Rechnung nicht auf diese Art anstellt, so wird die Auflösung dieser Frage ziemlich schwierig, denn wenn wir die Differenzialgleichung $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ durch Quadriren von der Irrationalität befreyen, und dann den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ durch das Wurzelausziehen bestimmen würden, so erhalten wir

$$(x^2 - a^2)\,dy - xy\,dx = \pm\, a\,dx\sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

welche Gleichung nach den bekannten Methoden nur mit großer Mühe behandelt werden kann. Es läßt sich zwar ein Multiplicator finden durch welchen beyde Theile der Gleichung integrabel gemacht werden; denn der erste Theil $(x^2 - a^2)\,dy - xy\,dx$ wird durch $y\,(x^2 - a^2)$ dividirt, für sich integrabel, es entspricht nämlich als Integrale der Ausdruck $l.\frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; im Allgemeinen ist daher der integrirende

Factor

$$\frac{1}{y(x^2-a^2)}\,\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{x^2-a^2}}\right),$$

welche Function so bestimmt werden muß, daß durch denselben Factor auch das andere Glied $a\,dx\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ integrabel werde; ein solcher Multiplicator aber ist

$$\frac{1}{y(x^2-a^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=\frac{1}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

und durch diesen erhält man

$$\frac{(x^2-a^2)\,dy-xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=\frac{\pm a\,dx}{x^2-a^2}.$$

Um nun das Integrale des ersten Gliedes zu bestimmen, betrachte man x als constant, so wird das Integrale

$$=l\left[y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right]+X,$$

wobey X irgend eine Function von x bezeichnet, und so gebildet ist, daß wenn nun y als constant betrachtet wird,

$$\frac{x\,dx}{\left[y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right]\sqrt{x^2+y^2-a^2}}+dX=\frac{-xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$$

werde, oder

$$\frac{-x\,dx\left[y-\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right]}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}}+dX=\frac{-xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

und daher wird

$$dX=\frac{-x\,dx}{x^2-a^2}\quad\text{und}\quad X=l\frac{C}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Es ist demnach das gesuchte Integrale

$$l\left[y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right]+l\frac{C}{\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\tfrac{1}{2}l\frac{a+x}{a-x};$$

also wird

$$y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}=\alpha(x\pm a),\ \text{und daher}$$

$$x^2-a^2=\alpha^2(x\pm a)^2-2\alpha(x\pm a)y,\ \text{oder}$$

$$x\mp a=\alpha^2(x\pm a)-2\alpha y;$$

diese Gleichung ist aber nur die eine der beyden Integralgleichungen, die andere Integralgleichung $x^2+y^2=a^2$ ist gleichsam durch Division aus der Rechnung als verschwunden zu betrachten. Übrigens wird dieselbe Auflösung der Gleichung

$$(a^2-x^2)\,dy+xy\,dx=\pm a\,dx\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

leichter bewerkstelliget, wenn man $y = u\sqrt{a^2 - x^2}$ setzt, denn dann erhält man

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} du = \pm\, a dx \sqrt{(a^2 - x^2)(u^2 - 1)}, \text{ oder}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{\pm\, a dx}{a^2 - x^2};$$

dieser Gleichung geschieht zwar Genüge, wenn man $u = 1$ setzt, demungeachtet ist dieser Fall in der Integralgleichung nicht enthalten, wie wir oben bereits gezeigt haben. Man könnte demnach vermuthen, daß die zweyte Auflösung $x^2 + y^2 = a^2$ auszuschließen sey, daß sich aber dieß nicht so verhalte, sieht man, wenn man die Hauptgleichung $\frac{y dx - x dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \alpha$ in Erwägung zieht; denn wenn x und y die rechtwinklichen Coordinaten einer Curve sind, so bezeichnet der Ausdruck $\frac{y dx - x dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ das Perpendikel, welches aus dem Anfangspuncte der Coordinaten auf die Tangente gefällt wird, und demnach constant seyn muß. Es ist für sich klar, daß dieß beym Kreise der Fall sey, wenn man den Ursprung der Coordinaten ins Centrum verlegt, denn dann ist $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung des Kreises. Es bestätigt sich demnach die Möglichkeit dieser Auflösungen, welche nicht ganz übereinzustimmen scheinen konnten, obgleich ihre Beziehung nicht klar genug in die Augen fällt.

Beyspiel 2.

§. 701. Man bestimme das Integrale der Differenzialgleichung

$$y dx - x dy = \frac{a(dx^2 + dy^2)}{dx}.$$

Wird $dy = p dx$ gesetzt, so erhält man $y - px = a(1 + p^2)$ und durch Differenziation $- x dp = 2apdp$, und daher schließen wir, daß entweder $dp = 0$ und $p = \alpha$, also $y = \alpha x + a(1 + \alpha^2)$ oder $x = -2ap$ und $y = a(1 - p^2)$ sey, und weil $p = \frac{-x}{2a}$, so erhält man auf diese Art $4ay = 4a^2 - x^2$, welche Gleichung auf die Geometrie übertragen, jene Bedingung allerdings erfüllt.

Zieht man aber aus der vorgelegten Gleichung die Wurzel aus, so findet man $2a dy + x dx = dx\sqrt{x^2 + 4ay - 4a^2}$, oder wenn $y = u(4a^2 - x^2)$ gesetzt wird:

$$\imath du(4a^2 - x^2) - xdx(4au - 1) = dx\sqrt{(4a^2 - x^2)(4au - 1)},$$

d wenn $4au - 1 = t^2$ gesetzt wird:

$$tdt(4a^2 - x^2) - t^2xdx = tdx\sqrt{4a^2 - x^2}.$$

Weil nun diese Gleichung durch t theilbar ist, so kann man schlie-
n, daß $t = 0$ und daher $u = \frac{1}{4a}$ und demnach $4ay = 4a^2 - x^2$
).

Beyspiel 3.

§. 702. Man bestimme das Integrale der Differenzialgleichung

$$ydx - xdy = a\sqrt[3]{dx^3 + dy^3}.$$

Diese Gleichung würde sich, wenn wir aus derselben den Quo-
nten $\frac{dy}{dx}$ bestimmen wollten, schwerlich nach der gewöhnlichen Me-
ode behandeln lassen: Setzen wir aber $dy = pdx$, so wird
$- px = a\sqrt[3]{1 + p^3}$, und durch Differenziation

$$xdp = \frac{- ap^2dp}{\sqrt[3]{(1 + p^3)^2}},$$

so sind wir zu dem Schlusse berechtigt, daß entweder

$$dp = 0 \quad \text{und} \quad p = \alpha, \quad \text{also} \quad y = \alpha x + a\sqrt[3]{1 + \alpha^3},$$

er daß

$$x = \frac{- ap^2}{\sqrt[3]{(1 + p^3)^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{\sqrt[3]{(1 + p^3)^2}}$$

), daher wird $p^2 = - \frac{x}{y}$ und weil $y^3(1 + p^3)^2 = a^3$ ist, so
rd $p^3 = \frac{a\sqrt{a}}{y\sqrt{y}} - 1$, also $\frac{(a\sqrt{a} - y\sqrt{y})^2}{y^3} = - \frac{x^3}{y^3}$, oder

$$x^3 + (a\sqrt{a} - y\sqrt{y})^2 = 0.$$

Beyspiel 4.

§. 703. Man integrire die Differenzialgleichung

$$ydx - nxdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Für $dy = pdx$ erhält man $y - npx = a\sqrt{1 + p^2}$, und
her durch Differenziation

$$(1 - n)pdx - nxdp = \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{dx - nxdp}{(1 - n)p} = \frac{adp}{(1 - n)\sqrt{1 + p^2}};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $p^{\frac{n}{n-1}}$ und integrirt sie, so findet man

$$p^{\frac{n}{n-1}}\,x = \frac{a}{1-n}\int \frac{p^{\frac{n}{n-1}}\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Hieraus leiten wir folgende Fälle ab, welche die Integration zulassen:

wenn $n = \frac{3}{2}$ ist, so wird $p^3 x = C - \frac{2}{3} a \left(p^2 - \frac{2}{1}\right)\sqrt{1+p^2}$,

» $n = \frac{5}{4}$ » » » $p^5 x = C - \frac{4}{5} a \left(p^4 - \frac{4}{3}p^2 + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1}\right)\sqrt{1+p^2}$,

» $n = \frac{7}{6}$ » » » $p^7 x = C - \frac{6}{7} a \left(p^6 - \frac{6}{5}p^4 + \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3}p^2 - \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1}\right)\sqrt{1+p^2}$,

» $n = \frac{2\lambda+1}{2\lambda}$ ist, so wird $y = px + a\sqrt{1+p^2} + \frac{px}{2\lambda}$, und

$$x = \frac{C}{p^{2\lambda+1}} - \frac{2\lambda a}{(2\lambda+1)p}\left(1 - \frac{2\lambda}{(2\lambda-1)p^2} + \frac{2\lambda(2\lambda-2)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)p^4} - \ldots\right)\sqrt{1+p^2}.$$

Nimmt man also $\lambda = \infty$, damit $n = 1$ werde, so erhält man

$$y = px + a\sqrt{1+p^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{C}{p^{2\lambda+1}} - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

wird demnach die Constante $C = 0$ gesetzt, so ergibt sich sogleich die obige Auflösung $x^2 + y^2 = a^2$. Sollte aber die Constante C nicht verschwinden, so verursacht auch die kleinste Abweichung in der Größe p eine unendliche Verschiedenheit in dem Werthe für x. Wie sich also auch x ändern mag, so kann die Größe p dennoch als constant betrachtet werden, und daher ergibt sich für $p = \alpha$ die andere Auflösung $y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2}$. Hier klärt sich also der oben bey dem ersten Beyspiele entstandene Zweifel nicht wenig auf.

Beyspiel 5.

§. 704. Man bestimme das Integrale der Differenzialgleichung

$$A\,dy^n = (Bx^\alpha + Cy^\beta)\,dx^n,$$

in welcher $n = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}$ seyn soll.

Für $\frac{dy}{dx} = p$ wird $Ap^n = Bx^\alpha + Cy^\beta$. Setzen wir nun

$$p = q^{\alpha\beta}, \quad x = v^{\beta n} \text{ und } y = z^{\alpha n},$$

damit wir die homogene Gleichung

$$A q^{\alpha\beta n} = B v^{\alpha\beta n} + C z^{\alpha\beta n}$$

erhalten, so verwandelt sich diese, wenn $z = rq$ und $v = sq$ gesetzt wird, in

$$A = B s^{\alpha\beta n} + C r^{\alpha\beta n}.$$

Da nun aber

$$dy = \alpha n z^{\alpha n - 1} dz = \alpha n r^{\alpha n - 1} q^{\alpha n - 1}(r\,dq + q\,dr) \text{ und}$$

$$p\,dx = \beta n v^{\beta n - 1} q^{\alpha\beta} dv = \beta n s^{\beta n - 1} q^{\alpha\beta + \beta n - 1}(s\,dq + q\,ds),$$

so wird

$$\alpha r^{\alpha n - 1}(r\,dq + q\,dr) = \beta s^{\beta n - 1} q^{\alpha\beta + \beta n - \alpha n}(s\,dq + q\,ds).$$

Der Voraussetzung gemäß aber ist $\alpha\beta + \beta n - \alpha n = 0$, und daher wird

$$\alpha r^{\alpha n} dq + \alpha r^{\alpha n - 1} q\,dr = \beta s^{\beta n} dq + \beta s^{\beta n - 1} q\,ds, \text{ also}$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{\alpha r^{\alpha n - 1} dr - \beta s^{\beta n - 1} ds}{\beta s^{\beta n} - \alpha r^{\alpha n}}.$$

Es ist aber

$$s^{\beta n} = \left(\frac{A - Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ und daher}$$

$$\beta s^{\beta n - 1} ds = -\frac{\beta C}{B} r^{\alpha\beta n - 1} dr \left(\frac{A - Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

und demnach wird

$$\frac{dq}{q} = \frac{\alpha r^{\alpha n - 1} dr + \frac{\beta C}{B} r^{\alpha\beta n - 1} dr \left(\frac{A - Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\beta \left(\frac{A - Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \alpha r^{\alpha n}}.$$

Leichter wird sich die Rechnung auf folgende Art durchführen lassen. Man setze $A = 1$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = (Bx^{\alpha} + Cy^{\beta})^{\frac{1}{n}},$$

und für $y = x^{\frac{\alpha}{\beta}} u$ erhält man

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} du + \frac{\alpha}{\beta} x^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} u dx = x^{\frac{\alpha}{n}} dx (B + Cu^{\beta})^{\frac{1}{n}},$$

welche Gleichung für $\frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$ sich in folgende verwandelt:

$$\beta x du + \alpha u dx = \beta dx (B + Cu^{\beta})^{\frac{1}{n}},$$

und daher wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{\beta du}{\beta (B + Cu^{\beta})^{\frac{1}{n}} - \alpha u}.$$

Auf diese Art wird x durch u bestimmt, und weil $u = x^{-\frac{\alpha}{\beta}} y$ ist, so erhält man zwischen x und y eine Gleichung.

Anmerkung.

§. 706. Es wird also zweckmäßig seyn, nach dieser Methode zu rechnen, wenn zwischen den Veränderlichen, x und y und den Differenzialquotien $\frac{dy}{dx} = p$, eine solche Gleichung gegeben wird, aus welcher sich der Werth von p nicht bequem bestimmen läßt. Man muß dann also die Rechnung so führen, daß man durch Differenziation endlich auf eine einfache Differenzialgleichung, die bloß zwey Veränderliche enthält, geführt werde, indem man $dy = p dx$ oder $dx = \frac{dy}{p}$ setzt. Um diesen Zweck zu erreichen, muß man auch oft zweckmäßige Substitutionen gebrauchen.

Bis hieher beyläufig sind die Geometer in der Auflösung der Differenzialgleichungen des ersten Grades bis jetzt vorgedrungen, denn wir haben kaum irgend eine Methode, welche bereits zur Bestimmung der Integralien versucht wurde, übergangen. Ob sich wohl noch weitere Fortschritte in der Integralrechnung hoffen lassen? Ich möchte dieß kaum behaupten, indem die meisten Entdeckungen nun gemacht sind,

elche früher die Kräfte des menschlichen Geistes zu überschreiten
}ienen.

Weil ich die Integralrechnung in zwey Bücher abgetheilt habe,
ren erstes die Gleichungen zweyer Veränderlichen, deren letzteres
er die Gleichungen dreyer oder mehrerer Variabeln behandelt, und
} nun den ersten Theil des ersten Buches, welcher sich mit den Diffe-
nzialien des ersten Grades beschäftigt, nach Kräften auseinander ge-
ßt habe, so gehe ich nun zu dem anderen Theile desselben über, in
elchem aus einer gegebenen Gleichung zwischen den Differenzialien
:r zweyten oder einer höhern Ordnung, die zwischen den beyden Ver-
nderlichen bestehende Relation gesucht wird.





